

Є. П. Нелін

# АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

*Рекомендовано*

*Міністерством освіти і науки України*

Харків  
«Гімназія»  
2010

УДК 373:[512+517]  
ББК 22.12я721+2.161я721  
Н49

**Видано за рахунок державних коштів  
Продаж заборонено**

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
(наказ від 03.03.2010 № 177)*

**Наукову експертизу проводив**  
*Інститут математики Національної академії наук України*  
**Психолого-педагогічну експертизу проводив**  
*Інститут педагогіки*  
*Національної академії педагогічних наук України*

*Експерти, які здійснювали експертизу:*

- П. Я. Кіндюх*, гімназія м. Ужгорода, директор, заслужений вчитель України,  
вчитель-методист
- Л. А. Бойко*, Монастирищенська спеціалізована школа І–ІІІ ст. № 5  
Монастирищенської районної ради Черкаської обл., вчитель,  
вчитель-методист
- І. О. Воробей*, Управління освіти Житомирської міської ради, методист
- М. А. Муратов*, Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського,  
кафедра математичного аналізу,  
доктор фізико-математичних наук, доцент

**Нелін Є. П.**  
Н49 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загально-  
освіт. навчальн. закладів : академ. рівень / Є. П. Нелін. —  
Х. : Гімназія, 2010. — 416 с. : іл.  
ISBN 978-966-474-095-8.

УДК 373:[512+517]  
ББК 22.12я721+2.161я721

## ПЕРЕДМОВА ДЛЯ УЧНІВ

Ви починаєте вивчати новий предмет «Алгебра і початки аналізу», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки. Як і в курсі алгебри, значну увагу буде приділено перетворенням виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей та їх систем і розгляду властивостей функцій. Поряд із розв'язуванням знайомих задач, пов'язаних з многочленами, раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі буде розглянуто нові види функцій: степеневі й тригонометричні та відповідні рівняння і нерівності.

Принципово нову частину курсу — початки аналізу — буде розглянуто в 11 класі. *Математичний аналіз* (або просто аналіз) — галузь математики, що сформувалася у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природознавства: з'явився потужний, достатньо універсальний метод дослідження функцій, які використовуються під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

Кілька зауважень про те, як користуватися підручником.

Систему навчального матеріалу підручника з кожної теми подано за двома рівнями. *Основний матеріал* наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з алгебри і початків аналізу зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Учні можуть опанувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя.

На початку багатьох параграфів наведено *довідкові таблиці*, які містять основні означення, властивості та *орієнтири* для пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводяться приклади, у яких крім розв'язання міститься також *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Систему вправ до основного матеріалу подано за трьома рівнями. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначень, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «\*». У підручнику для багатьох задач поглибленого рівня також пропонуються спеціальні орієнтири, які дають можливість опанувати методи їх розв'язування. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про походження понять, термінів і символів ви зможете дізнатися, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника наведено довідковий матеріал.

## ПЕРЕДМОВА ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до чинної програми з алгебри і початків аналізу академічного рівня з урахуванням програми профільного рівня та програми і змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника від інших підручників з алгебри і початків аналізу. Це *дворівневий підручник*, у кожному розділі якого поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою.

Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі *довідкових таблиць* на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів для розв'язування завдань*. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях. Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником, використовуючи відповідні таблиці та рисунки. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибрати свій рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з алгебри і початків аналізу повинен забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними алгебраїчними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з алгебри і початків аналізу), а й формування способів дій із цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів уміння з алгебри і початків аналізу). Систему умов, на яку реально спирається учень при виконанні дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонують достатньо загальні орієнтовні основи для розв'язування відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонують орієнтовні основи другого і третього типів. Як правило, у підручниках алгебри і початків аналізу для 10 класів учням пропонуються тільки зразки розв'язувань завдань. Учні самостійно розв'язують ці завдання, орієнтуючись на зразки (тобто учням пропонуються орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на запропоновані зразки, і виділить для себе орієнтовну основу розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у цьому випадку орієнтовна основа, що створюється в учня, неповна. Крім того, вона часто не усвідомлена ним, бо учень не може пояснити,

чому він виконував саме такі перетворення під час розв'язування завдання, а не інші.

Із цієї причини одним з принципів побудови пропонованого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності з розв'язування алгебраїчних завдань безпосередньо в підручнику.

У кожному розділі розв'язанню вправ передують виділення загальних орієнтирів для розв'язування таких завдань. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведеться за схемою:

### *Розв'язання*

### *Коментар*

За умови такої подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє учневі, який уже за своїм способом розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

За рахунок чіткого виділення загальних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, рівняння, для розв'язування яких доводиться використовувати властивості функцій). Це дозволяє, зокрема, ознайомити учнів з методами розв'язування навіть складних завдань з алгебри і початків аналізу, які пропонуються в зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, та з оформленням їх розв'язання.

#### Умовні позначення

##### головне в навчальному матеріалі

- ▶ початок розв'язання задачі
- ◁ закінчення розв'язання задачі
- початок обґрунтування твердження
- закінчення обґрунтування твердження

## Позначення, які застосовано в підручнику

$N$	— множина всіх натуральних чисел	$[x]$	— ціла частина числа $x$
$Z$	— множина всіх цілих чисел	$\{x\}$	— дробова частина числа $x$
$Z_0$	— множина всіх невід'ємних цілих чисел	$f(x)$	— значення функції $f$ у точці $x$
$Q$	— множина всіх раціональних чисел	$D(f)$	— область визначення функції $f$
$R$	— множина всіх дійсних чисел, числова пряма	$E(f)$	— область значень функції $f$
$R_+$	— множина всіх додатних дійсних чисел	$\sin$	— функція синус
$[a; b]$	— відрізок (замкнений проміжок) з кінцями $a$ і $b$ , $a < b$	$\cos$	— функція косинус
$(a; b)$	— інтервал (відкритий проміжок) з кінцями $a$ і $b$ , $a < b$	$\operatorname{tg}$	— функція тангенс
$(a; b]$ ,	— напіввідкриті проміжки з кінцями $a$ і $b$ , $a < b$	$\operatorname{ctg}$	— функція котангенс
$[a; b)$		$\arcsin$	— функція арксинус
$(a; +\infty)$ ,	— нескінченні проміжки	$\arccos$	— функція арккосинус
$[a; +\infty)$ ,		$\operatorname{arctg}$	— функція арктангенс
$(-\infty; b]$ ,		$\operatorname{arccotg}$	— функція арккотангенс
$(-\infty; b)$		$\sqrt{a}$	— арифметичний корінь із числа $a$
$(-\infty; +\infty)$	— нескінченний проміжок, числова пряма	$\sqrt[2k]{a}$	— арифметичний корінь $2k$ -го степеня із числа $a$ ( $k \in N$ )
$ x $	— модуль (абсолютна величина) числа $x$	$\sqrt[2k+1]{a}$	— корінь $(2k+1)$ -го степеня із числа $a$ ( $k \in N$ )

# Розділ 1

# ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

## ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 1. Множини
- § 2. Функції
- § 3. Рівняння
- § 4. Нерівності: рівносильні перетворення та загальний метод інтервалів

## ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 5. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними
- § 6. Метод математичної індукції
- § 7. Многочлени від однієї змінної та дії над ними
- § 8. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля
- § 9. Рівняння і нерівності з параметрами

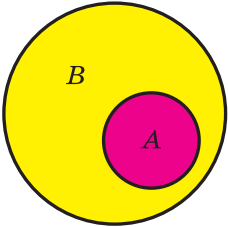
В основній частині цього розділу ви систематизуєте та узагальните свої знання й уміння, пов'язані з множинами, функціями, рівняннями і нерівностями, уточните, як досліджують і обґрунтовують основні характеристики функцій. Також ви отримаєте рекомендації щодо розв'язування рівнянь та нерівностей різними методами.

У додатковій частині розділу ви зможете ознайомитися з важливим методом доведення математичних тверджень (методом математичної індукції) та з методами розв'язування деяких складних завдань, що їх пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики.

## § 1 МНОЖИНИ

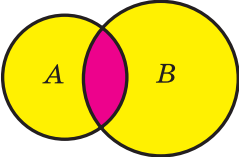
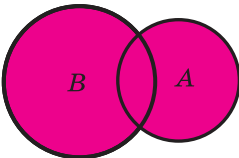
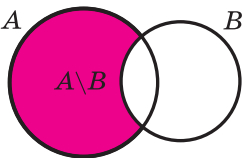
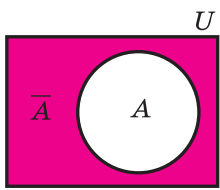
### 1.1. Множини та операції над ними

Таблиця 1

Поняття множини та її елементів	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Елемент <math>a</math> належить множині <math>A</math></div> $\Leftrightarrow$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>a \in A</math></div>	<p>Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять.</p> <p><b>Кожний об'єкт, що входить до множини <math>A</math>, називається елементом цієї множини.</b></p> <p>Множина, що не містить жодного елемента, називається <i>порожньою</i> множиною і позначається <math>\emptyset</math></p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">Елемент <math>b</math> не належить множині <math>A</math></div> $\Leftrightarrow$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>b \notin A</math></div>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">У множині немає елементів</div> $\Leftrightarrow$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"><math>\emptyset</math></div>	
Підмножина ( $\subset$ )	
 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;"><math>A \subset B</math></div> $\Leftrightarrow$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block; margin-left: 10px;">Якщо <math>x \in A</math>, то <math>x \in B</math></div>	<p><b>Якщо кожен елемент однієї множини <math>A</math> є елементом другої множини <math>B</math>, то кажуть, що перша множина <math>A</math> є підмножиною другої множини <math>B</math>,</b></p> <p>і записують так: <math>A \subset B</math>.</p> <p>Використовують також запис <math>A \subseteq B</math>, якщо множина <math>A</math> або є підмножиною множини <math>B</math>, або дорівнює множині <math>B</math></p>
Рівність множин	
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	<p><b>Дві множини називаються <i>рівними</i>, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини, і навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини</b></p>



