А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Профільний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6
М52

Видано за рахунок державних коштів
Продаж заборонено

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ від 08.06.2010 № 544)

Наукову експертизу проводив
Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив
Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України

Експерти, які здійснювали експертизу:

О. В. Гордієнко, Фізико-технічний ліцей при Херсонському національному технічному університеті, вчитель, старший вчитель

Т. І. Калепко, СШ № 19 м. Нікополь Дніпропетровської обл., вчитель, вчитель-методист

Г. В. Скрипка, Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського, методист

Г. П. Досенко, Районний методичний кабінет відділу освіти Білозерської райдержадміністрації Херсонської обл., методист

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : проф. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 416 с. : іл.
ISBN 978-966-474-093-4.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721.6

ISBN 978-966-474-093-4

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ви зробили серйозний життєвий крок: вирішили продовжити освіту в профільному класі, де математика вивчається на підвищеному рівні. Ми вітаємо вас з цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруєтеся у своєму рішенні.

Навчатися в профільному класі не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)).

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з підвищеним рівнем викладання математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

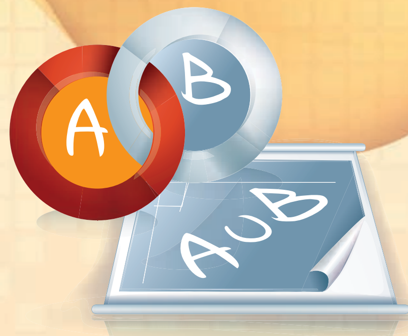
$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;

закінчення доведення теореми;

рубрика «Коли зроблено уроки».



§ 1

МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

1. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо x — довільний елемент множини A, яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть $A = \{x \mid \ldots\}$. Тут після вертикальної риски вказують характеристичну властивість, якій має задовольняти елемент x, щоб належати множині A.

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x\,(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x\,(x^2 - 1) = 0$. Ця множина дорівнює множині $\{-1, 0, 1\}$, яку, у свою чергу, можна задати за допомогою іншої характеристичної властивості:
$$\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
Тому можна записати, що $\{x \mid x\,(x^2 - 1) = 0\} =$
$$= \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 2\}.$$
- Нехай $(x; y)$ — координати точки. Тоді множина точок $\{(x; y) \mid y = 2x - 1$, x — будь-яке число$\}$ — пряма, яка є графіком функції $y = 2x - 1$.

Узагалі, для точок координатної площини множина $\{(x; y) \mid y = f\,(x),\ x \in D\,(f)\}$ — це графік функції f.

У геометрії, задаючи множину точок за допомогою характеристичної властивості, тим самим задають ГМТ.

- Якщо A, B — дані точки площини, X — довільна точка цієї площини, то множина $\{X \mid XA = XB\}$ — серединний перпендикуляр відрізка AB.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

Наприклад, $\{x \mid 0x = 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 1\} = \varnothing$.

Зазначимо, що множина $\{\varnothing\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

ПРИКЛАД Доведіть, що множина A всіх парних натуральних чисел дорівнює множині B чисел, які можна подати у вигляді суми двох непарних натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Тоді можна записати, що $x = 2m$, де m — натуральне число. Маємо: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Отже, $x \in B$.

Тепер припустимо, що $x \in B$. Тоді $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, де n і k — натуральні числа. Маємо: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Отже, $x \in A$.

Маємо: якщо $x \in A$, то $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in B$, то $x \in A$. Звідси $A = B$.

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкорюються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$;
2) $0 * \mathbb{N}$;
3) $-5 * \mathbb{Q}$;
4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$;
5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$;
6) $\pi * \mathbb{Q}$;
7) $\sqrt{2} * \mathbb{R}$;
8) $\sqrt{3} * \varnothing$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$;
2) $0 * D(f)$;
3) $0 * E(f)$;
4) $\frac{1}{2} * E(f)$;
5) $1{,}01 * E(f)$.

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
2) $1 \notin \{1\}$;
3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;
5) $\varnothing \notin \{1, 2\}$;
6) $\varnothing \in \{\varnothing\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$;
3) $x = 2$;
4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:
1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 - 1 = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 3\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 15,\ x = 7k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

11.° Задайте переліком елементів множину:
1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x(2|x| - 1) = 0\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ -3 \leqslant x < 2\}$.

12.• Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

13.• Чи рівні множини A і B, якщо:
1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

14.• Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:
1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

15.• Нехай O — задана точка площини. Що являє собою множина точок M цієї площини:
1) $\{M \mid OM = 3 \text{ см}\}$;
2) $\{M \mid OM > 5 \text{ см}\}$;
3) $\{M \mid OM \leqslant 5 \text{ см}\}$?

16.• Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
1) $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\ \frac{1}{2}x - 2 = 0\right\}$;
2) $B = \{x \mid x \neq x\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 1\}$;
4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

Рис. 1

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

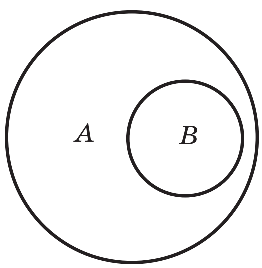
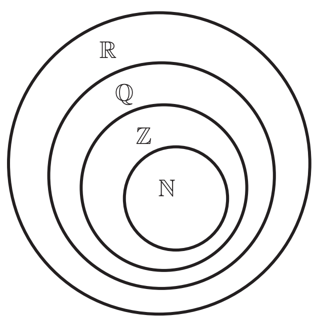


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо $B \subset A$, то за допомогою рисунка 2 можна зробити такі висновки:

1) для того щоб елемент x належав множині A, достатньо, щоб він належав множині B;

2) для того щоб елемент x належав множині B, необхідно, щоб він належав множині A.

Наприклад, якщо A — множина натуральних чисел, кратних 5, а B — множина натуральних чисел, кратних 10, то очевидно, що $B \subset A$. Тому для того, щоб натуральне число n було кратним 5 ($n \in A$), достатньо, щоб воно було кратним 10 ($n \in B$). Для того щоб натуральне число n було кратним 10 ($n \in B$), необхідно, щоб воно було кратним 5 ($n \in A$).

Із означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

ПРИКЛАД 1 Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$. Усього отримали 8 підмножин. В 11 класі буде доведено, що кількість підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Легко переконатися, що розв'язком системи, яка розглядалася, є пара (4; 1). Цей факт можна записати так:

$$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 4 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

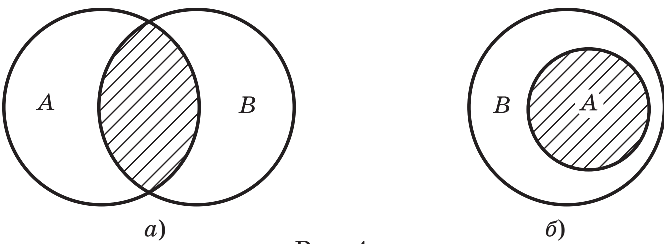


Рис. 4

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Наприклад, $(-3;\ 1) \cup (0;\ 2] = (-3;\ 2]$, $(-\infty;\ 1) \cup (-1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність рівнянь (нерівностей)**. Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0, \\ x^2 - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

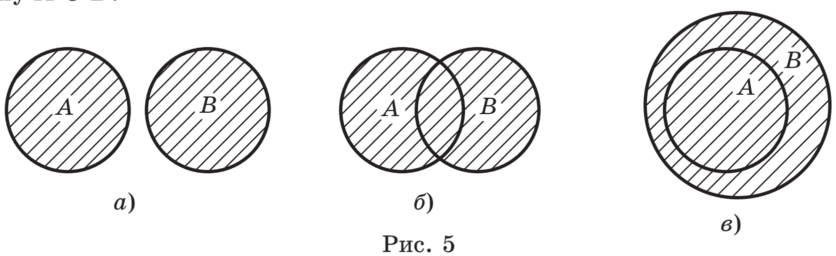


Рис. 5

Часто доводиться розглядати перетин і об'єднання трьох і більше множин.

Перетин множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A, і множині B, і множині C (рис. 6).

Наприклад, щоб розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

треба знайти перетин трьох множин: $\{(x, y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x, y) \mid x - y = 3\}$ і $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Об'єднання множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B, або множині C (рис. 7).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

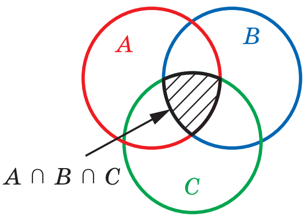


Рис. 6

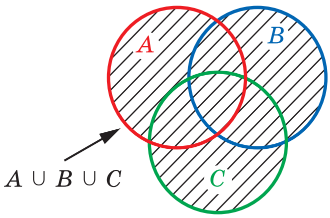


Рис. 7

ПРИКЛАД 2 Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$;

2) A — множина ромбів, B — множина прямокутників;

3) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leqslant 4\}$;

4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, B — множина простих чисел.

Розв'язання

1) A — множина натуральних чисел, кратних 5.

B — множина натуральних чисел, кратних 3.

Тоді множина $A \cap B$ складається з усіх натуральних чисел, кратних 5 і 3 одночасно, тобто з усіх натуральних чисел, кратних 15. Отже, $A \cap B = \{x \mid x = 15k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

2) Множина $A \cap B$ складається з усіх чотирикутників, які одночасно є і ромбами, і прямокутниками. Отже, шукана множина — це множина квадратів.

3) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$.

4) A — множина парних натуральних чисел. Оскільки у множині простих чисел є тільки одне парне число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, де O і X — точки площини, O — дана точка.

Розв'язання

1) A — множина непарних натуральних чисел, B — множина парних натуральних чисел. Тоді $A \cup B$ — це множина натуральних чисел, тобто $A \cup B = \mathbb{N}$.

2) A — множина непарних натуральних чисел. Елементами множини B є тільки непарні числа. Отже, $B \subset A$. Тоді $A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}\}$.

3) Очевидно, що $A \cup B = \{X \mid OX \leqslant 3\}$. Отже, $A \cup B$ — це круг з центром O і радіусом 3.

Вправи

17.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

18.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

19.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

20.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

21.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;	3) $x = 519$;	5) $x = 195888$;
2) $x = 9510$;	4) $x = 5858$;	6) $x = 91258$?

22.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

23.° Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 555288 і 82223; 2) 470713 і 400007.

24.° Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

25.° Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

26.° Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27288 і 56383; 2) 55555 і 777777.

27.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;	3) $a \subset \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;	4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

28.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

29.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників;
B — множина чотирикутників;
C — множина квадратів;
D — множина паралелограмів;

2) A — множина ссавців;
B — множина собачих;
C — множина хребетних;

D — множина вовків;
E — множина хижих ссавців.

30.° Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
$B = \{0\}$;
$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
A — множина натуральних чисел, кратних 6;
B — множина натуральних чисел, кратних 3.

31.° Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:

$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \mathbb{N}\}$; $D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

32.° Яка з множин A або B є підмножиною другої, якщо:
$A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$?

33.° Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A. Запишіть множину A.

34.° Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

35.° Опишіть мовою «необхідно й достатньо» належність елемента x множинам A, B і C (рис. 8).

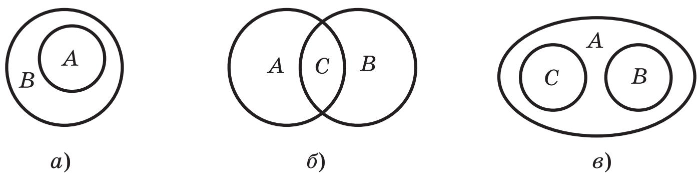


Рис. 8

36.° Замість крапок поставте слово «необхідно» або «достатньо», щоб утворилося правильне твердження:

1) для того щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб два його кути були рівні;
2) для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб дві його сторони були паралельні;
3) для того щоб число ділилося націло на 3, ..., щоб воно ділилося націло на 9;
4) для того щоб остання цифра десяткового запису числа була нулем, ..., щоб число було кратне 5.

37.• Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A.

38.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

39.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

40.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{(x; y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x; y) \mid x + y = 5\}$.

41.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

42.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

43.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A.

44.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

45.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

46.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$.

47.• Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

48.• Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

49.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A.

50.• Наведіть приклад такої одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною даної множини.

3. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів — то **нескінченною**. Порожню множину вважають скінченною.

Наприклад, множина учнів вашого класу — скінченна множина, а множина натуральних чисел — нескінченна множина.

Якщо A — скінченна множина, то кількість її елементів позначатимемо так: $n\ (A)$.

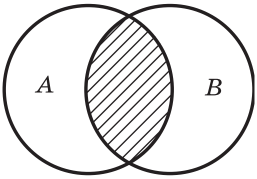


Рис. 9

Наприклад, якщо A — це множина днів тижня, то $n\ (A) = 7$; якщо B — це множина двоцифрових чисел, то $n\ (B) = 90$. Зрозуміло, що $n\ (\varnothing) = 0$.

Нехай A і B — такі скінченні множини, що $A \cap B = \varnothing$. Тоді очевидно, що

$$n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B). \qquad (1)$$

Якщо A і B — скінченні множини, причому $A \cap B \neq \varnothing$ (рис. 9), то до суми $n\ (A) + n\ (B)$ двічі входить кількість елементів їх перетину, тобто двічі враховується число $n\ (A \cap B)$. Отже, у цьому випадку

$$\boxed{n\ (A \cup B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cap B)} \qquad (2)$$

Коли $A \cap B = \varnothing$, то $n\ (A \cap B) = 0$. Тому формула (2) є узагальненням формули (1).

ПРИКЛАД 1 У фізико-математичному класі 25 учнів, і всі вони люблять математику. Відомо, що 23 учні люблять алгебру, а 21 — геометрію. Скільки учнів цього класу люблять і алгебру, і геометрію?