Продовження табл. 1

Перетин множин ( $\cap$ )	
 $C = A \cap B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B$	<p><i>Перетином множин <math>A</math> і <math>B</math> називають їх спільну частину, тобто множину <math>C</math> всіх елементів, що належать як множині <math>A</math>, так і множині <math>B</math></i></p>
Об'єднання множин ( $\cup$ )	
 $C = A \cup B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$	<p><i>Об'єднанням множин <math>A</math> і <math>B</math> називають множину <math>C</math>, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (<math>A</math> або <math>B</math>)</i></p>
Різниця множин ( $\setminus$ )	
 $C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B$	<p><i>Різницею множин <math>A</math> і <math>B</math> називається множина <math>C</math>, що складається з усіх елементів, які належать множині <math>A</math> і не належать множині <math>B</math></i></p>
Доповнення множин	
 $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$	<p>Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої <i>універсальної</i> множини <math>U</math>, то різниця <math>U \setminus A</math> називається доповненням множини <math>A</math>. Тобто <i>доповненням множини <math>A</math></i> називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині <math>A</math> (але належать універсальній множині <math>U</math>)</p>

## Пояснення й обґрунтування

**1. Поняття множини.** Одним з основних понять, які використовують у математиці, є поняття *множини*. Для нього не дають означення. Можна пояснити, що *множиною* називають довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти — *елементами* даної *множини*. Так, можна говорити про множину учнів у класі (елементи — учні), множину днів тижня (елементи — дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи — числа 1, 2, 3, 6) тощо. У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають *числовими множинами*.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина  $M$  складається із чисел 1; 2; 3, то її позначають так:  $M = \{1; 2; 3\}$ . Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини  $M$ ), записують за допомогою спеціального значка  $\in$  так:  $2 \in M$ ; а те, що число 5 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записують так:  $5 \notin M$ .

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, — *порожню множину*.

Наприклад, множина простих дільників числа 1 — порожня множина.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожню множину позначають символом  $\emptyset$ , множину всіх натуральних чисел — літерою  $N$ , множину всіх цілих чисел — літерою  $Z$ , множину всіх раціональних чисел — літерою  $Q$ , а множину всіх дійсних чисел — літерою  $R$ . Множини бувають *скінченні* і *нескінченні* залежно від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини  $A = \{7\}$ ;  $M = \{1; 2; 3\}$  — скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$  — нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (це можна зробити лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило — *характеристична властивість*, яке дозволяє визначити, належить чи ні даний об'єкт розглядуваній множині. Наприклад, множина  $A = \{-1; 0; 1\}$  задана переліком елементів, а множина  $B$  парних цілих чисел — характеристичною властивістю елементів множини. Останню множину інколи записують так:  $B = \{b \mid b \text{ — парне ціле число}\}$  або так:  $B = \{b \mid b = 2m, \text{ де } m \in Z\}$  — тут після вертикальної риски записана характеристична властивість.<sup>1</sup>

У загальному вигляді запис множини за допомогою характеристичної властивості можна подати так:  $A = \{x \mid P(x)\}$ , де  $P(x)$  — характеристична властивість. Наприклад,  $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$ ,  $\{x \mid x \in R \text{ і } x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$ .

<sup>1</sup> У цьому випадку і в записах розв'язків тригонометричних рівнянь і нерівностей в розділі 4 запис  $m \in Z$  означає, що  $m$  приймає будь-яке ціле значення, що також можна записувати так:  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

**2. Рівність множин.** Нехай  $A$  — множина цифр трицифрового числа 312, тобто  $A = \{3; 1; 2\}$ , а  $B$  — множина натуральних чисел, менших від 4, тобто  $B = \{1; 2; 3\}$ . Оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів, то їх вважають рівними. Це записують так:  $A = B$ . Для нескінченних множин таким способом (порівнюючи всі елементи) установити їх рівність неможливо. Тому в загальному випадку рівність множин означають таким чином.

**Дві множини називаються рівними, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.**

З наведеного означення рівності множин випливає, що в множині однакові елементи не розрізняються. Дійсно, наприклад,  $\{1; 2; 2\} = \{1; 2\}$ , оскільки кожний елемент першої множини (1 або 2) є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини (1 або 2) є елементом першої. Тому, записуючи множину, найчастіше кожний її елемент записують тільки один раз.

### 3. Підмножина

**Якщо кожен елемент однієї множини  $A$  є елементом множини  $B$ , то кажуть, що перша множина  $A$  є підмножиною множини  $B$ .**

Це записують так:  $A \subset B$ . Наприклад,  $\{1; 2\} \subset \{0; 1; 2; 3\}$ ,  $N \subset Z$  (оскільки будь-яке натуральне число — ціле),  $Z \subset Q$  (оскільки будь-яке ціле число — раціональне),  $Q \subset R$  (оскільки будь-яке раціональне число — дійсне).

Вважають, що завжди  $\emptyset \subset A$ , тобто порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.

Інколи замість запису  $A \subset B$  використовують також запис  $A \subseteq B$ , якщо множина  $A$  або є підмножиною множини  $B$ , або дорівнює множині  $B$ . Наприклад,  $A \subseteq A$ .

Співставимо означення рівності множин з означенням підмножини. Якщо множини  $A$  і  $B$  рівні, то: 1) кожний елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$ , отже,  $A$  — підмножина  $B$  ( $A \subseteq B$ ); 2) кожний елемент множини  $B$  є елементом множини  $A$ , отже,  $B$  — підмножина  $A$  ( $B \subseteq A$ ). Таким чином,

**дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.**

Інколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів (які часто називають кругами Ейлера—Венна). Наприклад, рисунок 1 ілюструє означення підмножини, а рисунок 2 — співвідношення між множинами  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ ,  $R$ .

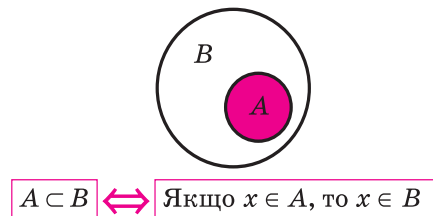


Рис. 1

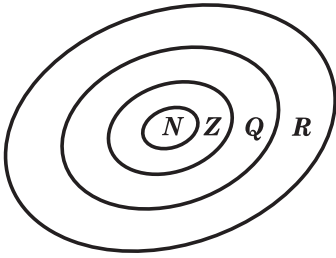


Рис. 2

**4. Операції над множинами.** Над множинами можна виконувати певні дії: перетин, об'єднання, знаходження різниці множин. Дамо означення цих операцій і проілюструємо їх за допомогою кругів Ейлера—Венна. *Перетином множин  $A$  і  $B$  називають їхню спільну частину, тобто множину  $C$  усіх елементів, що належать як множині  $A$ , так і множині  $B$ .*

Перетин множин позначають знаком  $\cap$  (на рисунку 3 наведено ілюстрацію означення перетину множин).

Наприклад, якщо  $A = \{2; 3; 4\}$ ,  $B = \{0; 2; 4; 6\}$ , то  $A \cap B = \{2; 4\}$ .

*Об'єднанням множин  $A$  і  $B$  називають множину  $C$ , що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин ( $A$  або  $B$ ).*

Об'єднання множин позначають знаком  $\cup$  (на рисунку 4 наведено ілюстрацію означення об'єднання множин).

Наприклад, для множин  $A$  і  $B$  з попереднього прикладу

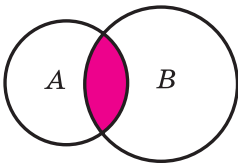
$$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}.$$

Якщо позначити множину ірраціональних чисел через  $M$ , то  $M \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .

*Різницею множин  $A$  і  $B$  називається множина  $C$ , яка складається з усіх елементів, які належать множині  $A$  і не належать множині  $B$ .*

Різницю множин позначають знаком  $\setminus$  (на рисунку 5 наведено ілюстрацію означення різниці множин).

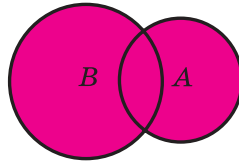
$A \cap B$



$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B$

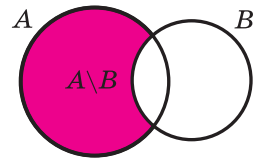
Рис. 3

$A \cup B$



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$

Рис. 4



$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B$

Рис. 5

Наприклад, якщо  $A = \{1; 2; 3\}$ ,  $B = \{2; 3; 4; 5\}$ , то  $A \setminus B = \{1\}$ , а  $B \setminus A = \{4; 5\}$ .

Якщо  $B$  — підмножина  $A$ , то різницю  $A \setminus B$  називають *доповненням множини  $B$  до множини  $A$*  (рис. 6).

Наприклад, якщо знову позначити множину ірраціональних чисел через  $M$ , то  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = M$ : кажуть, що множина  $M$  ірраціональних чисел

доповнює множину  $\mathcal{Q}$  раціональних чисел до множини  $\mathcal{R}$  усіх дійсних чисел.

Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини*  $U$  (на рисунку її зазвичай зображують у вигляді прямокутника, а всі інші множини — кругами всередині цього прямокутника), то різницю  $U \setminus A$  називають доповненням множини  $A$  (рис. 7). Тобто

**доповненням множини  $A$  називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині  $A$ ,**

але які належать універсальній множині  $U$ .

Доповнення множини  $A$  позначають  $\bar{A}$  (читають: « $A$  з рискою» або «доповнення  $A$ »).

Наприклад, якщо  $U = \mathcal{R}$  і  $A = [0; 1]$ , то  $\bar{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ . (Для цього прикладу зручно використати традиційну ілюстрацію множини дійсних чисел на числовій прямій — рис. 8).

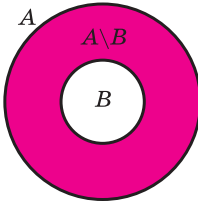


Рис. 6

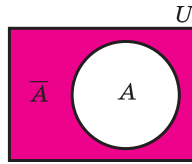


Рис. 7

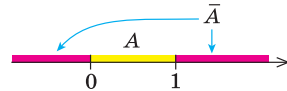


Рис. 8

### Заяпитання для контролю

1. Наведіть приклади множин, укажіть декілька елементів кожної множини.
2. Як позначають порожню множину, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел?
3. Дайте означення рівності множин. Наведіть приклади двох рівних множин.
4. Дайте означення підмножини. Наведіть приклади. Проілюструйте це поняття за допомогою кругів Ейлера—Венна.
5. Дайте означення перетину, об'єднання, різниці двох множин. Наведіть приклади. Проілюструйте за допомогою кругів Ейлера—Венна.
6. Поясніть, що називають доповненням однієї множини до іншої; доповненням множини. Наведіть приклади. Проілюструйте ці поняття за допомогою відповідних рисунків.

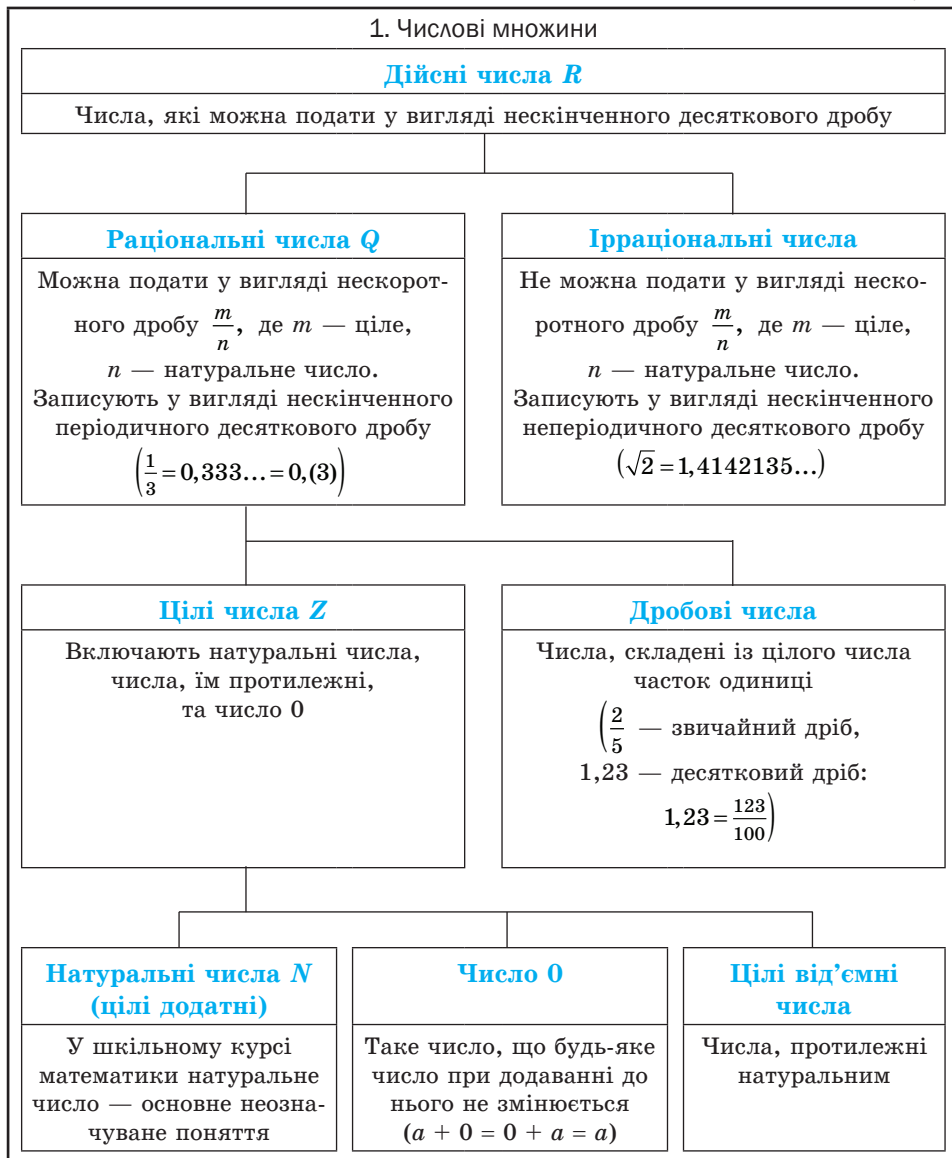
## Вправи

- 1°. Запишіть за допомогою фігурних дужок множину:
  - 1) букв у слові «алгебра»; 2) парних однозначних натуральних чисел; 3) непарних однозначних натуральних чисел; 4) однозначних простих чисел.
- 2°. За якою характеристичною властивістю записані такі множини:
  - 1) {понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя};
  - 2) {січень, лютий, березень, квітень, травень, червень, липень, серпень, вересень, жовтень, листопад, грудень};
  - 3) {Австралія, Азія, Америка, Антарктида, Африка, Європа};
  - 4) {до, ре, мі, фа, соль, ля, сі};
  - 5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?
- 3°. Наведіть приклади порожніх множин.
- 4°.  $A$  — множина натуральних чисел, які розміщені між числами 15 і 35. Запишіть множину  $A$  за допомогою фігурних дужок. Які з чисел 18, 28, 36, 40 належать множині  $A$ ? Відповідь запишіть за допомогою знаків  $\in$  і  $\notin$ .
- 5°. Запишіть за допомогою фігурних дужок і позначте множину:
  - 1) натуральних дільників числа 12;
  - 2) натуральних дільників числа 30;
  - 3) цілих дільників числа 6;
  - 4) простих дільників числа 12.
- 6°. Відомо, що  $M = \{1; 2; 5\}$ ,  $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$ ,  $K = \{4; 7; 9\}$ . Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака  $\emptyset$ :
  - 1) перетин  $M$  і  $N$ ; 2) перетин  $M$  і  $K$ ; 3) перетин  $N$  і  $K$ ; 4) об'єднання  $M$  і  $N$ ; 5) об'єднання  $M$  і  $K$ ; 6) об'єднання  $N$  і  $K$ ; 7) різницю  $M$  і  $N$ ; 8) різницю  $M$  і  $K$ ; 9) різницю  $N$  і  $K$ ; 10) доповнення  $K$  до  $N$ .
- 7°. Поясніть, чому виконуються такі рівності:
  - 1)  $A \cup \emptyset = A$ ;    2)  $A \cup A = A$ ;    3)  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;    4)  $A \cap A = A$ .
- 8°. Запишіть множину всіх двоцифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3.
- 9°. Відомо, що  $A$  — множина натуральних дільників числа 12, а  $B$  — множина цілих дільників числа 6. Запишіть множини:
  - 1)  $A \cup B$ ;            2)  $A \cap B$ ;            3)  $A \setminus B$ ;            4)  $B \setminus A$ .
- 10\*. Нехай  $A$  і  $B$  — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:
  - 1)  $A \cup B = B \cup A$  — переставний закон для об'єднання;
  - 2)  $A \cap B = B \cap A$  — переставний закон для перетину.

11. В одній множині 40 різних елементів, а в другій — 30. Скільки елементів може бути в їх: 1) перетині; 2) об'єднанні?
- 12\*. Нехай  $A, B, C$  — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:
- 1)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  — *сполучний закон для об'єднання*;
  - 2)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  — *сполучний закон для перетину*;
  - 3)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
  - 4)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
  - 5)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$  |
  - 6)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  | — *закони де Моргана*.
13. Кожний учень у класі вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчають 25 учнів, французьку — 27 учнів, а обидві мови — 18 учнів. Скільки учнів у класі?
- 14\*. Частина жителів міста вміє розмовляти тільки українською мовою, частина — тільки російською, а частина — обома мовами. Українською мовою розмовляє 95 % жителів, а російською — 85 %. Скільки відсотків жителів міста розмовляє обома мовами?
- 15\*. Доведіть рівності і проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера—Венна:
- 1)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ;    2)  $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ .
- 16\*. Запишіть множину всіх правильних дробів  $\frac{a}{b}$ , де  $a \in A, b \in B$   
і  $A = \{2; 3; 4; 6\}, B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ .
- 17\*. Які трицифрові числа можна записати, якщо:  
 $A = \{3; 1; 2\}$  — множина цифр для позначення сотень;  
 $B = \{2; 8\}$  — множина цифр для позначення десятків;  
 $C = \{5; 7\}$  — множина цифр для позначення одиниць?  
 Скільки таких чисел одержимо? Спробуйте сформулювати загальне правило підрахунку кількості таких чисел, якщо в множині  $A$  —  $m$  елементів ( $0 \notin A$ ), у множині  $B$  —  $n$  елементів, у множині  $C$  —  $k$  елементів.

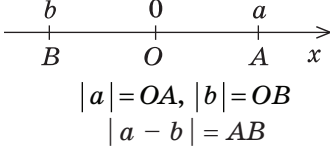
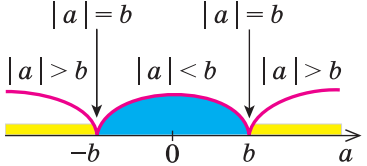
## 1.2. Числові множини. Множина дійсних чисел

Таблиця 2





## Продовження табл. 2

2. Модуль дійсного числа та його властивості	
Означення	Геометричний зміст модуля
<p><b>Модулем</b> додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю.</p> $ a  = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$	 <p>На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.</p> <p>Модуль різниці двох чисел <math>a</math> і <math>b</math> — це відстань між точками <math>a</math> і <math>b</math> на координатній прямій</p>
Властивості	
1. $ a  \geq 0$	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число
2. $ -a  =  a $	Модулі протилежних чисел рівні
3. $a \leq  a $ , тобто $- a  \leq a \leq  a $	Величина числа не перевищує величини його модуля
4. При $b > 0$ $ a  \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$	
5. При $b > 0$ $ a  \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ або $a \geq b$	
6. $ a \cdot b  =  a  \cdot  b $	Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників
7. $\left  \frac{a}{b} \right  = \frac{ a }{ b }$ ( $b \neq 0$ )	Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)
8. $ a^n  =  a ^n$	$ a ^2 = a^2$ $ a ^{2k} = a^{2k}$
9. $ a + b  \leq  a  +  b $ $ a_1 + a_2 + \dots + a_n  \leq  a_1  +  a_2  + \dots +  a_n $	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків
10. $  a  -  b   \leq  a \pm b  \leq  a  +  b $	