Розв'язання. Нехай A — множина учнів, які люблять алгебру, B — множина учнів, які люблять геометрію. Тоді $n\ (A) = 23$, $n\ (B) = 21$, $n\ (A \cup B) = 25$. Водночас $A \cap B$ — множина учнів, які люблять і алгебру, і геометрію. З формули (2) отримуємо $n\ (A \cap B) = n\ (A) + n\ (B) - n\ (A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19$.

З'ясуємо, як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$, де A, B і C — скінченні множини.

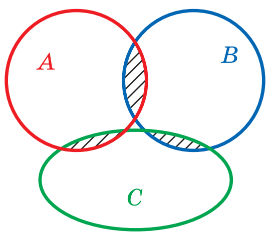


Рис. 10

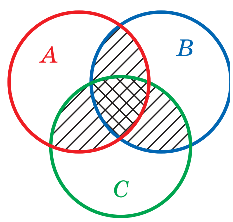


Рис. 11

Якщо $A \cap B \cap C = \varnothing$ (рис. 10), то зрозуміло, що

$$n\ (A \cup B \cup C) = n\ (A) + n\ (B) + n\ (C) - \\ - n\ (A \cap B) - n\ (B \cap C) - n\ (C \cap A). \quad (3)$$

Якщо $A \cap B \cap C \neq \varnothing$ (рис. 11), то права частина формули (3) не враховує кількості спільних елементів множин A, B і C. Отже, у цьому випадку формула набуває вигляду:

$$n\ (A \cup B \cup C) = n\ (A) + n\ (B) + n\ (C) - \\ - n\ (A \cap B) - n\ (B \cap C) - n\ (C \cap A) + n\ (A \cap B \cap C). \quad (4)$$

Аналогічну формулу можна отримати для будь-якої кількості множин. Її називають «формулою включення-виключення».

ПРИКЛАД 2 У спортивній школі є три секції: акробатики, баскетболу, волейболу. Відомо, що школу відвідують 200 школярів, а кожну із секцій — 80 школярів. Доведіть, що знайдеться 14 школярів, які відвідують одні й ті самі дві секції.

Розв'язання. Позначимо множини школярів, які відвідують секції акробатики, баскетболу й волейболу, буквами A, $Б$ і $В$ відповідно. Тоді $n\ (A \cup Б \cup В) = 200$, $n\ (A) = n\ (Б) = n\ (В) = 80$. Підставимо ці значення у формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n\ (A \cap Б) - n\ (Б \cap В) - \\ - n\ (В \cap A) + n\ (A \cap Б \cap В).$$

Звідси

$n\ (A \cap Б) + n\ (Б \cap B) + n\ (B \cap A) = 40 + n\ (A \cap Б \cap B) \geqslant 40.$

Якщо припустити, що кожне з чисел $n\ (A \cap Б)$, $n\ (Б \cap B)$, $n\ (B \cap A)$ не перевищує 13, то їх сума не перевищує 39. Отримали суперечність.

Нам доволі часто доводиться порівнювати скінченні множини за кількістю їх елементів.

Як дізнатися, чи вистачить у шкільній бібліотеці підручників з алгебри і початків аналізу для десятикласників? Звичайно, можна порахувати окремо учнів і підручники, а можна видати підручники учням. Якщо, наприклад, усім підручників вистачить, а в бібліотеці не залишиться жодного підручника, то це означатиме, що десятикласників і підручників однакова кількість.

Так само, щоб дізнатися, чи вистачить стільців у класі, зовсім не обов'язково їх перераховувати. Достатньо запросити учнів сісти на стільці. Якщо, наприклад, місць вистачить не всім, то це означатиме, що кількість учнів більша, ніж кількість стільців.

У цих прикладах, порівнюючи кількість елементів двох множин, ми *кожному елементу однієї множини поставили у відповідність єдиний елемент другої множини*. Скористаємося цією ідеєю в наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному двоцифровому числу те трицифрове число, яке отримаємо з нього, приписавши справа одиницю. Дістанемо:

$$\begin{array}{cccccc} 10, & 11, & 12, & \ldots, & 98, & 99 \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 101, & 111, & 121, & \ldots, & 981, & 991 \end{array}$$

Зазначимо, що за такої відповідності всі елементи множини B виявляться «задіяними». Справді, якщо в числі виду $\overline{ab1}$ закреслити останню цифру, то отримаємо двоцифрове число $\overline{ab}$.

На основі відповідності між елементами множин A і B можна зробити висновок, що $n\ (A) = n\ (B)$.

Означення. **Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A, то кажуть, що між множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність.**

У прикладі 3 кожному двоцифровому числу було поставлено у відповідність єдине трицифрове число зазначеного вигляду і, навпаки, кожне таке трицифрове число є відповідним єдиному двоцифровому числу. Отже, між множинами, що розглядаються, було встановлено взаємно однозначну відповідність.

Зазначимо, що коли в класі всі учні сидять і при цьому є вільні стільці, то між множиною учнів і множиною стільців взаємно однозначної відповідності не встановлено.

Цікаво, що з дитинства кожному з нас неодноразово доводилося встановлювати взаємно однозначні відповідності. Дитина, промовляючи «один», «два», «три» і при цьому послідовно показуючи на машинку, м'ячик і коника, тим самим встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною своїх іграшок і множиною $\{1, 2, 3\}$. Рахуючи іграшки, дитина ніби прив'язує до кожного з предметів ярлики з написами «1», «2», «3». Зауважимо, що, показуючи іграшки в іншому порядку, наприклад, «м'ячик», «коник», «машинка», одержуємо іншу взаємно однозначну відповідність між цими множинами.

Якщо між скінченними множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. *І навпаки, якщо* $n(A) = n(B)$, *то між скінченними множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність.*

Отже, між скінченними множинами з різною кількістю елементів неможливо встановити взаємно однозначну відповідність. Це дозволяє сформулювати таке правило.

Якщо між скінченними множинами A і C встановлено взаємно однозначну відповідність і $C \subset B$, $C \neq B$, *то* $n(A) < n(B)$.

Вправи

51.° Кожний з 32 учнів класу вивчає щонайменше одну іноземну мову. З них 20 вивчають англійську мову і 18 — французьку. Скільки учнів вивчають і англійську, і французьку мови?

52.° Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 з них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?

53.° З анкети, проведеної в класі, з'ясувалося, що з 30 учнів класу 18 мають брата, 14 — сестру, а у 10 учнів є сестра і брат. Чи є в цьому класі учні, у яких немає ні сестри, ні брата?

54.° У грудні було 10 ясних і затишних днів, 15 днів був вітер і 12 днів ішов сніг. Скільки днів у грудні була хуртовина (сніг і вітер)?

55.° Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B (рис. 12)? Точками на рисунку зображено елементи множин.

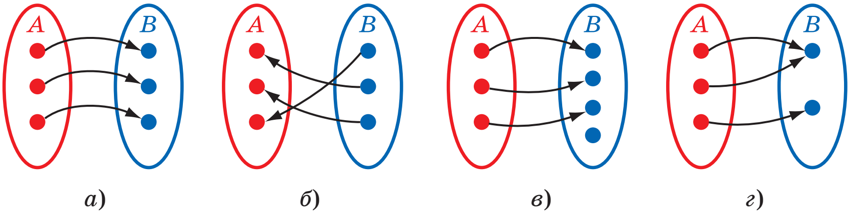


Рис. 12

56.° Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

57.° У результаті жеребкування кожна з 20 пар фігуристів отримала порядковий номер її виступу. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

58.° Кожний глядач, який прийшов до кінотеатру, купив квиток із зазначеними рядом і місцем. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

59.• Між першими n натуральними числами і правильними дробами зі знаменником 7 установлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n.

60.• Кожному елементу множини $\{n, n + 1, n + 2\}$, де $n \in \mathbb{N}$, поставили у відповідність остачу від ділення цього елемента на 3. Чи встановлено таким чином взаємно однозначну відповідність між множинами $\{n, n + 1, n + 2\}$ і $\{0, 1, 2\}$?

61.* В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропоновано розв'язати 3 задачі. Після підведення підсумків з'ясувалося, що кожен з учасників розв'язав хоча б одну задачу. Першу і другу задачі розв'язали 11 учасників, другу і третю — 8 учасників, першу і третю — 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менше ніж половина учасників.

4. Нескінченні множини. Зліченні множини

У попередньому пункті ми розглядали скінченні множини, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, і з'ясували, що такі множини мають однакову кількість елементів.

Керуючись принципом «частина менша від цілого», доходимо висновку, що коли B — власна підмножина скінченної множини A, то $n(B) < n(A)$. Отже, між скінченною множиною та її власною підмножиною неможливо встановити взаємно однозначну відповідність.

Оскільки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то, здавалося б, природно вважати, що цілих чисел більше, ніж натуральних. Проте це не так.

Нескінченні множини в цьому сенсі поводяться незвично.

Розглянемо множину $\mathbb{N}$ і підмножину M парних чисел. Множина M є власною підмножиною множини $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність єдиний елемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \dots, & 2n, & \dots \end{array}$$

При цьому кожне парне число відповідатиме єдиному натуральному числу. Тим самим між множинами $\mathbb{N}$ і M встановлено взаємно однозначну відповідність, а тому не можна вважати, що в множині $\mathbb{N}$ міститься більше елементів, ніж в її власній підмножині — множині парних чисел.

Цей приклад показує, що звичні для нас уявлення про скінченні множини не можна переносити на нескінченні множини.

Узагалі, математиками було доведено, що в будь-якій нескінченній множині A можна виокремити власну підмножину A_1 таким чином, що між множинами A і A_1 можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це принципова відмінність нескінченних множин від скінченних.

Якщо множини A і B є скінченними і між ними встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. Якщо ж взаємно однозначну відповідність установлено між нескінченними множинами A і B, то в математиці не прийнято говорити, що ці множини мають однакову кількість елементів, а кажуть, що множини A і B мають однакову **потужність**.

Означення. Дві множини називають рівнопотужними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Для нескінченних множин слово «потужність» означає те саме, що для скінченних множин «кількість елементів».

Доведемо ще один дивовижний факт: множина точок прямої рівнопотужна множині точок **відкритого відрізка** (відрізка, у якого «виколото» кінці), тобто пряма містить стільки ж точок, скільки містить їх відкритий відрізок.

На рисунку 13 зображено пряму MN, яка дотикається до півкола з центром у точці O і діаметром AB, паралельним прямій MN. Вилучимо з півкола точки A і B. Таке півколо називають **відкритим**.

Кожній точці X відкритого півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої MN, яка лежить на промені OX. Зрозуміло, що точці X відповідає єдина точка прямої MN і, навпаки, кожна точка прямої MN є відповідною єдиній точці відкритого півкола. Отже, установлено взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої і множиною точок відкритого півкола.

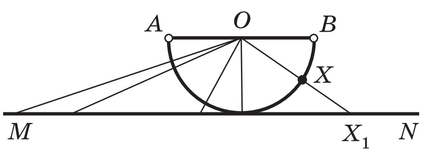


Рис. 13

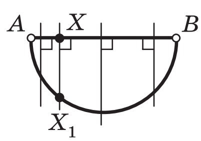


Рис. 14

На рисунку 14 показано, як встановити взаємно однозначну відповідність між множиною точок відкритого відрізка і множиною точок відкритого півкола. Отже, множина точок відкритого відрізка AB рівнопотужна множині точок прямої MN.

У розповіді на с. 27 ви дізнаєтесь ще про один несподіваний факт, у який важко повірити, керуючись лише інтуїцією: множина точок сторони квадрата рівнопотужна множині точок квадрата.

Означення. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають зліченною множиною.

Вище ми показали, що множина парних чисел є зліченною. Зрозуміло, що жодна скінченна множина не є зліченною.

Натуральне число n, яке відповідає елементу a зліченної множини A, називають *номером цього елемента*. Якщо елемент a має номер n, то пишуть: a_n. Коли встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами A і $\mathbb{N}$, кожний елемент множини A отримує свій номер, і ці елементи можна розмістити послідовно:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

Так, якщо елементи множини P простих чисел розмістити у порядку зростання 2, 3, 5, 7, 11, ..., то всі елементи цієї множини можна пронумерувати:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \end{array}$$

Тим самим установлено взаємно однозначну відповідність між множинами P і $\mathbb{N}$.

У такий спосіб можна показати, що будь-яка нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$ є зліченною (зробіть це самостійно).

На перший погляд здається, що елементи множини $\mathbb{Z}$ пронумерувати неможливо: адже множина $\mathbb{N}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Z}$. Отже, чисел для нумерації не вистачить: усі вони будуть «витрачені» на множину $\mathbb{N}$.

Проте якщо елементи множини $\mathbb{Z}$ розмістити у вигляді послідовності 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, ..., то тим самим можна кожному цілому числу надати свій номер:

$$\begin{array}{cccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \end{array}$$

Можна показати, що множина $\mathbb{Q}$ є також зліченною.

Зазначимо, що не будь-яка нескінченна множина є зліченною. Можна довести, що, наприклад, множина $\mathbb{R}$ не є зліченною.

Вправи

62.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

63.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду $4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

64.° Доведіть, що множини парних і непарних натуральних чисел рівнопотужні.

65.° Доведіть, що множина чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.

66.° Доведіть, що множина чисел виду $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ зліченна.

67.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n $(n \in \mathbb{N})$ і множиною десяткових дробів виду 0,1; 0,01; 0,001; … .

68.• Покажіть, що множини точок сторони і діагоналі квадрата рівнопотужні.

69.• Покажіть, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.

70.•• Покажіть, що множина точок прямої і множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.

71.•• На координатній прямій позначили точки *O* (0), *A* (1), *B* (5). Доведіть, що:

1) множина точок відрізка *OA* рівнопотужна множині точок відрізка *OB*;
2) множина точок відрізка *OA* з «виколотою» точкою *O* рівнопотужна множині точок променя *AB*.

72.•• Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.

«Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»

Ці слова належать видатному математику, засновнику теорії множин Георгу Кантору. Вони свідчать про те, що навіть генію часом буває складно примирити свою інтуїцію з формальним результатом.

Мабуть, і ви зазнавали подібного дискомфорту, коли логіка міркувань вимушувала вас погодитися з тим, що на будь-якому, навіть дуже маленькому, відрізку стільки ж точок, скільки їх на всій прямій.

Георг Кантор (1845–1918)

А чи можна повірити в те, що множина точок квадрата рівнопотужна множині точок його сторони? Мабуть, ні. Цьому не вірив і сам великий Кантор.

У 1874 р. в одному зі своїх листів до видатного математика Р. Дедекінда (1831–1916) Кантор писав: «Чи можна зіставити поверхню (наприклад, квадратну площадку, включаючи її межі) з відрізком прямої таким чином, щоб кожній точці поверхні відповідала одна точка на цьому відрізку, і навпаки?»

Кантор думав, що відповідь має бути негативною, і намагався це довести протягом трьох років. Проте в 1877 р. він отримує несподіваний результат: будує взаємно однозначну відповідність між множиною точок квадрата і множиною точок його сторони.

Ознайомимося з ідеєю доведення Кантора.

Розглянемо на координатній площині квадрат з вершинами A (0; 0), B (0; 1), C (1; 1), D (1; 0) (рис. 15).

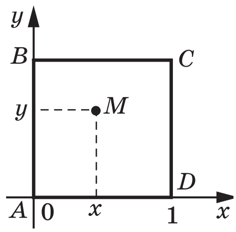


Рис. 15

Нехай точка M $(x; y)$ належить квадрату. Координати x і y задовольняють нерівності $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Тому числа x і y можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів:

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ \ldots,$$

$$y = 0{,}\beta_1\beta_2\beta_3\ \ldots\ .$$

Зауважимо, що коли $x = 1$ або $y = 1$, то координату можна записати у вигляді дробу 0,999... .

За допомогою цих записів сконструюємо новий десятковий дріб, «перемішуючи» цифри десяткового запису чисел x і y через одну:

$$z = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ \ldots\ .$$

Точці M $(x; y)$ поставимо у відповідність точку K $(z; 0)$. Очевидно, що ця точка належить стороні AD квадрата.

Зрозуміло, що різні точки квадрата мають різні координати. Тому при зазначеній відповідності різним точкам квадрата відповідають різні точки його сторони AD[1].

Після викладеного ви, мабуть, уже не дивуватиметесь тому, що, наприклад, множина точок куба рівнопотужна множині точок його ребра.

Множини, рівнопотужні множині точок відрізка, називають множинами потужності **континууму** (від латинського *continuum* — неперервний).

[1] Деякі числа мають два десяткових записи. Наприклад, дробам 0,7000... і 0,6999... відповідає одне й те саме число. Оскільки ідея доведення Кантора пов'язана з десятковим записом числа, то в строгому доведенні має бути показано, як вирішується проблема неоднозначності запису числа при встановленні взаємно однозначної відповідності.

§ 2

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

5. Повторення та розширення відомостей про функцію

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

З цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Також можна записати $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

У функціональній залежності кожному значенню аргументу x відповідає певне значення залежної змінної y. Значення залежної змінної ще називають **значенням функції** і для функції f позначають $f(x)$. Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $[0;\ +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою.**

Якщо областю визначення функції f є множина X, а областю значень — множина Y, то функцію f також називають **відображенням множини X на множину Y**. Слова «відображення» і «функція» є синонімами. Проте термін «відображення» частіше використовують тоді, коли при заданні функції хочуть наголосити, які множини є областю визначення і областю значень.

На рисунку 16 проілюстровано відображення множини X на множину Y (точками позначено елементи множин).

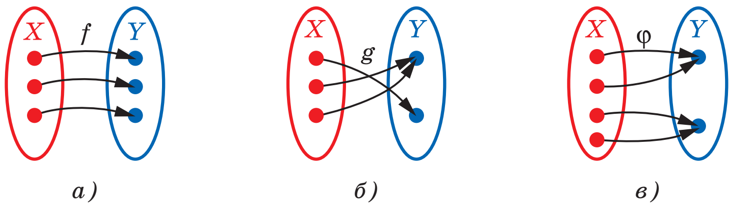


Рис. 16

Відображення f принципово відрізняється від відображень g і φ (рис. 16): у відображенні f кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X. Таке відображення називають **взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y**. Наприклад, нумерація елементів деякої зліченної множини M — це взаємно однозначне відображення множини $\mathbb{N}$ на множину M.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Розглянемо кілька прикладів функцій, заданих описово.

↳ Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **функцією Діріхле** і позначають $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишуть:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує число x. Таку функцію називають **цілою частиною числа** x і позначають $y = [x]$. Наприклад, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{Z}$.
- Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність різницю $x - [x]$. Таку функцію називають **дробовою частиною числа** x і позначають $y = \{x\}$. Наприклад, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Тут $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; 1)$.
- Кожному від'ємному числу поставимо у відповідність число -1, кожному додатному числу — число 1, нулю — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **сигнум** (від латинського *signum* — знак) і позначають $y = \operatorname{sgn} x$.

  Пишуть:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

  Значення цієї функції характеризує знак відповідного аргументу. Зауважимо, що $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$.
- Розглянемо функцію f, у якої $D(f) = \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f(n) = 1$, якщо десятковий запис числа π містить n цифр 4, що йдуть поспіль, і $f(n) = 0$, якщо цей запис такої властивості не має. Звернемо увагу на те, що значення функції f обчислювати важко. Наприклад, ми не знаємо, чому дорівнює $f(10\,000\,000\,000)$. Проте й у такому випадку функцію вважають заданою.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу іншої функції.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо значеннями аргументу функції f є значення функції g, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$.

Існують функції, які на різних підмножинах області визначення задаються різними формулами. Наприклад,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Такі функції називають **кусково заданими**.

Спосіб задання функції однією чи кількома формулами називають **аналітичним**.

У тих випадках, коли область визначення функції є скінченною множиною і кількість її елементів не дуже велика, зручно використовувати табличний спосіб задання функції. Цей спосіб досить часто використовують на практиці. Так, результатом запису спостережень за якою-небудь характеристикою процесу (температурою, швидкістю, тиском і т. п.) є таблиця, яка задає відповідну функцію залежності цієї величини від часу.

Нагадаємо означення графіка функції.

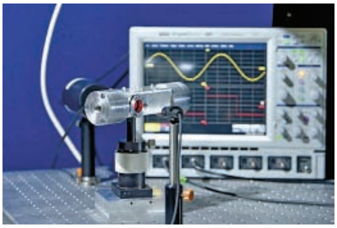
Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції.

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.



Осцилограф

Електрокардіограф

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область визначення функції

$$y=\sqrt{x^2(x-1)}.$$

Розв'язання. Область визначення даної функції — множина розв'язків нерівності

$$x^2(x-1)\geqslant 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x-1\geqslant 0. \end{array}\right.$

Звідси $D(y)=\{0\}\cup[1;+\infty)$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область значень функції $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай $a\in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень a, при яких рівняння $\dfrac{2x}{1+x^2}=a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:

$2x=a+ax^2$, звідки $ax^2-2x+a=0$.

Якщо $a=0$, то отримане рівняння має корінь $x=0$.

Якщо $a\neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D\geqslant 0$.

Маємо: $D=4-4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4-4a^2\geqslant 0$:

$$4a^2\leqslant 4,\ a^2\leqslant 1,\ |a|\leqslant 1.$$

Отже, $E(y)=[-1;1]$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y=[x]$.

Розв'язання. Нехай $x\in[k;k+1)$, де $k\in\mathbb{Z}$. Тоді за означенням цілої частини числа $[x]=k$.

Тепер зрозуміло, що для побудови шуканого графіка потрібно область визначення функції розбити на проміжки виду $[k;k+1)$, де $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих проміжків значення функції $y = [x]$ є сталим і дорівнює k.

Шуканий графік зображено на рисунку 17.

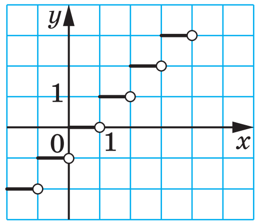


Рис. 17

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \{x\}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо важливі властивості цілої і дробової частин числа.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Нехай $[x] = c$. Тоді за означенням цілої частини числа $c \leqslant x < c + 1$. Звідси $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Отже, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Маємо: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доведена властивість дробової частини числа дозволяє стверджувати, що на кожному з проміжків виду $[k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$, графік функції $y = \{x\}$ має однаковий вигляд. Тому досить побудувати його, наприклад, на проміжку $[0; 1)$, а потім отриману фігуру «розмножити».

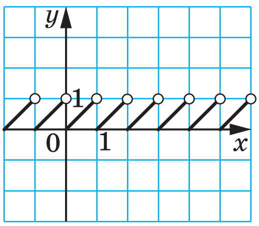


Рис. 18

Якщо $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ і $\{x\} = x - [x] = x$, тобто при $x \in [0; 1)$ маємо $y = x$.

Шуканий графік зображено на рисунку 18.

Вправи

73.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 5.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію таблично.

74.° Дано функції: $f(x) = [x]$, $g(x) = \{x\}$, $\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$. Знайдіть: 1) $f(3{,}2)$, $g(3{,}2)$, $\varphi(3{,}2)$; 2) $f(-3{,}2)$, $g(-3{,}2)$, $\varphi(-3{,}2)$; 3) $f(\sqrt{3})$, $g(\sqrt{3})$, $\varphi(\sqrt{3})$; 4) $f(-\sqrt{3})$, $g(-\sqrt{3})$, $\varphi(-\sqrt{3})$.

75.° На рисунку 19 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3,5)$; $f(-2,5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2,5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

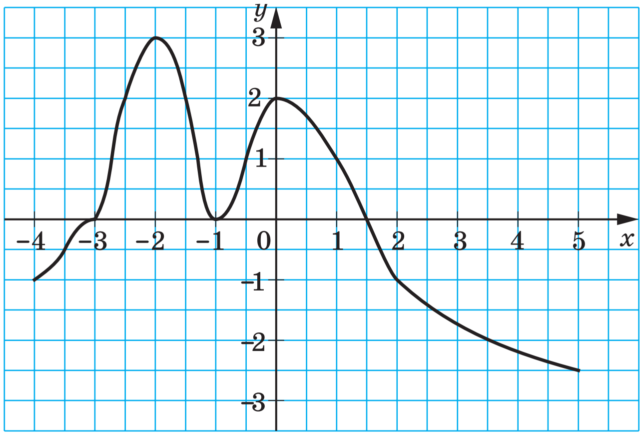


Рис. 19

76.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
5) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$;

77.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $h(x) = 9 - 10x$;
2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;
3) $s(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

78.° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{якщо } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, & \text{якщо } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6,4)$.

79.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 9, & \text{якщо } x \leqslant -3, \\ x^2, & \text{якщо } -3 < x < 1, \\ x, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

80.° Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x<-2,\\ -x, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$

81.° Побудуйте графік функції $y = \operatorname{sgn} x$.

82.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;
3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

83.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

84.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
2) $f(x) = 5 - x^2$;
3) $f(x) = -7$;
4) $f(x) = |x + 2| + 2$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

85.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$;
2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$.

86.° Дано функції $f(x) = 1 - 3x$ і $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(x + 1)$;
2) $y=g\left(\dfrac{1}{x}\right)$;
3) $y = f(g(x))$;
4) $y = g(f(x))$;
5) $y = f(f(x))$;
6) $y = g(g(x))$.

87.° Дано функції $f(x)=\sqrt{x+1}$ і $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(3x)$;
2) $y = g(-x)$;
3) $y = f(g(x))$;
4) $y = g(f(x))$;
5) $y = f(f(x))$;
6) $y = g(g(x))$.

88.° Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;
2) множина всіх чисел, не менших від 5;
3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа −1;
4) множина, яка складається з одного числа −4.

89.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

90.° Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{x}$.

91.• Функцію f задано описом: кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 3. Знайдіть $f(2)$, $f(0)$, $f(16)$, $f(21)$. Знайдіть $E(f)$. Доведіть, що $f(x) = f(x + 3)$ для будь-якого $x \in \mathbb{N}$.

92.• Функцію g задано описом: кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу від ділення цього числа на 4. Знайдіть $g(3)$, $g(0)$, $g(14)$, $g(32)$. Знайдіть $E(g)$. Доведіть, що $g(x) = g(x + 4)$ для будь-якого $x \in \mathbb{N}$.

93.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{4-|x|}+\frac{1}{x+2}$;
2) $y=\sqrt{|x|-3}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$;
3) $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$;
4) $y=\sqrt{|x+1|(x-3)}$;
5) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2(x+2)}}$;
6) $y=\sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

94.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\frac{1}{\sqrt{3-|x|}}+\frac{1}{x-2}$;
2) $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-1}}+\sqrt{x+4}$;
3) $y=\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}}$;
4) $y=\sqrt{(x+4)^2(x-3)}$;
5) $y=\sqrt{|x+5|(x+2)}$;
6) $y=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

95.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;
3) $y=\frac{3x+1}{2x+3}$;
4) $y=\frac{x}{x^2-1}$;
5) $y=x+\frac{9}{x}$.

96.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = 5x^2 - x + 1$;
2) $y = -3x^2 - x - 2$;
3) $y=\frac{2x-1}{5x+4}$;
4) $y=\frac{2x}{x^2-4}$;
5) $y=4x+\frac{1}{x}$.

97.•• Побудуйте графік функції $y=\left(\sqrt{(x+2)^2 x}\right)^2-x^3-4x^2$.

98.•• Побудуйте графік функції $y=x^3-\left(\sqrt{x^2(x-1)}\right)^2$.

99.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\mathfrak{D}\,(x)}$; 3) $y = \dfrac{1}{\{x\}}$; 5) $y = \sqrt{\mathfrak{D}\,(x) - 1}$.