## Пояснення й обґрунтування

**1. Числові множини.** У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства склалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел  $N = \{1; 2; 3; \dots\}$  недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль. Приєднуючи до множини  $N$  натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають  $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ . Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилось недостатньо для розв'язування задач практики (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа  $n$  протилежним вважають число  $-n$ , а для числа  $-n$  протилежним вважають число  $n$ . Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину  $Z$  *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення *раціональних чисел*. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Харкові становить  $-7,3$  °C, тривалість уроку — 45 хв, або  $\frac{3}{4}$  год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю виміру, ми одержуємо числове значення величин, що можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі і дробові числа складають множину  $Q$  *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дроби  $\frac{m}{n}$ , де  $m \in Z$ ,  $n \in N$  (тобто чисельник  $m \in Z$  — цілим числом, а знаменник  $n \in N$  — натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}, \quad \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35}, \quad 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100}, \quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дроби  $\frac{m}{n}$ , де  $m \in Z$ ,  $n \in N$ , можна записати також у вигляді скінченного або нескін-

ченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад,  $\frac{3}{4} = 0,75$ ,  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

Домовимося, що скінченний десятковий дріб можна зображувати у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записують нулі, наприклад,  $\frac{3}{4} = 0,75 = 0,75000\dots$

Цілі числа також домовимося записувати у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого справа від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад  $13 = 13,000\dots$  Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що у нескінченного періодичного дробу, починаючи з деякого місця, усі десяткові знаки повторюються. Групу цифр, що повторюється, називають *періодом дробу*; у записі дробу період наводять у дужках. Наприклад,  $\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3)$ ,  $\frac{3}{22} = 0,136363636\dots = 0,1(36)$ .

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.*

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу. Наприклад, нескінченні періодичні дроби  $0,2(9)$  і  $0,3(0)$  є записом одного й того самого раціонального числа  $\frac{3}{10}$ . Дійсно, урахувавши, що сума нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом  $a_1$  і знаменником  $q$  обчислюється за формулою  $S = \frac{a_1}{1-q}$ , маємо:

$$0,2(9) = 0,2999\dots = 0,2 + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots = 0,2 + \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} = 0,2 + \frac{1}{10} = 0,3 = 0,3(0).$$

У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, домовимося не розглядати нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю виміру). Наприклад, на рисунку 9 зображено декілька раціональних чисел  $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2,5\right)$ .



Рис. 9

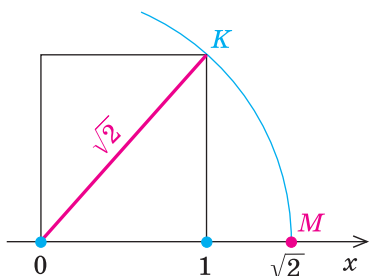


Рис. 10

Але на координатній прямій розташовані точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, з курсу алгебри відомо, що число  $\sqrt{2}$  не є раціональним. Це так зване ірраціональне число. Якщо побудувати квадрат із стороною, рівною 1, на координатній прямій  $x$  (рис. 10), то його діагональ дорівнюватиме  $\sqrt{2}$ . Тоді, провівши дугу кола з центром у точці  $O$  і радіусом  $OM = \sqrt{2}$ , одержимо точку  $M$ , координата якої дорівнює  $\sqrt{2}$ . Крім числа  $\sqrt{2}$ , ви також зустрічалися з ірраціональними числами  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{10}$  тощо.

Раціональні та ірраціональні числа складають *множину дійсних чисел*  $R$ . На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність).

*Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.*

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовують наближені значення цих чисел. Зокрема, *щоб порівняти два дійсних числа, треба розглядати послідовно їх наближені значення з недостатчею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. доти, поки не одержимо якесь наближене значення одного числа, більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, наближене значення якого більше, і вважається більшим.* Наприклад, якщо  $\alpha = \sqrt{3} = 1,7320508\dots$ ,  $\beta = 1\frac{3}{4} = 1,7500000\dots$ , то  $\alpha < \beta$  (оскільки  $1,73 < 1,75$ ).

Для того щоб виконати додавання чи множення розглянутих чисел  $\alpha$  і  $\beta$ , послідовно записують їх наближені значення з недостатчею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті послідовно отримують значення суми чи добутку з потрібною точністю.

$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1,7 < \alpha < 1,8$	$1,7 < \beta < 1,8$	$3,4 < \alpha + \beta < 3,6$	$2,89 < \alpha\beta < 3,24$
$1,73 < \alpha < 1,74$	$1,75 < \beta < 1,76$	$3,48 < \alpha + \beta < 3,50$	$3,0275 < \alpha\beta < 3,0624$
$1,732 < \alpha < 1,733$	$1,750 < \beta < 1,751$	$3,482 < \alpha + \beta < 3,484$	$3,031 < \alpha\beta < 3,034483$
...	...	...	...

Як бачимо,  $\alpha + \beta = 3,48\dots$ ,  $\alpha\beta = 3,03\dots$ .

У курсі математичного аналізу доводиться, що у випадку, коли наближені значення чисел  $\alpha$  і  $\beta$  послідовно беруть з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми  $\alpha + \beta$  з недостатчею і з надлишком прямує до одного й того самого числа, яке приймають за значення суми  $\alpha + \beta$  (аналогічно означають і добуток  $\alpha\beta$ ).

**2. Модуль дійсного числа та його властивості.** Нагадаємо означення модуля.

**Модулем додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0, \end{cases} \quad \text{або}$$

$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$  За потреби ми будемо користуватися будь-яким із

цих записів означення модуля. Для того щоб знайти  $|a|$ , за означенням необхідно знати знак числа  $a$  і використати відповідну формулу. Наприклад,  $|5| = 5$ ,  $|-3| = -(-3) = 3$ ,  $|\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}$ .

**На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображає це число.**

Дійсно, якщо  $a > 0$  (рис. 11), то відстань  $OA = a = |a|$ .

Якщо  $b < 0$ , то відстань  $OB = -b = |b|$ .

**Модуль різниці двох чисел  $a$  і  $b$  — це відстань між точками  $a$  і  $b$  на координатній прямій.**

- Для доведення можна скористатися тим, що при паралельному перенесенні вздовж осі координат на  $b$  одиниць абсциса відповідної точки змінюється на  $b$ : до абсциси заданої точки додається число  $b$ , тобто при

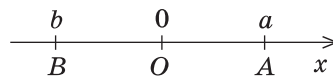


Рис. 11

$b > 0$  точка переноситься вправо, а при  $b < 0$  — уліво. Позначимо на координатній прямій числа  $a, b, a - b$  відповідно точками  $A, B, C$ . На рисунку 12 ці точки зображено для випадку  $a > 0$  і  $b < 0$ , хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків  $a$  і  $b$ . При паралельному перенесенні вздовж осі  $Ox$  на  $b$  одиниць точка  $O$  перейде

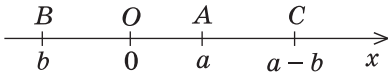


Рис. 12

в точку  $B$ , а точка  $C$  (з координатою  $a - b$ ) — у точку з координатою  $a - b + b = a$ , тобто в точку  $A$ . Тоді  $CO = AB$ . Але відстань  $CO$  — це відстань від точки  $a - b$  до початку координат, тобто  $CO = |a - b|$ , а отже, і  $AB = |a - b|$ . ○

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в таблиці 2.

Наприклад, ураховуючи, що  $|a|$  — це відстань від точки  $a$  до точки  $O$ , а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо

$$|a| \geq 0,$$

тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємним числом*.

Ураховуючи, що точки  $a$  і  $-a$  розташовані на однаковій відстані від точки  $O$ , одержуємо

$$|-a| = |a|,$$

це означає, що *модулі протилежних чисел рівні*.

Якщо  $a \geq 0$ , то  $|a| = a$ , а якщо  $a < 0$ , то  $a < |a|$ . Отже, завжди

$$a \leq |a|,$$

тобто *величина числа не перевищує величини його модуля*.

Якщо в останню нерівність замість  $a$  підставити  $-a$  і врахувати, що  $|-a| = |a|$ , то одержуємо нерівність  $-a \leq |a|$ . Звідси  $a \geq -|a|$ , що разом із нерівністю  $a \leq |a|$  свідчить, що для будь-якого дійсного числа  $a$  виконується подвійна нерівність

$$-|a| \leq a \leq |a|. \tag{1}$$

При  $b > 0$  нерівність  $|a| \leq b$  означає, що число  $a$  на координатній прямій розміщене від точки  $O$  на відстані, яка не перевищує  $b$  (рис. 13), тобто в проміжку  $[-b; b]$ . Навпаки, якщо число  $a$  належить цьому проміжку, тобто  $-b \leq a \leq b$ , то  $|a| \leq b$ . Отже,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b. \tag{2}$$

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і при  $b = 0$  (тоді обом нерівностям задовольняє тільки одне значення  $a = 0$ ).