2) $y = \dfrac{1}{[x]}$; 4) $y = \sqrt{-\mathfrak{D}\,(x)}$;

6. Зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції

Часто про властивості об'єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дозволяє визначити певні її властивості.

На рисунку 20 зображено графік деякої функції $y = f\,(x)$.

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

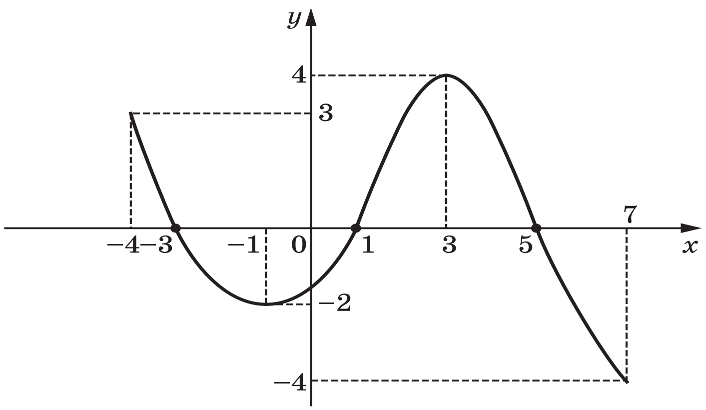


Рис. 20

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Наприклад, проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини (точніше, ті, які не є власними підмножинами інших проміжків знакосталості). Наприклад, проміжок $(-2; -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 20), але до відповіді увійде проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція спадає**. Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція зростає**.

Означення. Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Означення. Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою.** Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною.**

Наприклад, на рисунку 21 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 22 зображено графік спадної функції $y = -x$.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, до того ж $x_1 < x_2$. Покажемо, що $x_1^n > x_2^n$,

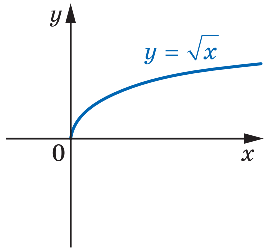


Рис. 21

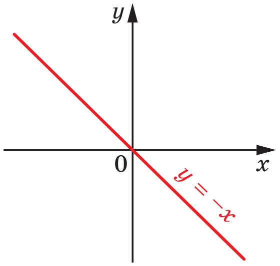


Рис. 22

тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_1 < x_2$, $-x_1 > -x_2$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_1)^n > (-x_2)^n$. Оскільки n парне, то $x_1^n > x_2^n$.

Зазначимо, що в таких випадках кажуть, що проміжок $(-\infty; 0]$ є **проміжком спадання** заданої функції. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.

Зауваження. У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків зростання (спадання), аналогічно тому, як це робиться під час пошуку проміжків знакосталості.

Зазначимо, що існують функції, визначені на $\mathbb{R}$, які не є зростаючими (спадними) на жодному проміжку області визначення. Наприклад, такою функцією є константа. Ще одним прикладом такої функції є функція Діріхле.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

Теорема 6.1. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M, то функція $y = -f(x)$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Доведення. Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ є зростаючою на множині M. Тоді для будь-яких x_1 і x_2, які належать множині M і таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Звідси $-f(x_1) > -f(x_2)$. Отже, функція $y = -f(x)$ є спадною.

Аналогічно доводять, що коли функція $y = f(x)$ спадає на множині M, то функція $y = -f(x)$ зростає на множині M. ▲

Теорема 6.2. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині M, то функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Доведіть теорему 6.2 самостійно.

Теорема 6.3. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині $D(f)$, то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.***

Доведення. Нехай функція f є зростаючою та рівняння $f(x) = a$ має два корені x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Тоді $f(x_1) < f(x_2)$. Проте $f(x_1) = a$, $f(x_2) = a$, тобто $f(x_1) = f(x_2)$. Отримали суперечність. Отже, рівняння $f(x) = a$ має не більше одного кореня.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

З цього випливає таке твердження:

якщо функція f зростає (спадає) на $D(f)$ і $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$, тобто зростаюча (спадна) функція кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу.

Наслідок. ***Якщо одна з функцій f або g є зростаючою на множині $D(f) \cap D(g)$, а інша — спадною на цій множині, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.***

Доведіть це твердження самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = \sqrt{2x-1}$ є зростаючими. Отже, згідно з теоремою 6.2 функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою на множині $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Тоді теорема 6.3 дозволяє стверджувати, що дане рівняння має не більше одного кореня.

Нескладно помітити, що $x = 1$ є коренем даного рівняння. Ураховуючи вищесказане, цей корінь є єдиним.

Відповідь: 1.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} =$ $= f(0) = 0,$ $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 23).

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0,$ $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 24).

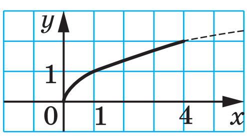


Рис. 23

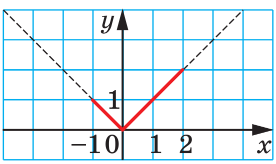


Рис. 24

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функцій $f(x) = x^2$ і $f(x) = \{x\}$ маємо, що $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ці функції не мають.

Функція $f(x) = \frac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 25);
- якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 26).

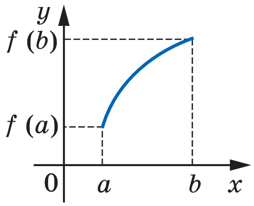


Рис. 25

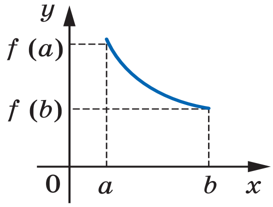


Рис. 26

ПРИКЛАД 4 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x + 2$ на відрізку $[-2; 1]$.

Розв'язання. Функції $y = x^3$ і $y = 3x + 2$ є зростаючими. За теоремою 6.2 зростаючою є і функція f. Отже, $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = -12$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(1) = 6$.

Вправи

100.° На рисунку 27 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Які з даних тверджень є правильними:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
5) функція набуває найменшого значення при $x = -2$?

101.° На рисунку 28 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення x, при яких $y < 0$;
3) проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

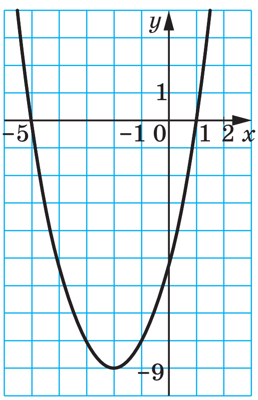


Рис. 27

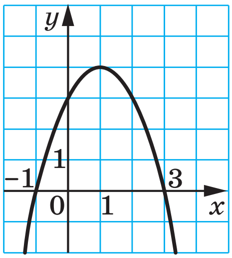


Рис. 28

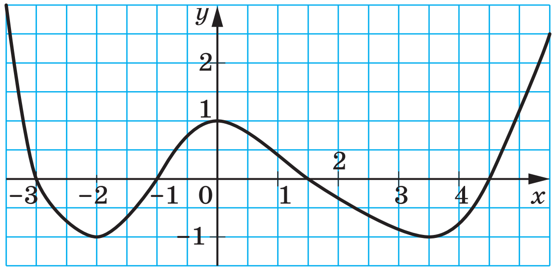


Рис. 29

102.° На рисунку 29 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
5) $\min\limits_{[-2;1]} f(x)$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x)$;
6) $\min\limits_{[-1;4]} f(x)$, $\max\limits_{[-1;4]} f(x)$;
7) $\min\limits_{(-2;0)} f(x)$, $\max\limits_{(-2;0)} f(x)$.

103.° На рисунку 30 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{[0;2]} f(x)$, $\max\limits_{[0;2]} f(x)$;
5) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
6) $\min\limits_{[-1;0)} f(x)$, $\max\limits_{[-1;0)} f(x)$.

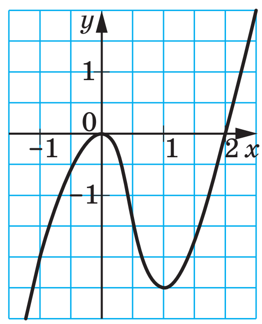


Рис. 30

104.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

105.° Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{4}{x}, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

106.° Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

107.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 9x - 4$;
2) $y = -4x + 10$;
3) $y = 12 - 3x$;
4) $y = -x$?

108.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-1}$;
2) $y=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$;
3) $y = x^3 - 4x$;
4) $y = x^2 + 1$;
5) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;
6) $y=x\sqrt{x-1}$;
7) $y = |x| - x$.

109.° Знайдіть нулі функції:

1) $y=\sqrt{x^2-4}$;
2) $y = -5$;
3) $y=\dfrac{x^2-25}{x+5}$;
4) $y = |x| + x$;
5) $y=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}$.

110.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = x^2 - 2x + 1$;
2) $y=\dfrac{9}{3-x}$;
3) $y=\sqrt{x-1}$;
4) $y = |x + 1|$.

111.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = -x^2 - 1$;
2) $y = x^2 + 4x + 4$;
3) $y=\sqrt{x}+2$;
4) $y = |x| - 1$;
5) $y = |x^2 - 4|$.

112.° Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y=\sqrt{x-1}$;
2) $y=\sqrt{2x+1}$.

113.° Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y=\sqrt{x-3}+2$;
2) $y=\sqrt{3x-1}-1$.

114.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$;
2) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$;
3) $y = -f(x)$;
4) $y = f(x) + 5$?

115.$^{\bullet}$ Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -3f(x)$?

116.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$, n — непарне, є зростаючою.

117.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = \frac{6}{3 - x}$ зростає на проміжку $(3; +\infty)$.

118.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = \frac{7}{x + 5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$.

119.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

120.$^{\bullet}$ Доведіть, що є зростаючою функція:

1) $y = x^5 + x$; 2) $y = x^4 + \sqrt{x}$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x}$.

121.$^{\bullet}$ Доведіть, що є спадною функція:

1) $y = -x^3 - x$; 2) $y = \sqrt{-x} - x$.

122.$^{\bullet}$ При якому найменшому цілому значенні m функція $y = 7mx + 6 - 20x$ є зростаючою?

123.$^{\bullet}$ При яких значеннях k функція $y = kx - 2k + 3 + 6x$ є спадною?

124.$^{\bullet}$ При яких значеннях b функція $y = 3x^2 - bx + 1$ зростає на множині $[3; +\infty)$?

125.$^{\bullet}$ При яких значеннях b функція $y = bx - 4x^2$ спадає на множині $[-1; +\infty)$?

126.$^{\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише додатних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

3) функція $y = \sqrt{f(x)}$ зростає на множині $\mathbb{R}$.

127.$^{\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише від'ємних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \frac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$.

128.$^{\bullet}$ Чи можна стверджувати, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на множині M, то функція $y = f(x) - g(x)$ теж зростає на множині M?

129.• Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ спадають на деякій множині M і набувають на цій множині від'ємних значень. Доведіть, що функція $y = f(x)\,g(x)$ зростає на множині M.

130.• Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій, добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.

131.• Знайдіть $\min\limits_M f(x)$ і $\max\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$.

132.• Знайдіть $\min\limits_M f(x)$ і $\max\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \mathbb{R}$;
2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $M = (0;\ +\infty)$.

133.• При яких значеннях c найбільше значення функції $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ дорівнює 2?

134.• При яких значеннях c найменше значення функції $y = 2x^2 - 12x + c$ дорівнює -3?

135.• Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;
2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

136.• Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

137.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^3 + x = -3$;
2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$.

138.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^7 + x^5 + x = 4$;
2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{2x+7} = 13$.

139.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$.

140.•• Розв'яжіть рівняння $x^2 + \sqrt{x} = \frac{12}{x} + 15$.

7. Парні і непарні функції

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.**

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають **симетричною відносно початку координат.**

З вищенаведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, область визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

Водночас у функції $f(x) = x^3 + x^2$ її область визначення $D(f) = \mathbb{R}$ є симетричною відносно початку координат. Проте ця функція не є ні парною, ні непарною. Дійсно,

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2; \quad -f(x) = -x^3 - x^2.$$

Існують деякі значення x, наприклад 0, при яких $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$, проте ці рівності виконуються не для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, при $x = 1$ маємо $f(x) = 2$, а $f(-x) = 0$.

Підкреслимо, що для парності або непарності функції f необхідно, але не достатньо, щоб її область визначення була симетричною відносно початку координат.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ і } x \neq 1\}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

Теорема 7.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

Доведення. Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка M_1 $(-a;\ b)$ також належить графіку функції f (рис. 31). ▲

Теорема 7.2. ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 32).

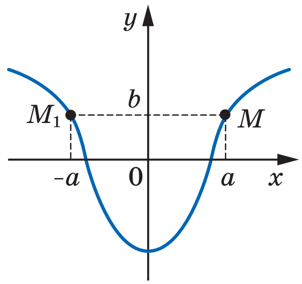


Рис. 31

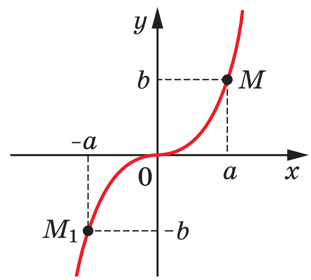


Рис. 32

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною. Можна показати, що інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

Вправи

141.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

142.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

143.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

144.° Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;
3) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;

7) $f(x)=\dfrac{|5x-2|+|5x+2|}{x^2-1}$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{(3x-1)^7}-\dfrac{1}{(3x+1)^7}$;

9) $f(x)=(x+2)|x-4|-(x-2)|x+4|$.

145.° Доведіть, що є непарною функція:

1) $g(x)=x^n$, де $n\in\mathbb{N}$ і n — непарне;

2) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$;

3) $g(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}$;

4) $g(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$;

5) $g(x)=\dfrac{|4x-1|-|4x+1|}{x^4-1}$;

6) $g(x)=\dfrac{3x+2}{x^2-x+1}+\dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

146.• Дослідіть на парність функцію:

1) $y=\dfrac{x}{x}$;

2) $y=\dfrac{x-1}{x-1}$;

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;

4) $y=\sqrt{x^2-1}$;

5) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$.

147.• На рисунку 33 зображено частину графіка функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-5;5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

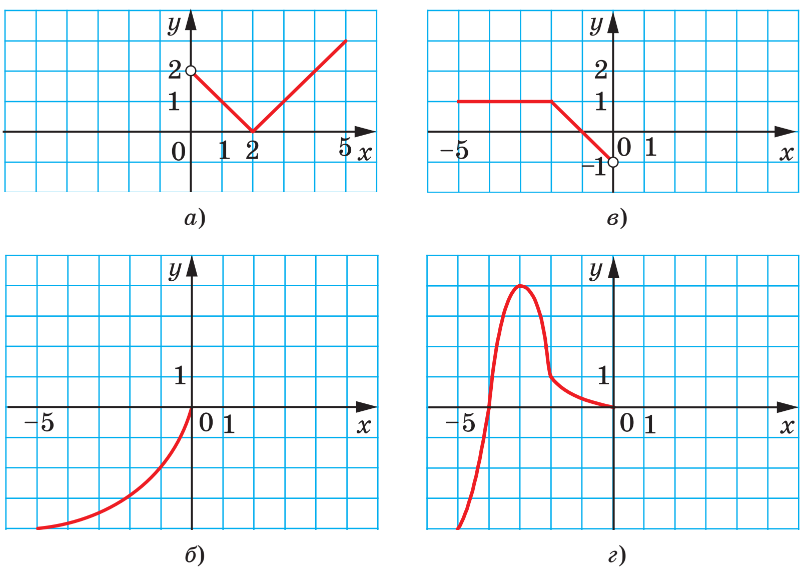


Рис. 33

148.$^{\bullet}$ Ламана $ABCD$, де A (0; 0), B (2; −2), C (3; 4), D (6; 1), є частиною графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку [−6; 6]. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

149.$^{\bullet}$ Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

150.$^{\bullet}$ Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = -0{,}5x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ і $f(x) = -\frac{4}{x}$ при $x > 2$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

151.$^{\bullet}$ Область визначення функції f симетрична відносно початку координат. Доведіть, що функція $g(x) = f(x) + f(-x)$ є парною, а функція $h(x) = f(x) - f(-x)$ є непарною.

152.$^{\bullet}$ Областю визначення парних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\, g(x)$.

153.$^{\bullet}$ Областю визначення парної функції f і непарної функції g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\, g(x)$.

154.$^{\bullet}$ Областю визначення непарних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:
1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\, g(x)$.

155.$^{\bullet}$ Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

156.$^{\bullet}$ Одна з функцій, f або g, є парною, інша — непарною. Відомо, що $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

157.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що область значень непарної функції симетрична відносно початку координат.

158.$^{\bullet\bullet}$ Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

159.$^{\bullet\bullet}$ Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

160.$^{\bullet\bullet}$ Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

161.$^{\bullet\bullet}$ Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

162.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $f(n) = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

163.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію $f(n) = \left(\sqrt{2}+1\right)^n - \left(\sqrt{2}-1\right)^n$, $D(f) = \mathbb{Z}$.

164.•• Парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty;\ 0]$.

165.•• Непарна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0;\ +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty;\ 0]$.

166.•• Функція f є парною і $\min\limits_{[1;3]} f(x)=2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x)=5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.

167.•• Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;5]} f(x)=1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x)=3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

8. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися за допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$. Нагадаємо правила, які дозволяють виконати такі побудови.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 34, 35 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = x^2 - 4$ і $y=\sqrt{x}+3$.

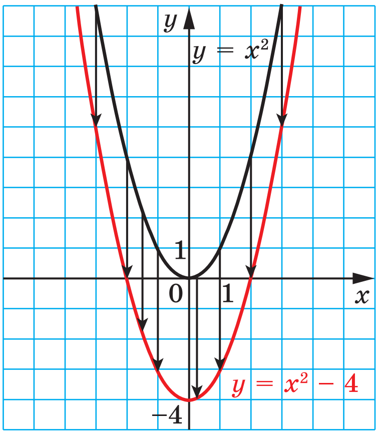


Рис. 34

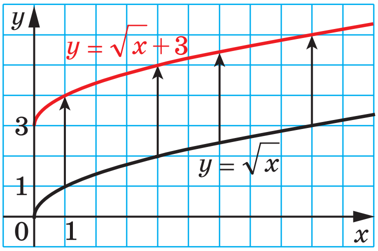


Рис. 35

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 36, 37 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = (x - 2)^2$ і $y = \sqrt{x+3}$.

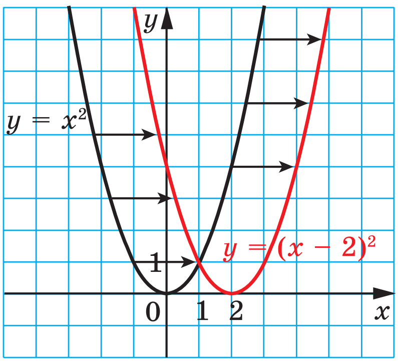


Рис. 36

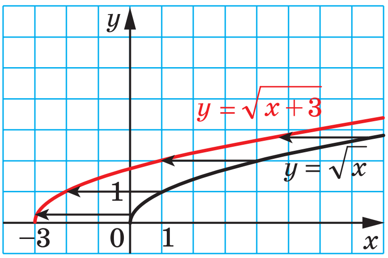


Рис. 37

Графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k.

На рисунках 38, 39, 40 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

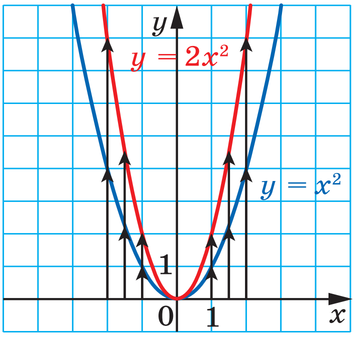


Рис. 38

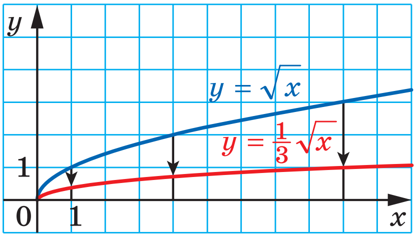


Рис. 39

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f\ (kx)$, якщо відомо графік функції $y = f\ (x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f\ (x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ належить графіку функції $y = f\ (kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо:

$$f\ (kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f\ (x_0) = y_0.$$

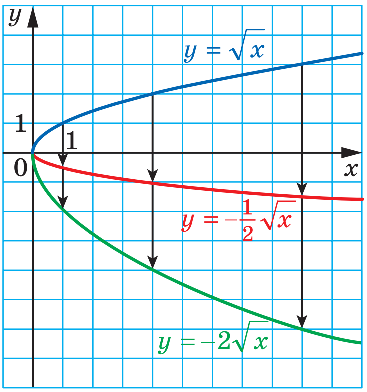


Рис. 40

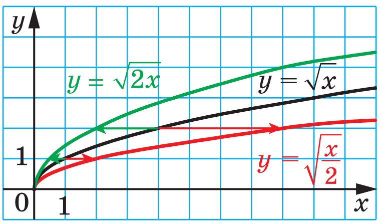


Рис. 41

Отже, кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k};\ y_0\right)$ графіка функції $y = f\ (kx)$. Аналогічно можна показати (зробіть це самостійно), що кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f\ (kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f\ (x)$. Тобто між точками графіків функцій $y = f\ (x)$ і $y = f\ (kx)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тому ***графік функції $y = f\ (kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f\ (x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k.***

На рисунку 41 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорять, що графік функції $y = f\ (kx)$ отримано з графіка функції $y = f\ (x)$ у результаті **стиску в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Зазначимо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Зрозуміло, що між точками графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку, симетричну їй відносно осі ординат, тобто відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають **симетрією відносно осі ординат.**

На рисунку 42 показано, як за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудовано графік функції $y=\sqrt{-x}$.

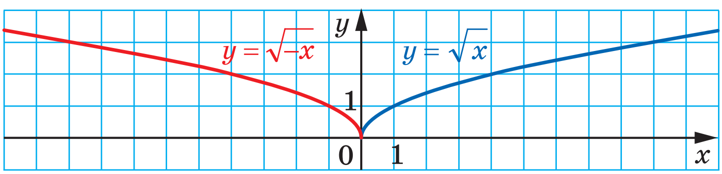


Рис. 42

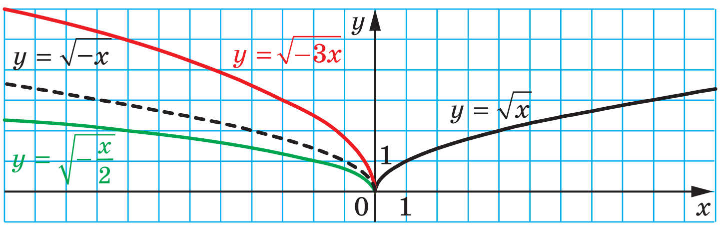


Рис. 43

З огляду на сказане стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 43 показано, як можна за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y=\sqrt{-3x}$ і $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 44):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{управо на 2 од.}}y=\sqrt{x-2}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}y=\sqrt{3x-2}$$

Якщо задану функцію подати у вигляді $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести і за такою схемою (рис. 45):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}y=\sqrt{3x}\xrightarrow{\text{управо на }\frac{2}{3}\text{ од.}}y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

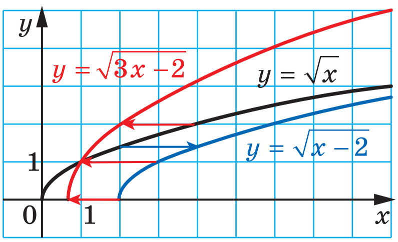


Рис. 44

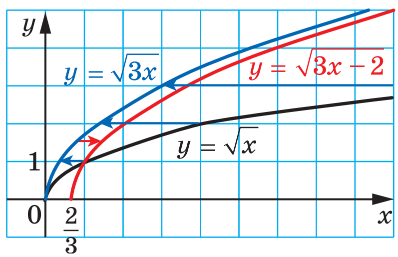


Рис. 45

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 46):

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}}y=\sqrt{x+1}\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}}y=\sqrt{-x+1}\xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}}y=\sqrt{-3x+1}$$

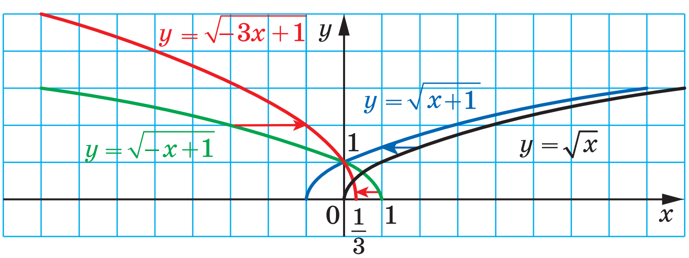


Рис. 46

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад, так (рис. 47, 48):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

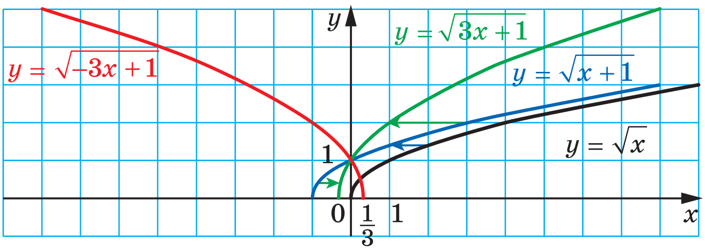


Рис. 47

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{1}{3} \text{ од.}} y=\sqrt{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

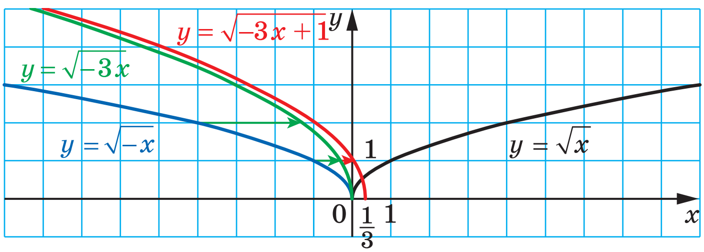


Рис. 48

Вправи

168.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:

1) на 5 одиниць угору;
2) на 8 одиниць управо;
3) на 10 одиниць униз;
4) на 6 одиниць уліво;
5) на 3 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

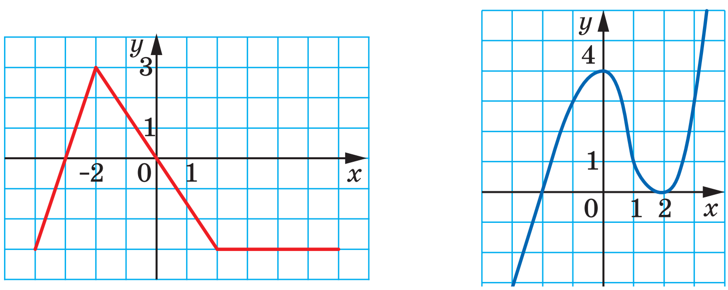
169.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$;
2) $y = x^2 - 4$;
3) $y = (x + 4)^2$;
4) $y = (x - 4)^2$?

170.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$;
2) $y = x^2 - 5$;
3) $y = (x + 5)^2$;
4) $y = (x - 5)^2$?

171.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x - 8}$:
1) на 8 одиниць угору;
2) на 8 одиниць униз;
3) на 8 одиниць управо;
4) на 8 одиниць уліво?

172.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x + 3}$:
1) на 3 одиниці вгору;
2) на 3 одиниці вниз;
3) на 3 одиниці вправо;
4) на 3 одиниці вліво?