Аналогічно при  $b > 0$  нерівність  $|a| \geq b$  означає, що число  $a$  на координатній прямій знаходиться від точки  $O$  на відстані, яка більша або дорівнює  $b$  (рис. 13), тобто

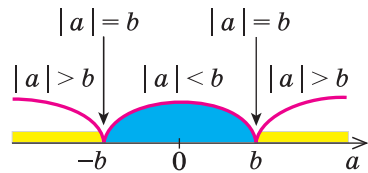


Рис. 13

в цьому випадку  $a \leq -b$  або  $a \geq b$ . Навпаки, якщо число  $a$  задовольняє одній із цих нерівностей, то  $|a| \geq b$ . Отже, при  $b > 0$  нерівність  $|a| \geq b$  рівносильна сукупності нерівностей  $a \leq -b$  або  $a \geq b$ , що можна записати так:

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ або } a \geq b.$$

Властивості модуля добутку і модуля дробу фіксують відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

*модуль добутку дорівнює добутку модулів множників, тобто*

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|;$$

*модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю), тобто*

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|. \quad (3)$$

Якщо у формулі (3) взяти  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ , одержуємо формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Застосовуючи останню формулу справа наліво при  $n = 2k$  і враховуючи, що  $a^{2k} \geq 0$  при всіх значеннях  $a$ , одержуємо  $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$ . Отже,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обґрунтування нерівності

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (4)$$

запишемо нерівність (1) для чисел  $a$  і  $b$ :

$$-|a| \leq a \leq |a|; \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, одержуємо

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Ураховуючи нерівність (2), маємо

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

тобто *модуль суми не перевищує суми модулів доданків.*

Якщо в нерівності (4) замінити  $b$  на  $-b$  і врахувати, що  $|-b| = |b|$ , то одержимо нерівність

$$|a - b| \leq |a| + |b|. \quad (5)$$

Якщо записати число  $a$  так:  $a = b + (a - b)$  і використати нерівність (4), то одержимо нерівність  $|a| \leq |b| + |a - b|$ . Звідси

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \quad (6)$$

Якщо в нерівності (6) замінити  $b$  на  $-b$  і врахувати, що  $|-b| = |b|$ , то одержимо нерівність

$$|a| - |b| \leq |a + b|, \quad (7)$$

тобто *модуль суми двох чисел не менше різниці їх модулів.*

Міняючи місцями букви  $a$  і  $b$  у нерівностях (6) і (7) та враховуючи, що  $|a - b| = |b - a|$ , маємо також нерівності

$$|b| - |a| \leq |a \pm b|. \quad (8)$$

Одержані нерівності (4)–(8) можна коротко записати так:

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Доведіть, що сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.

#### Розв'язання

► Нехай задано два раціональних числа  $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$  і  $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ , де  $m_1$  і  $m_2$  — цілі, а  $n_1$  і  $n_2$  — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

де  $m_1 n_2 + n_1 m_2$  — ціле число, а  $n_1 n_2$  — натуральне. ◁

#### Коментар

Будь-яке раціональне число можна записати як дріб  $\frac{m}{n}$ , де  $m$  — ціле,  $n$  — натуральне число. Щоб довести твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду  $\frac{m}{n}$  буде дробом такого самого виду.

**Приклад 2** Доведіть, що для будь-якого натурального числа  $n$  число  $\sqrt{n}$  або натуральне, або ірраціональне.

#### Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане додатне число є раціональним ненатуральним (тобто дробом), і отримати суперечність з умовою або з якимсь відомим фактом.

Записуючи  $\sqrt{n}$  у вигляді нескоротного дроби, слід враховувати, що при натуральних значеннях  $n$  це число завжди буде невід'ємним.

#### Розв'язання

► Припустимо, що  $\sqrt{n}$  не є ірраціональним числом (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ , де  $p$  і  $q$  — натуральні числа



( $q \neq 1$ ). За означенням квадратного кореня маємо  $n = \frac{p^2}{q^2}$ , тобто  $n = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ .

Ураховуючи, що  $q \neq 1$ , одержуємо, що дріб  $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ , який дорівнює натуральному числу  $n$ , повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, що стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники  $p$ , а в знаменнику — тільки множники  $q$ . Тоді числа  $p$  і  $q$  мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб  $\frac{p}{q}$  є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином,

наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа  $n$  число  $\sqrt{n}$  або натуральне, або ірраціональне.  $\triangleleft$

Наприклад, оскільки числа  $\sqrt{3}$  і  $\sqrt{10}$  не є натуральними числами ( $1 < \sqrt{3} < 2$ ,  $3 < \sqrt{10} < 4$ ), то  $\sqrt{3}$  і  $\sqrt{10}$  — ірраціональні числа.

**Приклад 3\*** Доведіть, що сума  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  — число ірраціональне.

#### Розв'язання

► Припустимо, що число  $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$  — раціональне. Тоді  $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$ . Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо  $5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3$ . Звідси  $2r\sqrt{3} = r^2 - 2$ .

Отже,  $\sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r}$ . Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням  $r$  — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  — ірраціональне.  $\triangleleft$

#### Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод «від супротивного» — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність з якимсь відомим фактом, наприклад з тим, що  $\sqrt{3}$  — ірраціональне число.

Аналізуючи одержані вирази, використовуємо результат прикладу 1: якщо число  $r$  — раціональне, то числа  $r^2 - 2$  і  $2r$  та їх частка теж будуть раціональними.

Зазначимо, що знаменник отриманого дробу  $2r = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \neq 0$ .

**Приклад 4** Розв'яжіть рівняння<sup>1</sup>  $|2x + 5| = 7$ .

<sup>1</sup> Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, докладніше розглянуто в § 8.

## Розв'язання

## Коментар

## I спосіб

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & 2x + 5 = 7 \text{ або } 2x + 5 = -7, \\ & 2x = 2 \text{ або } 2x = -12, \\ & x = 1 \text{ або } x = -6. \end{aligned}$$

Відповідь: 1; -6. ◀

Задане рівняння має вигляд  $|t| = 7$  (у даному випадку  $t = 2x + 5$ ). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля:  $|2x + 5|$  — це відстань від точки 0 до точки  $2x + 5$ . Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число -7). Отже, рівність  $|2x + 5| = 7$  можлива тоді і тільки тоді, коли  $2x + 5 = 7$  або  $2x + 5 = -7$ .

## II спосіб

$$\blacktriangleright \quad |2x - (-5)| = 7,$$

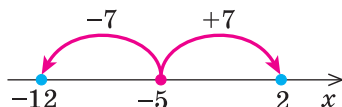


Рис. 14

$$\begin{aligned} 2x = 2 \text{ або } 2x = -12, \\ x = 1 \text{ або } x = -6. \end{aligned}$$

Відповідь: 1; -6. ◀

З геометричної точки зору  $|a - b|$  є відстань між точками  $a$  і  $b$  на координатній прямій. Запишемо задане рівняння так:  $|2x - (-5)| = 7$ . Тоді рівність  $|2x - (-5)| = 7$  означає, що відстань від точки  $2x$  до точки  $-5$  дорівнює 7. На відстані 7 від точки  $-5$  знаходяться точки 2 і  $-12$  (рис. 14). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли  $2x = 2$  або  $2x = -12$ , тобто задане рівняння рівносильне цій сукупності рівнянь.

**Приклад 5** Розв'яжіть нерівність  $|x^2 - 5x| \leq 6$ .

## Розв'язання

## Коментар

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & -6 \leq x^2 - 5x \leq 6, \\ & \begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0, \end{cases} \\ & \begin{cases} (x+1)(x-6) \leq 0, \\ (x-2)(x-6) \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 15), отримуємо

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ x \leq 2 \text{ або } x \geq 3. \end{cases}$$

Задана нерівність має вигляд  $|t| \leq 6$  (у даному випадку  $t = x^2 - 5x$ ), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. З геометричної точки зору,  $|t|$  — це відстань від точки 0 до точки  $t$ . На відстані 6 від 0 знаходяться числа 6 і -6.

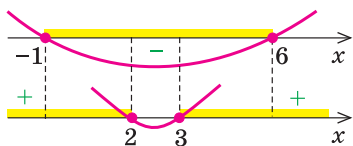


Рис. 15

Отже,  $-1 \leq x \leq 2$  або  $3 \leq x \leq 6$ .

Відповідь:  $[-1; 2] \cup [3; 6]$ . ◀

Тоді нерівності  $|t| \leq 6$  задовольняють усі ті і тільки ті точки, які знаходяться в проміжку  $[-6; 6]$ , тобто  $-6 \leq t \leq 6$ . Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою.

### Заяпитання для контролю

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи у вигляді нескінченного десяткового дробу раціонального та ірраціонального чисел.
3. Поясніть, як порівнюють дійсні числа.
4. Дайте означення модуля дійсного числа. а) Сформулюйте властивості модуля. б\*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа.

### Вправи

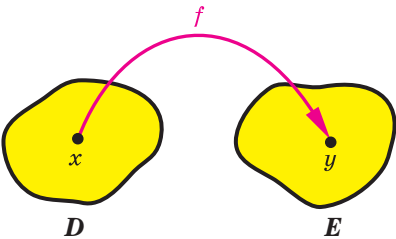
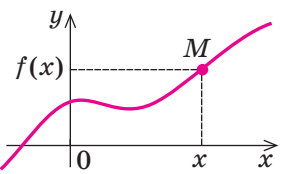
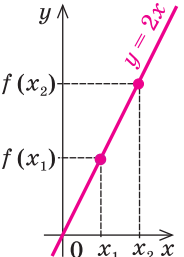
1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:
  - 1)  $1 + \sqrt{2}$ ;
  - 2)  $\sqrt{3} - 5$ ;
  - 3)  $\sqrt{10}$ ;
  - 4)  $\sqrt{7} + 3$ ;
  - 5)  $2 - \sqrt{5}$ .
- 2\*. Доведіть, що сума (різниця, добуток і частка) раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).
- 3\*. Доведіть, що задані дійсні числа є ірраціональними:
  - 1)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;
  - 2)  $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ;
  - 3)  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ ;
  - 4)  $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ .
4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівності:
  - 1\*)  $|x| \leq 2$ ;
  - 2\*)  $|x| > 5$ ;
  - 3)  $|x - 3| \leq 0,5$ ;
  - 4)  $|x + 1| < 0,3$ .
5. Розв'яжіть рівняння:
  - 1)  $|3x + 1| = 4$ ;
  - 2)  $|4x - 2| = 6$ ;
  - 3\*)  $||x - 1| - 2| = 1$ ;
  - 4\*)  $||2x + 3| - 5| = 3$ .
6. Розв'яжіть нерівність:
  - 1)  $|2x - 7| \leq 1$ ;
  - 2)  $|3x + 5| > 7$ ;
  - 3\*)  $||2x - 1| + 3| \geq 5$ ;
  - 4\*)  $||4x + 7| - 11| < 4$ .