173.° На рисунку 49 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:
1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



а) *б)*

Рис. 49

174.° На рисунку 50 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:
1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

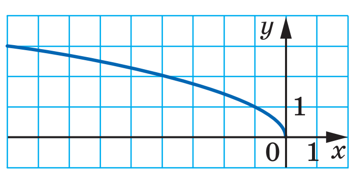


Рис. 50

175.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

176.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

177.• Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x-2}$;
3) $y = -\frac{6}{x+4} - 2$.

178.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x-4}$;
3) $y = \sqrt{x-1} + 3$.

179.• Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x+1}$;
3) $y = \frac{2}{x-3} + 6$.

180.• Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

181.• Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$;
2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$;
3) $y = \frac{-2x}{x-1}$.

182.• Задайте дану функцію формулою виду $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y=\dfrac{k}{x}$:

1) $y=\dfrac{4x+14}{x+1}$; 2) $y=\dfrac{7-x}{x-2}$.

183.• На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -3f(x)$.

184.• На рисунку 52 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2g(x)$; 2) $y=-\dfrac{1}{4}g(x)$.

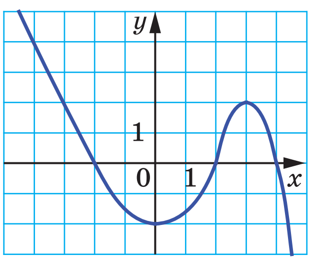


Рис. 51

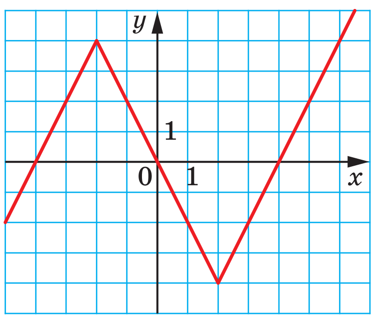


Рис. 52

185.• Побудуйте графік функції:

1) $y=0,5\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x-2}$.

186.• Побудуйте графік функції:

1) $y=3\sqrt{x}$; 2) $y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

187.• На рисунку 51 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y=f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

188.• На рисунку 52 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y=g\left(\dfrac{x}{2}\right)$; 2) $y = g(4x)$.

189.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$; 2) $y=\sqrt{-2x}$.

190.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x}$; 3) $y=\sqrt{-\frac{x}{3}}$.

2) $y=\sqrt{\frac{x}{4}}$;

191.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x+1=\sqrt{x+7}$; 3) $\frac{2}{x-2}=x-3$.

2) $2\sqrt{x}=3-x$;

192.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{3-x}=0,5x$; 2) $\sqrt{x}+2=\frac{12}{x-1}$.

193.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2x-1}$; 3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+2}$.

2) $y=\sqrt{3-4x}$;

194.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\sqrt{5-2x}$.

9. Як побудувати графіки функцій $y=f(|x|)$ і $y=|f(x)|$, якщо відомо графік функції $y=f(x)$

Скориставшись означенням модуля, запишемо:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x\geqslant 0,\\ f(-x), & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y=f(|x|)$ при $x\geqslant 0$ збігається з графіком функції $y=f(x)$, а при $x<0$ — з графіком функції $y=f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

Фактично це означає, що слід побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі ординат.

На рисунку 53 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x| - 2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами, тобто частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче від осі абсцис, відобразити симетрично відносно осі абсцис.

На рисунку 54 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

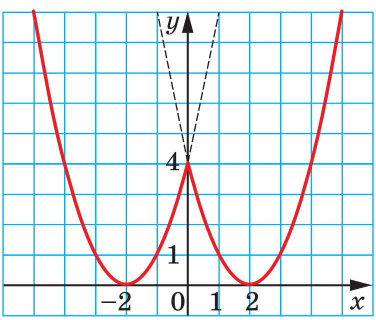


Рис. 53

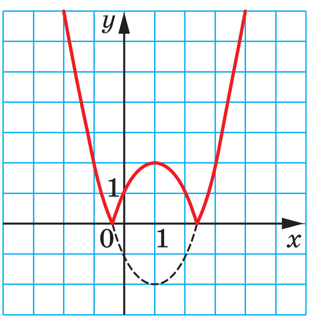
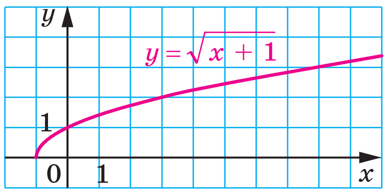


Рис. 54

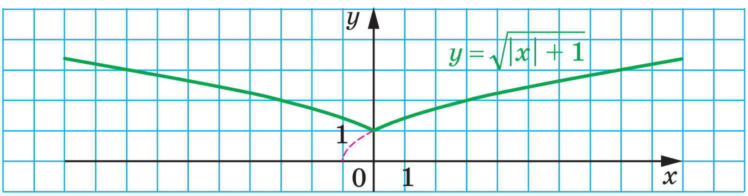
ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$.

Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми (рис. 55):

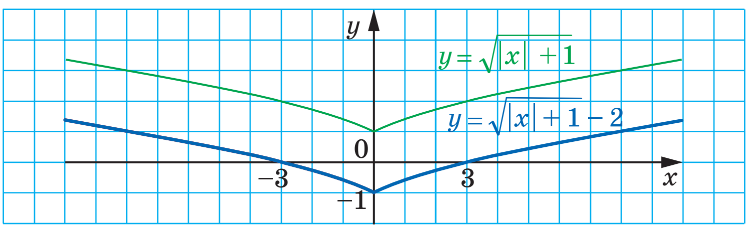
$$y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{|x|+1} \xrightarrow{\text{униз на 2 од.}} y=\sqrt{|x|+1}-2 \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$



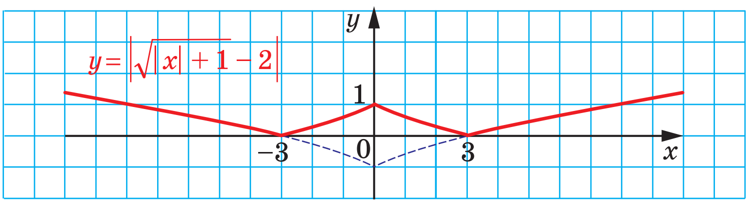
а)



б)



в)



г)

Рис. 55

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою (рис. 56):

$$y = \sqrt{|x|} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y = \sqrt{|x+1|} \xrightarrow{\text{униз на 1 од.}} y = \sqrt{|x+1|} - 1 \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}} y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

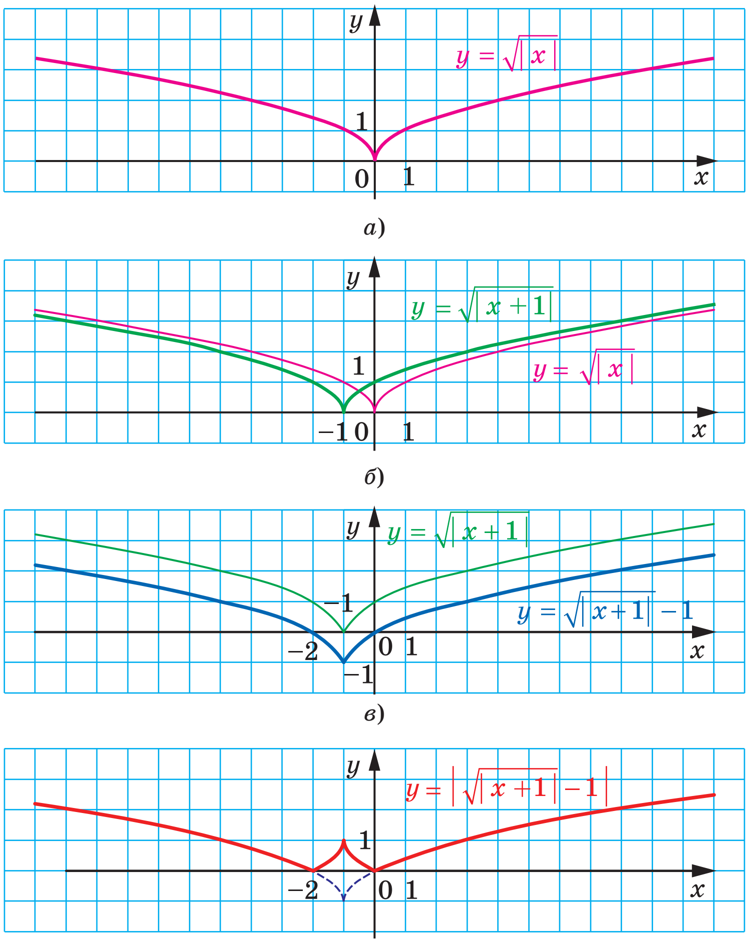


Рис. 56

Вправи

195.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 57, побудуйте графік функції:

1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

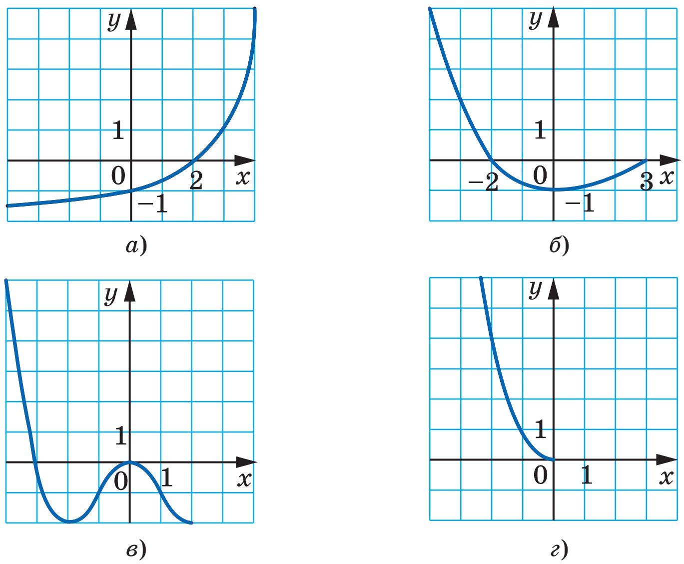


Рис. 57

196.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 58, побудуйте графік функції:
1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

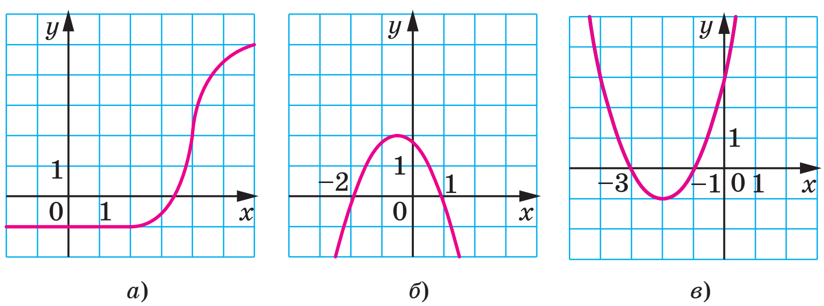
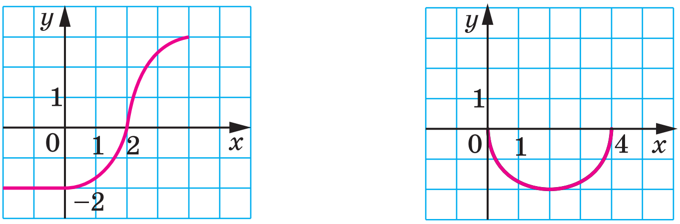


Рис. 58

197.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 59, побудуйте графік функції $y = |f(|x|)|$.



а) *б*)

Рис. 59

198.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{|x|}$; 2) $y = -\frac{6}{|x|}$.

199.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{|x|}$; 2) $y = -\frac{1}{|x|}$.

200.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 3) $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$; 5) $y = \left|\frac{x-4}{x+1}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 2|$; 4) $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$;

201.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$; 5) $y = \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 4) $y = \left|\frac{4}{x-2}\right|$;

202.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = [-3; 7]$ і $E(f) = [-6; 5]$. Знайдіть:

1) область визначення функції $y = f(|x|)$;

2) область визначення та область значень функції $y = |f(x)|$.

203.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, функція має два нулі −3 і 2, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$ і $f(x) < 0$ при $x \in (-3; 2)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

204.•• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, функція має два нулі −1 і 3, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ і $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 3)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

205.•• Використовуючи графік функції $y = f\ (x)$, зображений на рисунку 60, побудуйте графік функції: 1) $y = f\ (|x| - 1)$; 2) $y = f\ (|x - 1|)$.

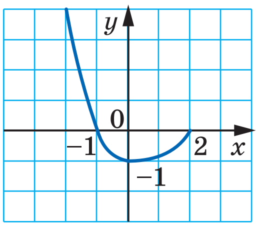


Рис. 60

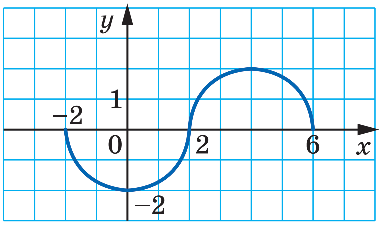


Рис. 61

206.•• Використовуючи графік функції $y = f\ (x)$, зображений на рисунку 61, побудуйте графік функції: 1) $y = f\ (|x| + 2)$; 2) $y = f\ (|x + 2|)$.

207.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y=\sqrt{|x|+2}$; 3) $y=\dfrac{1}{|x|-3}$; 4) $y=\sqrt{1-|x|}$.

208.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| + 2)^2$; 2) $y=\sqrt{|x|-3}$; 3) $y=\dfrac{1}{|x|-4}$; 4) $y=\sqrt{2-|x|}$.

209.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{|x+2|}$;
2) $y = (|x - 2| - 1)^2$;
3) $y=\sqrt{|x-1|+2}$;
4) $y=\dfrac{1}{|x+1|-3}$.

210.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{|x-3|}$;
2) $y = (|x + 1| + 2)^2$;
3) $y=\sqrt{|x-2|-3}$;
4) $y=\dfrac{1}{|x-1|-4}$.

211.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2|x|-1}$; 2) $y=\sqrt{1-3|x|}$; 3) $y=\sqrt{|2x-1|}$.

212.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3|x|+1}$; 2) $y=\sqrt{|3x+1|}$.

213.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\dfrac{4}{|x|}-2\right|$; 2) $y=\left|\dfrac{4}{|x|-2}\right|$; 3) $y = |1 - |1 - |x|||$.

214.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = ||x| - 4|$;
2) $y = |2|x| - 4|$;
3) $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

215.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|x - 1|} - 1\right|$;
3) $y = \left|\frac{1}{|x| - 2} - 1\right|$;
4) $y = \left|\frac{1}{|x - 2|} - 1\right|$;
5) $y = \left|\frac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$.

216.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$;
2) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$;
3) $y = \left|\frac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

10. Обернена функція

На рисунках 62, 63 зображено графіки функцій f і g.

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 63 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

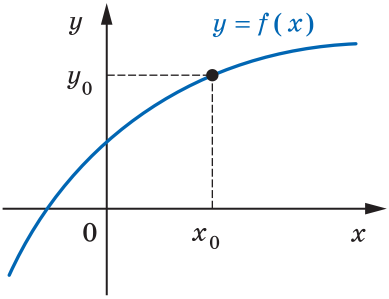


Рис. 62

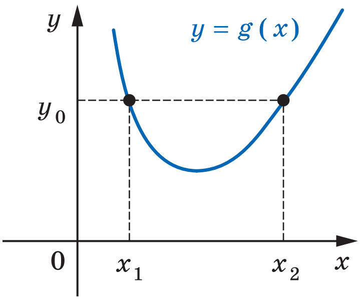


Рис. 63

Означення. **Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція f (рис. 62) є оборотною. Функція g (рис. 63) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 64).

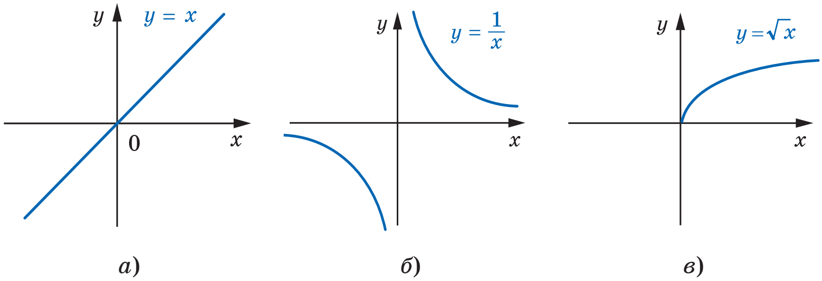


Рис. 64

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 10.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

Зазначимо, що обернена теорема не є правильною, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною).

На рисунку 65 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

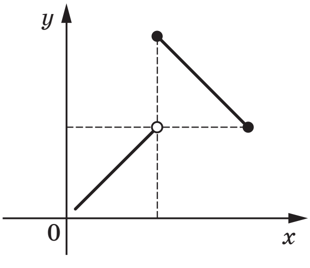


Рис. 65

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g(\sqrt{7}) = 7$.

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими.**

Означення. **Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:**
1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;
2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x)=\frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0)=\frac{y_0+1}{2}=\frac{2x_0-1+1}{2}=x_0$.

Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $f(x) = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|=x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y=\sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x)=\sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0)=$ $=\sqrt{y_0}=\sqrt{x_0^2}=|x_0|=x_0$.

Теорема 10.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

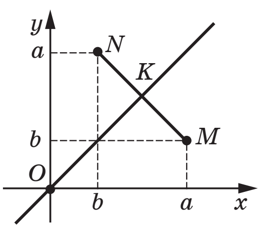


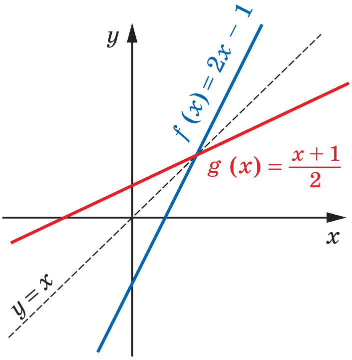
Рис. 66

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

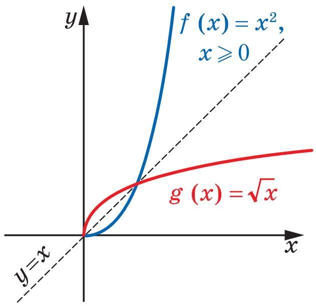
Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 66): $ON=\sqrt{a^2+b^2}$, $OM=\sqrt{a^2+b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 67).



а)



б)

Рис. 67

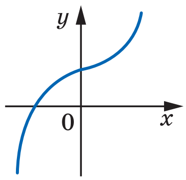
Теорема 10.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

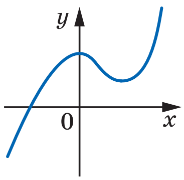
Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲

Вправи

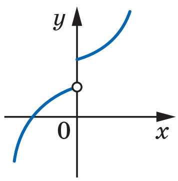
217.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 68, є оборотними?



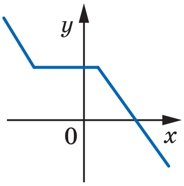
а)



б)



в)



г)

Рис. 68

218.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 69, є оборотними?

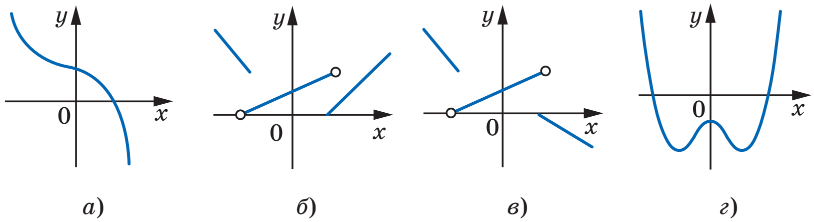


Рис. 69

219.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |\,x\,|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

220.• Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

221.• Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = \frac{x}{1-x}$;

3) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

222.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

223.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

224.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$;

2) $y = \sqrt{2x-1}$;

3) $y = 2\sqrt{x} - 1$;

4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

5) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

6) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{якщо } x \geqslant 3, \\ 2x-5, & \text{якщо } x < 3. \end{cases}$

225.$^\bullet$ Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y=\dfrac{x+2}{x}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

3) $y=\sqrt{x^2-4}$, $D\ (y)=[2;\ +\infty)$;

4) $y=\begin{cases}2-x^2, \text{ якщо } x\geqslant 1,\\ 2-x, \text{ якщо } x<1.\end{cases}$

226.$^\bullet$ Знайдіть функцію $y = g\ (x)$, обернену до функції $y=\dfrac{2x}{3x-1}$. Чи буде функція g оборотною? Яка функція буде оберненою до $y = g\ (x)$?

227.$^\bullet$ Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = -0{,}5x + 2$;

2) $y=\sqrt{x+1}$;

3) $y=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\geqslant 0,\\ 2x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

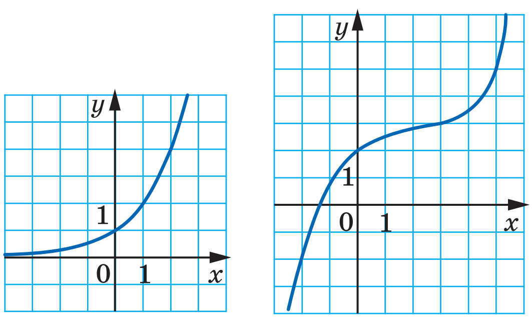
228.$^\bullet$ Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$;

2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$;

3) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, \text{ якщо } x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$

229.$^\bullet$ Користуючись графіком функції $y = f\ (x)$, зображеним на рисунку 70, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а) *б*)

Рис. 70

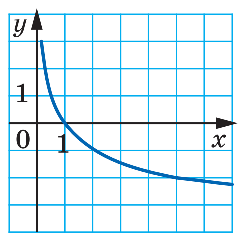


Рис. 71

230.$^\bullet$ Користуючись графіком функції $y = f\ (x)$, зображеним на рисунку 71, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

231.$^\bullet$ Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

232.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.

1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення c?

233.•• Нехай g — функція, обернена до функції

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}.$$

1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

234.•• Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, теж є непарною.

235.* При яких значеннях k і b функція $y = kx + b$, де $k \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

236.* При яких значеннях a і b функція $y = \frac{1}{ax+b}$, де $a \neq 0$, буде збігатися з оберненою до неї функцією?

Львівська математична школа

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. З цього року ви починаєте знайомство з елементами аналізу; вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їх властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. при вивченні певних класів функцій з'явилася нова математична дисципліна, вершина сучасної математики — «функціональний аналіз». Важливу, фактично головну роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30-х рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз та ін. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як «львівська математична школа». Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Вручення гусака

Сьогодні С. Банаха в усьому світі з цілковитою підставою вважають засновником функціонального аналізу. Один з перших у світі підручників з цієї дисципліни написано самим С. Банахом. Багато результатів С. Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені ним множини одержали назву «простори Банаха» і зараз входять до необхідного мінімуму знань кожного студента-математика, фізика, кібернетика тощо.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина С. Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували коли кухлі пива, коли вечерю в ресторані. Так, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, поставлені в «Шкотській книзі», вважають настільки важливими і складними, що кожний, кому вдасться розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

11. Рівносильні рівняння. Рівняння–наслідок. Рівносильні нерівності

Нехай задано дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ і поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина дійсних чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $\{x \mid x \neq -2\}$;
- областю визначення рівняння $\frac{x+3}{|x|-x}=0$ є множина $\{x \mid x < 0\}$.

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина дійсних чисел.

Зрозуміло, що кожний корінь рівняння обов'язково належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 72). Наприклад, не розв'язуючи рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$, можна сміливо стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Рис. 72

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Означення. **Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають *рівносильними*, якщо множини їх коренів рівні.**

З означення випливає, що коли потрібно довести рівносильність двох рівнянь, то треба довести, що кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння і, навпаки, кожний корінь другого рівняння є коренем першого рівняння.

Наведемо приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \text{ і } 2x = 0;$$

$$x^2 = 1 \text{ і } (x-1)(x+1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \text{ і } (x^2+1)(x-1) = 0;$$

$$(x-1)^{100} = 0 \text{ і } (x-1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то такі два рівняння називають **рівносильними на множині M**.

Наприклад, рівняння $x^2 - 1 = 0$ і $x + 1 = 0$ є рівносильними на множині $(-\infty; 0)$.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 11.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Доведемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

і

$$f(x) + c = g(x) + c \quad (c \text{ — деяке число}) \qquad (2)$$

рівносильні.

Нехай деяке число a є коренем рівняння (1). Тоді справджується числова рівність $f(a) = g(a)$. Отже, правильною буде й така числова рівність: $f(a) + c = g(a) + c$. Це означає, що число a є коренем рівняння (2). Таким чином, кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2).

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Теорема 11.2. ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 11.3. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення теорем 11.2 і 11.3 аналогічні доведенню теореми 11.1. Проведіть доведення самостійно.

Зауваження. З теорем 11.1 і 11.3 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати один і той самий вираз зі змінною або обидві частини помножити на один і той самий вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2 = 25$, яке не рівносильне даному.

Означення. Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$.

Також говорять, що з рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2 = 25$.

На рисунку 73 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то, наприклад, наслідком рівняння $x^2 = -5$ є будь-яке рівняння з однією змінною x.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком іншого.

Рис. 73

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Наприклад, рівняння $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0$ є наслідком рівняння $2x - 1 = 0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а рівняння $2x - 1 = 0$ має один корінь $\frac{1}{2}$. У цьому випадку корінь -2 є стороннім коренем рівняння $2x - 1 = 0$.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному і корені якого легко знайти.

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильність не було дотримано і відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2 - 4}{x+2} = 0$. Прирівнявши чисельник дробу до нуля, отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, коренями якого є числа -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє задане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2 - 4 = 0$, корені якого було перевірено.

При розв'язуванні рівняння важливо розуміти, на якому етапі було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$ було розширено область визначення даного рівняння. Інакше кажучи, зняття обмеження $x \neq -2$ якраз і призвело до появи стороннього кореня -2.

Зазначимо, що розширення області визначення рівняння не завжди призводить до появи сторонніх коренів. Наприклад, перехід від рівняння $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$ є рівносильним, хоча при цьому розширюється область визначення даного рівняння.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому розв'язування рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ зводиться до розв'язування рівняння $f(x) = 0$ і перевірки умови $g(x) \neq 0$. Іншими словами, множина коренів рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ дорівнює перетину множин $\{x \mid f(x) = 0\}$ і $\{x \mid g(x) \neq 0\}$. У таких випадках кажуть, що рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

Наприклад, рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+2\neq 0. \end{cases}$$

Означення. Нерівності називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності, використовуючи такі правила.

- Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають *наслідком* першої нерівності.

Наприклад, нерівність $x > 2$ є наслідком нерівності $x > 5$ (рис. 74).

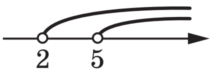


Рис. 74

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x| < 0$.

Вправи

237.° Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;
7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;
8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;

9) $\sqrt{x-2}=1$ і $x^2 - 6x + 9 = 0$;

10) $\frac{x}{x}=1$ і $x = x$;

11) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;

12) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;

13) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ і $x - 1 = 0$;

14) $\frac{x^2-9}{x+2}=0$ і $x^2 - 9 = 0$;

15) $\sqrt{x^2-3x+1}=3$ і $|x - 4| = -2$?