## § 2 ФУНКЦІЇ

### 2.1. Поняття числової функції.

#### Найпростіші властивості числових функцій

Таблиця 3

1. Поняття числової функції	
	<p><b>Числовою функцією з областю визначення <math>D</math></b> називається залежність, при якій кожному числу <math>x</math> із множини <math>D</math> (області визначення) ставиться у відповідність єдине число <math>y</math>.</p> <p>Записують цю відповідність так:</p> $y = f(x).$ <p><i>Позначення і терміни</i></p> <p><math>D(f)</math> — область визначення  <math>E(f)</math> — область значень  <math>x</math> — аргумент (незалежна змінна)  <math>y</math> — функція (залежна змінна)  <math>f</math> — функція  <math>f(x_0)</math> — значення функції <math>f</math> у точці <math>x_0</math></p>
2. Графік функції	
	<p><b>Графіком функції <math>f</math></b> називається множина всіх точок координатної площини з координатами <math>(x; f(x))</math>, де перша координата <math>x</math> «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції <math>f</math> у точці <math>x</math></p>
3. Зростаючі і спадні функції	
	<p><b>Функція <math>f(x)</math> зростаюча на множині <math>P</math>:</b>  <b>якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то <math>f(x_2) &gt; f(x_1)</math></b>  <b>для всіх <math>x \in P</math></b>      (при збільшенні аргументу відповідні точки графіка піднімаються)</p>

Продовження табл. 3

	<p>Функція <math>f(x)</math> спадна на множині <math>P</math>: якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то <math>f(x_2) &lt; f(x_1)</math> для всіх <math>x \in P</math> (при збільшенні аргументу відповідні точки графіка опускаються).</p>
4. Парні і непарні функції	
	<p>Функція <math>f(x)</math> парна: <math>f(-x) = f(x)</math> для всіх <math>x</math> з області визначення. Графік парної функції симетричний відносно осі <math>Oy</math></p>
	<p>Функція <math>f(x)</math> непарна: <math>f(-x) = -f(x)</math> для всіх <math>x</math> із області визначення. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки <math>O</math></p>

### Пояснення й обґрунтування

**1. Поняття функції.** З поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що залежність змінної  $y$  від змінної  $x$  називається *функцією*, якщо кожному значенню  $x$  відповідає єдине значення  $y$ .

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

**Числовою функцією з областю визначення  $D$  називається залежність, при якій кожному числу  $x$  із множини  $D$  ставиться у відповідність єдине число  $y$ .**

Функції позначають латинськими (інколи грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію  $f$ . Число  $y$ , яке відповідає числу  $x$  (на рисунку до пункту 1 табл. 3 це показано стрілкою), називають значенням функції  $f$  у точці  $x$  і позначають  $f(x)$ .

Область визначення функції  $f$  — це множина тих значень, яких може набувати аргумент  $x$ . Вона позначається  $D(f)$ .

Область значень функції  $f$  — це множина, яка складається з усіх чисел  $f(x)$ , де  $x$  належить області визначення. Її позначають  $E(f)$ .

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо немає додаткових обмежень, то область визначення функції, заданої формулою, вважають множиною всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст. Наприклад, якщо функція задана формулою  $y = \sqrt{x} + 1$ , то її область визначення —  $x \geq 0$ , тобто  $D(f) = [0; +\infty)$ , а область значень —  $y \geq 1$ , тобто  $E(f) = [1; +\infty)$ .

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргументу. Наприклад,  $y = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й за допомогою таблиці, графіка чи словесного опису. Наприклад, на рисунку 16 графічно задана функція  $y = f(x)$  з областю визначення  $D(f) = [-1; 3]$  і множиною значень  $E(f) = [1; 4]$ .

Значення, що приймає функція  $f(x)$  в деякій точці  $x_0$  множини  $M$ , на якій ця функція задана, називається *найбільшим (найменшим)* на цій

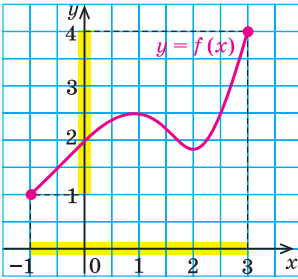


Рис. 16

множині, якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення. Тобто для всіх  $x \in M$  виконується нерівність  $f(x) \leq f(x_0)$  (відповідно  $f(x) \geq f(x_0)$  для найменшого значення). Іноді це записують так:  $\max_M f(x) = f(x_0)$  (відповідно  $\min_M f(x) = f(x_0)$ ).

Наприклад, для функції  $y = f(x)$ , графічно заданої на відрізку  $[-1; 3]$  на рисунку 16, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4.

Тобто  $\max_{[-1;3]} f(x) = 4$ ,  $\min_{[-1;3]} f(x) = 1$ ,

## 2. Графік функції. Нагадаємо, що

**графіком функції  $y = f(x)$  називається множина всіх точок координатної площини з координатами  $(x; f(x))$ , де перша координата  $x$  «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції  $f$  у точці  $x$ .**

На рисунках до пункту 4 таблиці 3 наведено графіки функцій  $y = x^2$  та  $y = \frac{1}{x}$ , а на рисунку 17 — графік функції  $y = |x|$ .

Наведемо також графік функції  $y = [x]$ , де  $[x]$  — позначення *цілої частини* числа  $x$ , тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує  $x$  (рис. 18). Область визначення цієї функції  $D(y) = \mathbf{R}$  — множина всіх дійсних чисел, а область значень  $E(y) = \mathbf{Z}$  — множина всіх цілих чисел.

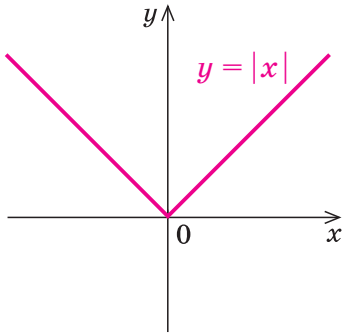


Рис. 17

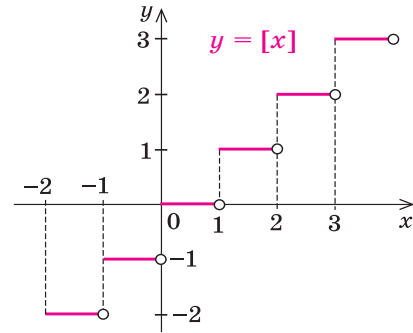


Рис. 18

На рисунку 19 наведено графік числової функції  $y = \{x\}$ , де  $\{x\}$  — позначення дробової частини числа  $x$  (за означенням  $\{x\} = x - [x]$ ).

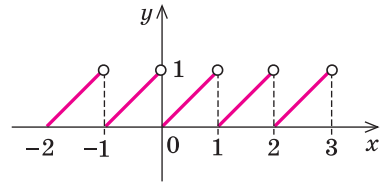


Рис. 19

**3. Зростаючі та спадні функції.** Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

**Функція  $f(x)$  називається зростаючою на множині  $P$ , якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає більше значення функції,**

тобто для будь-яких двох значень  $x_1$  і  $x_2$  з множини  $P$ ,  
якщо  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Наприклад, функція  $f(x) = 2x$  зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині  $\mathbf{R}$ ), оскільки, якщо  $x_2 > x_1$ , то  $2x_2 > 2x_1$ , отже,  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргументу піднімаються (рис. 20).

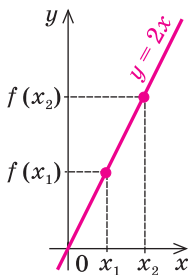


Рис. 20

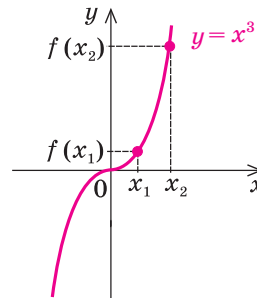


Рис. 21

На рисунку 21 наведено графік зростаючої функції  $y = x^3$ . Дійсно, при  $x_2 > x_1$  маємо  $x_2^3 > x_1^3$ , тобто  $f(x_2) > f(x_1)$ .

**Функція  $f(x)$  називається спадною на множині  $P$ , якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає менше значення функції,**

тобто для будь-яких двох значень  $x_1$  і  $x_2$  з множини  $P$ ,  
якщо  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Наприклад, функція  $f(x) = -2x$  спадна (на всій області визначення, тобто на множині  $\mathbf{R}$ ), оскільки, якщо  $x_2 > x_1$ , то  $-2x_2 < -2x_1$ , отже,  $f(x_2) < f(x_1)$ . Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргументу опускаються (рис. 22).

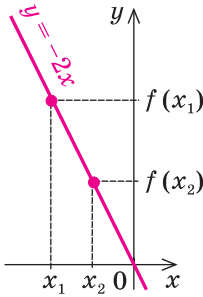


Рис. 22

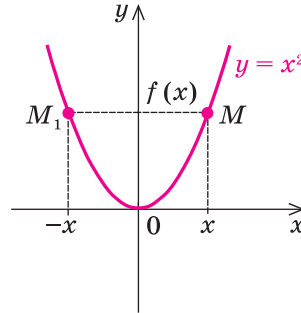


Рис. 23

Розглядаючи графік функції  $y = x^2$  (рис. 23), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку  $[0; +\infty)$  функція  $y = x^2$  зростає, а на проміжку  $(-\infty; 0]$  — спадає.

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються властивості, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

**Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу.**

**Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.**

- Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція  $f(x)$  зростає і  $f(x_2) > f(x_1)$ . Припустимо, що аргумент  $x_2$  не більше аргументу  $x_1$ , тобто  $x_2 \leq x_1$ . Із цього припущення одержуємо:

якщо  $x_2 \leq x_1$  і  $f(x)$  зростає, то  $f(x_2) \leq f(x_1)$ , що суперечить умові  $f(x_2) > f(x_1)$ . Отже, наше припущення неправильне і, якщо  $f(x_2) > f(x_1)$ , то  $x_2 > x_1$ , що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ○

Наприклад, якщо  $x^3 > 8$ , тобто  $x^3 > 2^3$ , то, ураховуючи зростання функції  $f(x) = x^3$ , одержуємо  $x > 2$ .



**4. Парні і непарні функції.** Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом з кожним числом  $x$  містять і число  $-x$ . Для таких функцій визначено поняття парності і непарності.

**Функція  $f$  називається парною, якщо для будь-якого  $x$  з її області визначення  $f(-x) = f(x)$ .**

Наприклад, функція  $y = x^2$  (тобто функція  $f(x) = x^2$ ) — парна, оскільки  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ .

- Якщо функція  $f(x)$  парна, то до її графіка разом з кожною точкою  $M$  з координатами  $(x; y) = (x; f(x))$  входить також і точка  $M_1$  з координатами  $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$ . Точки  $M$  і  $M_1$  розміщені симетрично відносно осі  $Oy$  (рис. 24), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі  $Oy$ .** ○

Наприклад, графік парної функції  $y = x^2$  (рис. 23) симетричний відносно осі  $Oy$ .

**Функція  $f$  називається непарною, якщо для будь-якого  $x$  з її області визначення  $f(-x) = -f(x)$ .**

Наприклад, функція  $y = \frac{1}{x}$  (тобто функція  $f(x) = \frac{1}{x}$ ) — непарна, оскільки

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

- Якщо функція  $f(x)$  непарна, то до її графіка разом з кожною точкою  $M$  з координатами  $(x; y) = (x; f(x))$  входить також і точка  $M_1$  з координатами  $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$ . Точки  $M$  і  $M_1$  розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 25), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.** ○

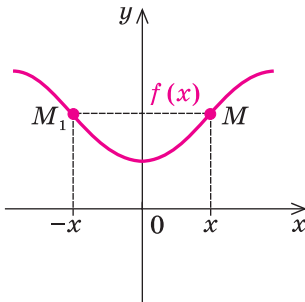


Рис. 24

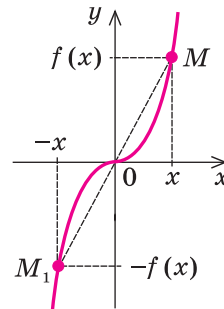


Рис. 25

Наприклад, графік непарної функції  $y = \frac{1}{x}$  (див. пункт 4 табл. 3) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки  $O$ .

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = x^2 + x$ ;

2)  $y = \frac{x}{x^2 + x}$ ;

3)  $y = \sqrt{x+5}$ .

#### Розв'язання

1) ► Обмежень для знаходження значень виразу  $x^2 + x$  немає, отже,  $D(y) = \mathbf{R}$ . ◀

2) ► Область визначення функції

$$y = \frac{x}{x^2 + x} \text{ задана обмеженням}$$

$x^2 + x \neq 0$ , оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли  $x^2 + x = 0$ . Маємо  $x(x+1) = 0$ ,  $x = 0$  або  $x = -1$ .

Тоді область визначення можна задати обмеженнями  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$  або записати так:

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty). \triangleleft$$

3) ► Область визначення функції

$$y = \sqrt{x+5} \text{ задана обмеженням}$$

$x + 5 \geq 0$ , тобто  $x \geq -5$ , оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже,  $D(y) = [-5; +\infty)$ . ◀

#### Коментар

Оскільки всі функції задано формулами, то їх області визначення — це множина всіх значень змінної  $x$ , при яких має зміст формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули  $y = f(x)$ .

У курсі алгебри зустрічалися тільки два обмеження, які необхідно враховувати при знаходженні області визначення:

1) якщо вираз записано у вигляді дробу  $\frac{A}{B}$ , то знаменник  $B \neq 0$ ;

2) якщо запис виразу містить квадратний корінь  $\sqrt{A}$ , то підкореневий вираз  $A \geq 0$ .

У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, область визначення виразу були всі дійсні числа<sup>1</sup>.

**Приклад 2\*** Знайдіть область значень функції  $y = x^2 - 3$ .

#### Розв'язання

► Складаємо рівняння  $x^2 - 3 = a$ . Воно рівносильне рівнянню  $x^2 = a + 3$ , яке має розв'язки, якщо  $a + 3 \geq 0$ , тобто при  $a \geq -3$ . Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції

$$E(f) = [-3; +\infty) \text{ (тобто } y \geq -3). \triangleleft$$

#### Коментар

Позначимо значення заданої функції  $f(x)$  (тобто  $x^2 - 3$ ) через  $a$  і з'ясуємо, для яких  $a$  можна знайти відповідне значення  $x$  (при цьому значенні  $x$  значення  $f(x) = a$ ).

Тоді всі числа  $a$ , для яких існує хоча б один корінь рівняння  $f(x) = a$ , увійдуть до області значень функції  $f(x)$ . Множина всіх таких  $a$  і складе область значень функції.

<sup>1</sup> Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу з'являться нові вирази з обмеженнями:  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\arcsin a$ ,  $\arccos a$ ,  $\sqrt[n]{a}$ ,  $a^a$ , де  $\alpha$  — неціле число.

Корисно пам'ятати, що

*область значень функції  $y = f(x)$  збігається з множиною тих значень  $a$ , при яких рівняння  $f(x) = a$  має розв'язки.*

**Приклад 3\*** Доведіть, що при  $k \neq 0$  областю значень лінійної функції  $y = kx + b$  є множина всіх дійсних чисел.

#### Розв'язання

► Якщо  $kx + b = a$  (де  $k \neq 0$ ), то розв'язок цього рівняння  $x = \frac{a-b}{k}$  існує для будь-якого  $a \in \mathbf{R}$  ( $k \neq 0$  за умовою). ◀

Таким чином, значенням заданої функції може бути будь-яке дійсне число, отже, її область значень  $E(f) = \mathbf{R}$ .

#### Коментар

Позначимо значення заданої функції  $f(x)$  (тобто  $kx + b$ ) через  $a$  і з'ясуємо, для яких  $a$  можна знайти відповідне значення  $x$ , таке, що  $f(x) = a$ .

Множина всіх таких значень  $a$  і буде складати область значень функції  $f(x)$ .

**Приклад 4\*** Доведіть, що лінійна функція  $y = kx + b$  при  $k > 0$  є зростаючою, а при  $k < 0$  — спадною.

#### Розв'язання

► Нехай  $x_2 > x_1$  (тоді  $x_2 - x_1 > 0$ ). Розглянемо різницю  $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$ .

Оскільки  $x_2 - x_1 > 0$ , то при  $k > 0$  маємо  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , отже,  $f(x_2) > f(x_1)$  — функція зростає.

При  $k < 0$  маємо  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , отже,  $f(x_2) < f(x_1)$  — функція спадає. ◀

#### Коментар

Для обґрунтування зростання або спадання функції корисно пам'ятати, що для доведення нерівності  $f(x_2) > f(x_1)$  чи  $f(x_2) < f(x_1)$  достатньо знайти знак різниці  $f(x_2) - f(x_1)$ .

Задана функція  $f(x) = kx + b$  буде зростаючою, якщо з нерівності  $x_2 > x_1$  випливатиме нерівність  $f(x_2) > f(x_1)$ , а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці  $f(x_2) - f(x_1)$ . Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

**Приклад 5\*** Доведіть, що:

1) сума двох зростаючих на множині  $P$  функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;

2) сума двох спадних на множині  $P$  функцій завжди є спадною функцією на цій множині.

Розв'язання	Коментар
<p>1) ► Нехай функції <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> є зростаючими на одній і тій самій множині <math>P</math>. Якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то <math>f(x_2) &gt; f(x_1)</math> і <math>g(x_2) &gt; g(x_1)</math>. Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо</p> $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$ <p>Це і означає, що сума функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> є зростаючою функцією на множині <math>P</math>. ◀</p> <p>2) ► Нехай функції <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> є спадними на множині <math>P</math>. Тоді з нерівності <math>x_2 &gt; x_1</math> маємо <math>f(x_2) &lt; f(x_1)</math> і <math>g(x_2) &lt; g(x_1)</math>. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо:</p> $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1),$ <p>а це й означає, що сума функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> є спадною функцією на множині <math>P</math>. ◀</p>	<p>Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> достатньо довести, що на множині <math>P</math> з нерівності <math>x_2 &gt; x_1</math> випливає нерівність</p> $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$ <p>Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести:</p> <p>якщо <math>x_2 &gt; x_1</math>, то</p> $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$

**Приклад 6** Доведіть, що зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Розв'язання	Коментар
<p>► Нехай функція <math>f(x)</math> є зростаючою і</p> $f(x_1) = f(x_2). \quad (1)$ <p>Припустимо, що</p> $x_1 \neq x_2.$ <p>Якщо <math>x_1 \neq x_2</math>, то або <math>x_1 &gt; x_2</math>, або <math>x_1 &lt; x_2</math>. Ураховуючи зростання <math>f(x)</math>, у випадку <math>x_1 &gt; x_2</math> маємо <math>f(x_1) &gt; f(x_2)</math>, що суперечить рівності (1). У випадку <math>x_1 &lt; x_2</math> маємо <math>f(x_1) &lt; f(x_2)</math>, що також суперечить рівності (1).</p> <p>Отже, наше припущення неправильне, і рівність <math>f(x_1) = f(x_2)</math> можлива тільки при <math>x_1 = x_2</math>.</p>	<p>Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.</p>

Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◀

**Приклад 7** Дослідіть, які із заданих функцій є парними, які непарними, а які — ні парними, ні непарними:

$$1) y = \frac{1}{x+1}; \quad 2) y = x^4; \quad 3) y = x^3 + x.$$

### Розв'язання

- 1) ► Область визначення функції  $y = \frac{1}{x+1}$ :  $x \neq -1$ , тобто вона не симетрична відносно точки  $O$  (точка  $x = -1$  входить до області визначення, а  $x = -1 - \text{ні}$ ).



Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◀

- 2) ► Область визначення функції  $y = x^4$ :  $D(y) = \mathbf{R}$ , тобто вона симетрична відносно точки  $O$ .  
 $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$ , а отже, функція парна. ◀
- 3) ► Область визначення функції  $y = x^3 + x$ :  $D(y) = \mathbf{R}$ , отже, вона симетрична відносно точки  $O$ . ◀  
 $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$ ,  
отже, функція непарна.

### Коментар

Для дослідження функції  $y = f(x)$  на парність чи непарність достатньо, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки  $O$  (разом з кожною точкою  $x$  містить і точку  $-x$ ), і, по-друге, порівняти значення  $f(-x)$  і  $f(x)$ .

### Запитання для контролю

- Що називається числовою функцією? Наведіть приклади таких функцій.
- На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше та найменше значення функції на множині  $M$ . Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції  $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$ ? Знайдіть її область визначення.