238.° Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$;

2) $x^2 = x$ і $x = 1$;

3) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x+1)=0$ і $4x^2 - 1 = 0$;

4) $\sqrt{x-1}=2$ і $x^2 - 10x + 25 = 0$;

5) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1}=0$;

6) $\frac{x+1}{x+1}=1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1}=1$;

7) $\frac{x-2}{x-2}=0$ і $2x^2 + 3 = 0$;

8) $x^2 + 4x + 4 = 0$ і $\frac{x+2}{x-1}=0$;

9) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$ і $x + 3 = 0$;

10) $\frac{x+1}{x+1}=0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1}=0$;

11) $\sqrt{x-4}=-4$ і $x^2 + x + 1 = 0$?

239.° Складіть рівняння, яке рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$;

2) $|x| = 1$;

3) $x + 6 = x - 2$;

4) $\frac{x-1}{x-1}=0$;

5) $\frac{x-1}{x-1}=1$.

240.° Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $4x - 8 = x + 3$ і $4x - x = 8 + 3$;

2) $x^2 - 1 = 3$ і $x^2 + 5 = 9$;

3) $\frac{3x-5}{2} - \frac{x}{6} = 1$ і $9x - 15 - x = 6$;

4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ і $2x + 1 = 3$.

241.° Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному:

1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;

2) у рівнянні $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ різницю $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;

3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ скоротити дріб;

4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x;

5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;

6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x} = 2$ помножити на x;

7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

242.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;

2) $\frac{x}{x} = 1$ і $0x = 0$;

3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;

4) $|x| = 1$ і $x^3 = 1$;

5) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;

6) $x^2 = 4$ і $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;

7) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x^2 - 1 = 0$;

8) $x^2 - 1 = 0$ і $x^2 + \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x}$?

243.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $\frac{x^2}{x} = 1$ і $x^2 = x$;

2) $x^2 + 1 = 1$ і $x(x - 1) = 0$;

3) $\frac{x^2}{x+8} = \frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;

4) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$?

244.° Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;

2) має два корені;

3) має безліч коренів;

4) не має коренів.

245.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x + 3 > 6$ і $-4x < -12$;
2) $(x + 2)^2 (x + 1) < 0$ і $x + 1 < 0$;
3) $(x + 2)^2 (x + 1) \leqslant 0$ і $x + 1 \leqslant 0$;
4) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$;
5) $x^2 \geqslant x$ і $x \geqslant 1$;
6) $(x + 4)^2 < 0$ і $|x - 2| < 0$;
7) $(x - 1)^2 > 0$ і $|x - 1| > 0$;
8) $|x| \leqslant 0$ і $x^2 \leqslant 0$;
9) $(x - 2)^2 \leqslant 0$ і $(x - 1)^2 \leqslant 0$?

246.° Чи рівносильні нерівності:

1) $(x - 3)^2 (x + 4) \leqslant 0$ і $x + 4 \leqslant 0$;
2) $(x - 3)^2 (x + 4) < 0$ і $x + 4 < 0$;
3) $\frac{x-2}{x-4} > 0$ і $x - 2 > 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ і $x^4 \leqslant 0$?

247.• Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x| + 3) f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;
2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;
3) рівняння $(x + 1) f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;
4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;
5) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння $(x + 1) f(x) = (x + 1) g(x)$?

248.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x < -4$ і $x < 1$;
2) $x \geqslant 5$ і $x > 5$;
3) $x^2 < 0$ і $x < 0$;
4) $\sqrt{x} > -1$ і $|x| \geqslant 0$;
5) $|x| \geqslant x$ і $x^2 + x + 2 > 0$?

249.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:

1) $x > -2$ і $x > 1$;
2) $x^2 - 4 > 0$ і $x - 2 > 0$;
3) $x^2 \geqslant 0$ і $x > 0$?

12. Метод інтервалів

На рисунку 75 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання негативна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 76, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in (x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

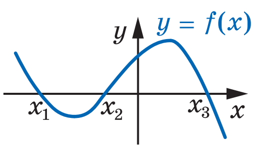


Рис. 75

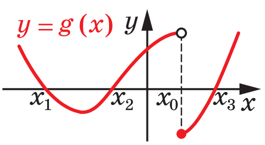


Рис. 76

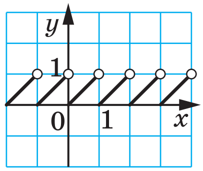


Рис. 77

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або, як ще прийнято говорити, **неперервна на $D(f)$**, а функція g **у точці $x_0 \in D(g)$ має розрив.**

Так, функція $y = \{x\}$ має розрив у кожній точці x такій, що $x \in \mathbb{Z}$. При цьому, наприклад, у кожній точці проміжку $(0; 1)$ ця функція є неперервною (рис. 77).

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з цим поняттям ви ознайомитеся в 11 класі. Там же буде доведено таку наочно очевидну теорему:

Теорема 12.1. ***Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.***

Ілюстрацією до цієї теореми слугує графік функції, зображений на рисунку 75.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Звернемося знову до рисунку 75.

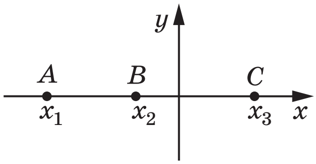


Рис. 78

Уявімо собі, що з цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок A $(x_1;\ 0)$, B $(x_2;\ 0)$, C $(x_3;\ 0)$ (рис. 78). Очевидно, що кожний з проміжків $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ x_3)$, $(x_3;\ +\infty)$ не містить нулів функції f.

Тоді, пам'ятаючи, що функція f неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$, можна стверджувати: указані проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на цих проміжках. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty;\ x_1)$ і $f(a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty;\ x_1)$ виконується нерівність $f(x) > 0$. Аналогічно можна «взяти пробу» з кожного проміжку знакосталості.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Справедливою є така теорема, яку буде доведено в 11 класі.

Теорема 12.2. ***Функція*** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ***де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3) \times$ $\times (x - 1)(x - 2)$, яка неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 79).

За допомогою «пробних точок» установимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$3 \in (2;\ +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2;\ +\infty)$;

$\dfrac{3}{2} \in (1;\ 2)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1;\ 2)$;

$0 \in (-3;\ 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3;\ 1)$;

$-4 \in (-\infty;\ -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty;\ -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 80.

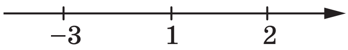


Рис. 79

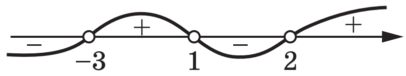


Рис. 80

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3;\ 1) \cup (2;\ +\infty)$.

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей процес дослідження знака функції можна проводити усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 80.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції $f(x) = (x+1)(3-x)\times$ $\times(x-2)^2$ на координатній прямій (рис. 81). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

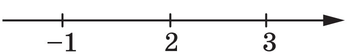


Рис. 81

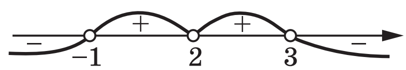


Рис. 82

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 82.

Відповідь: $(-1;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції

$$f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$$

є множина $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2};\ 4\right), (4;\ +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на проміжки знакосталості $(-\infty;\ -2)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 83.

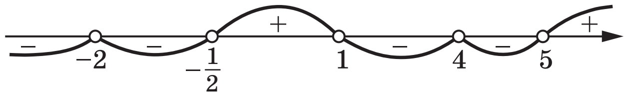


Рис. 83

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ -\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ 4) \cup (4;\ 5)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)}<0$; $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0$.

Областю визначення функції $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$, то ці проміжки є для неї проміжками знакосталості.

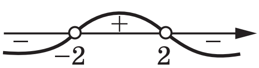


Рис. 84

На рисунку 84 показано результат дослідження знака функції f.

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 4x + 8$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо $x^2 - 4x + 8 > 0$. Тому нерівність $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0$ рівносильна такій: $(2 - x)(2 + x) < 0$. Далі слід звернутися до рисунка 84.

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати і нестрогі нерівності $f(x) \geqslant 0$ або $f(x) \leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або відповідно $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3}\geqslant 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику і знаменнику дробу, розкладати на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$

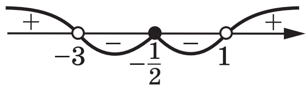


Рис. 85

Установлюємо (рис. 85), що множина $(-\infty;\ -3) \cup (1;\ +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$.

Рівняння $\dfrac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ має єдиний корінь $x = -\dfrac{1}{2}$.

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty;\ -3) \cup (1;\ +\infty) \cup \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

Розв'язання. Маємо: $(x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = (x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)}$. Легко встановити (рис. 86), що $D(f) = (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$.

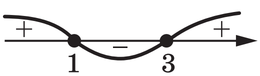


Рис. 86

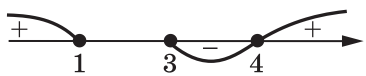


Рис. 87

Множина коренів рівняння $f(x) = 0$ має вигляд $\{1;\ 3;\ 4\}$.

Розв'яжемо нерівність $f(x) > 0$. Нулі функції f розбивають її область визначення на такі проміжки знакосталості: $(-\infty;\ 1)$, $(3;\ 4)$, $(4;\ +\infty)$.

Установлюємо (рис. 87), що множина $(-\infty;\ 1) \cup (4;\ +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$. Об'єднавши множини розв'язків рівняння $f(x) = 0$ і нерівності $f(x) > 0$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty) \cup \{3\}$.

Вправи

250.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;
4) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
5) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4) > 0$;
6) $(x+6)(x-9)(4-x)(3x+2) < 0$.

251.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4)<0$;
2) $(3x+2)(x-5)(4x-1)>0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x)<0$;
4) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5)>0$.

252.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2)<0$;
2) $|x-4|(x+1)(x-3)>0$;
3) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6)<0$;
4) $(1-3x)^3(x+2)^2(x+4)^5(x-3)>0$.

253.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x+1)(x-4)>0$;
2) $(3-x)^3|x+2|(x-1)(2x-5)<0$;
3) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2>0$.

254.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4)<0$;
2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1)>0$;
3) $(2x+1)^2(x^2-4x+3)>0$;
4) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1)<0$;
5) $3x^3+2x^2-x<0$;
6) $x^3-6x+5>0$;
7) $x^3-2x^2-x+2>0$;
8) $(2x^2+5x-3)(2x^2-5x+2)>0$.

255.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1)<0$;
2) $|x-3|(3x+2)^3(3x^2-5x+6)>0$;
3) $4x^3-25x<0$;
4) $(x^2-4)(3x^2+7x+2)>0$.

256.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x+3}{x-1}>0$;
2) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-4}<0$;
3) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)}<0$.

257.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x}{x+2}<0$;
2) $\dfrac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)}>0$.

258.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)}>0$;
2) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}<0$;
3) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}>0$;
4) $\dfrac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{x+7}<0$;
5) $\dfrac{(x^3-8)(x^2-6x-7)}{(3x-2x^2-4)(3x^2-10x+3)}<0$;
6) $\dfrac{x^2+5x-6}{(x+2)(1-3x)}<0$.

259.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5}>0$;
2) $\dfrac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2}>0$.

260.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x}<1$;
2) $\frac{x}{x+3}>\frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$;
4) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1$;
5) $\frac{x-1}{x}-\frac{x+1}{x-1}<2$;
6) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7}<\frac{1}{x-3}$;
7) $\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{9}{x-3}<-1$;
8) $\frac{2}{3x+7}<\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$.

261.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{x-4}<\frac{1}{3}$;
2) $\frac{5x+8}{4-x}<2$;
3) $\frac{2}{x+3}>\frac{1}{x-1}$;
4) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)}<\frac{1}{x-1}$;
5) $\frac{2x+3}{x^2+x-12}<\frac{1}{2}$;
6) $\frac{x+7}{x-5}+\frac{3x+1}{2}>0$;
7) $\frac{2x}{x^2-9}<\frac{1}{x+2}$;
8) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x}$.

262.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0$;
2) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0$;
3) $\frac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12}\geqslant 0$;
4) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2}\geqslant 0$;
5) $\frac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2}\leqslant 0$;
6) $\frac{5x+4}{x+3}-\frac{x+2}{1-x}\leqslant 0$.

263.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x+2)^2(x-5)\geqslant 0$;
2) $(x^2-4)(x^2+x-2)\leqslant 0$;
3) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2}\leqslant 0$;
4) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|}\geqslant 0$;
5) $\frac{20}{x^2-7x+12}+\frac{10}{x-4}+1\geqslant 0$.

264.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0$;
2) $\frac{x^3-3x+2}{6-x}\leqslant 0$;
3) $\frac{|x|(x+1)^3}{|x-4|^3(x+3)}\leqslant 0$.

265.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)\leqslant 0$;
2) $\frac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)}\leqslant 0$;
3) $\frac{|x-5|^5|x-2|}{(1-x)^3(x+4)}\leqslant 0$.

266.•• Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5)\leqslant 0$.

267.•• Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|(x^2-x-12)\leqslant 0$.

268.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}>0$;
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\geqslant 0$;
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}<0$;
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\leqslant 0$;
5) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0$;
6) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0$;
7) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$;
8) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0$;
9) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0$;
10) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0$;
11) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0$;
12) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$.

269.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$;
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0$;
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0$;
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0$;
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$;
9) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}>0$;
10) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}<0$;
11) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant 0$;
12) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0$.

13. Рівняння і нерівності з параметрами

Розв'яжемо такі лінійні рівняння:

1) $3x = 1$. Відповідь: $x=\frac{1}{3}$.

2) $(-6)\cdot x = 1$. Відповідь: $x=-\frac{1}{6}$.

3) $0x = 1$. Відповідь: розв'язків немає.

Якщо коефіцієнт при змінній x позначити через a, то всі розглянуті рівняння можна записати у вигляді одного загального рівняння $ax = 1$, де буква a відіграє роль відомого числа, а буква x — роль змінної рівняння. Кажуть, що a є **параметром**, а рівняння $ax = 1$ (фактично цілий набір однотипних рівнянь) називають **рівнянням з параметром**.