3. Що називається графіком функції  $y = f(x)$ ? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

### Вправи

- 1°. Знайдіть значення функції вказаних точках:

1)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  у точках 2; -1; 3;  $a$  ( $a \neq 0$ );

2)  $g(x) = x^2 - 3$  в точках 0; 1; -2;  $b$ ;

3)  $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$  у точках 0; 3; -1;  $m$  ( $m > 0$ ).

2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°)  $y = 2x + 3$ ; 2°)  $y = \sqrt{x+3}$ ; 3°)  $y = \frac{1}{x+1}$ ; 4)  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ;

5)  $y = \sqrt{x^2-1}$ ; 6)  $y = \sqrt{x^2+1}$ ; 7)  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ ; 8)  $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ ;

9\*)  $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$ ; 10\*)  $y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$ ; 11\*)  $y = \frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$ ; 12\*)  $y = \sqrt{x^2+x+1}$ .

3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1)  $f(x) = 5$ ; 2)  $f(x) = x$ ; 3)  $f(x) = x^2$ ; 4)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

5\*)  $y = -3x + 1$ ; 6\*)  $y = x^2 - 5$ ; 7\*)  $y = |x| + 3$ .

- 4°. Для функцій, які задано своїми графіками на рисунку 26, укажіть область визначення, область значень, найбільше та найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при  $x = 1$ .

5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1)  $y = 3x$ ; 2)  $y = x + 5$ ; 3\*)  $y = x^3$ ; 4\*)  $y = x^5$ ; 5\*)  $y = \sqrt{x}$ .

- 6\*. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

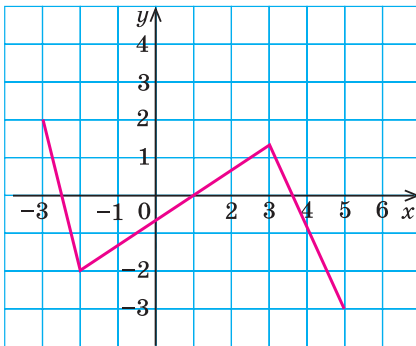
1)  $y = -\frac{2}{x}$ , де  $x > 0$ ; 2)  $y = -\frac{1}{x}$ , де  $x < 0$ .

7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

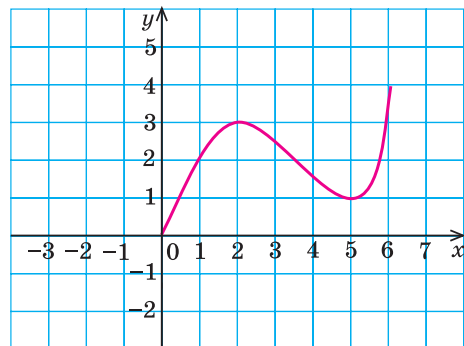
1)  $y = -3x$ ; 2)  $y = -x - 1$ ; 3\*)  $y = -x^3$ ; 4\*)  $y = -x^5$ .

- 8\*. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

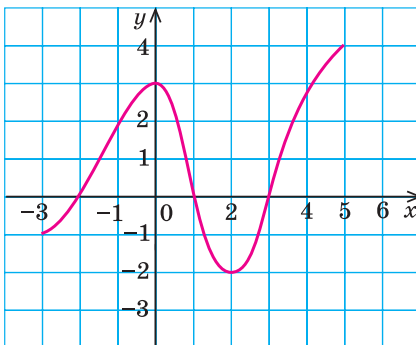
1)  $y = \frac{3}{x}$ , де  $x < 0$ ; 2)  $y = \frac{5}{x}$ , де  $x > 0$ .



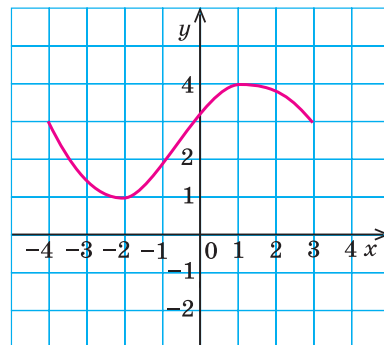
а



б



в



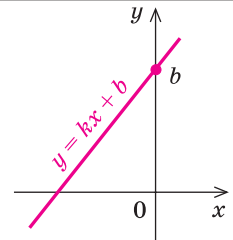
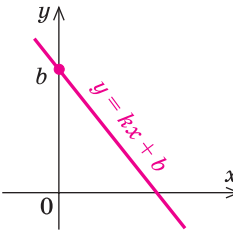
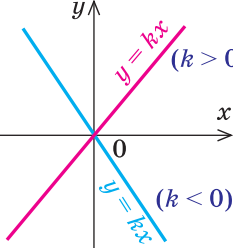
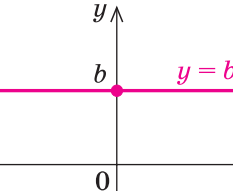
г

Рис. 26

- 9\*. Доведіть, що функція  $y = x^2$  на проміжку  $[0; +\infty)$  зростає, а на проміжку  $(-\infty; 0]$  спадає.
- 10\*. Користуючись твердженнями, доведеними в прикладі 5 (с. 35), укажіть, які із заданих функцій є зростаючими, а які — спадними:  
 1)  $y = x^3 + x$ ;    2)  $y = -x - x^5$ ;    3)  $y = x + \sqrt{x}$ ;    4)  $y = -x^3 - x^5$ .
- 11\*. Користуючись твердженнями, доведеними в прикладі 6 (с. 36):  
 1) обґрунтуйте, що рівняння  $x^3 + x = 10$  має єдиний корінь  $x = 2$ ;  
 2) підберіть корінь рівняння  $\sqrt{x} + x = 6$  і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.
12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:  
 1)  $y = x^6$ ;    2)  $y = \frac{1}{x^2} + 1$ ;    3)  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ ;    4)  $y = \sqrt{|x| + x^4}$ .
13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:  
 1)  $y = x^5$ ;    2)  $y = -\frac{1}{x^3}$ ;    3)  $y = x |x|$ ;    4)  $y = x^3 - x$ .

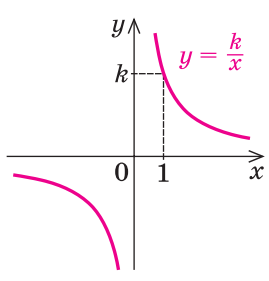
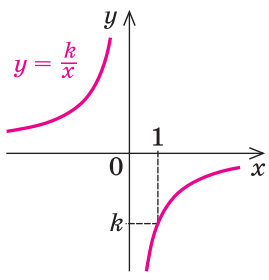
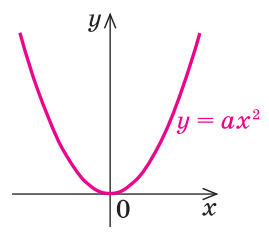
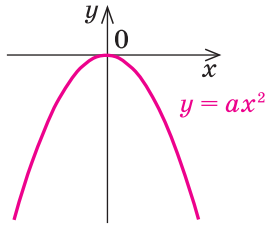
## 2.2. ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ

Таблиця 4

Умови для коефіцієнтів	Графік	Властивості			
		$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
1	2	3	4	5	6
1. Лінійна функція $y = kx + b$					
$k > 0$ $b \neq 0$		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ні парна, ні непарна	зростає
$k < 0$ $b \neq 0$					спадає
$b = 0$ $y = kx$				непарна	при $k > 0$ зростає
					при $k < 0$ спадає
$k = 0$ $y = b$		$b$	парна	постійна	



Продовження табл. 4

1	2	3	4	5	6
2. Обернена пропорційність, функція $y = \frac{k}{x}$ ( $k \neq 0$ )					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	непарна	спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
$k < 0$					зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
3. Функція $y = ax^2$ ( $a \neq 0$ )					
$a > 0$		$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	парна	спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ , зростає на проміжку $[0; +\infty)$
$a < 0$					$(-\infty; 0]$

1	2	3	4	5	6
4. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}$ )					
$a > 0$		$\mathbf{R}$	$[y_0; +\infty)$	у загальному випадку — ні парна, ні непарна	спадає на проміжку $(-\infty; x_0]$ , зростає на проміжку $[x_0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$	при $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ парна	зростає на проміжку $(-\infty; x_0]$ , спадає на проміжку $[x_0; +\infty)$

### Пояснення й обґрунтування

1. **Лінійна функція**  $y = kx + b$ . Лінійною функцією називається функція виду  $y = kx + b$ , де  $k$  і  $b$  — деякі числа.

Обґрунтуємо основні характеристики цієї функції: область визначення, область значень, парність чи непарність, зростання і спадання.

*Область визначення* — множина всіх дійсних чисел:  $D(y) = \mathbf{R}$ , оскільки формула  $kx + b$  має зміст при всіх дійсних значеннях  $x$  (тобто для будь-якого дійсного  $x$  ми можемо обчислити значення  $kx + b$ ).

*Область значень* лінійної функції буде різною залежно від значення коефіцієнта  $k$ .

Якщо  $k = 0$ , то функція має вигляд  $y = b$ , тобто її область значень складається з одного числа  $b$ . У такому випадку графіком лінійної функції  $y = b$  є пряма, паралельна осі  $Ox$ , яка перетинає вісь  $Oy$  у точці  $b$  (рис. 27).

Якщо  $k \neq 0$ , то  $E(y) = \mathbf{R}$  (обґрунтування наведено в розв'язанні прикладу 3 до пункту 2.1).

*Парність і непарність* лінійної функції суттєво залежить від значень коефіцієнтів  $b$  і  $k$ .

При  $b = 0$  і  $k \neq 0$  функція  $y = kx + b$  перетворюється на функцію  $y = kx$ , яка непарна, оскільки для всіх  $x$  з її області визначення

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

Отже, графік функції  $y = kx$  (рис. 28) симетричний відносно точки  $O$ .

При  $k = 0$  одержуємо функцію  $y = b$ , яка є парною, оскільки для всіх  $x$  з її області визначення  $f(-x) = b = f(x)$ . Тобто графік функції  $y = b$  симетричний відносно осі  $Oy$  (рис. 27).

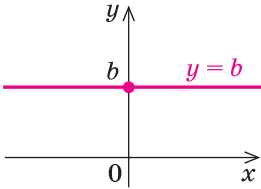


Рис. 27

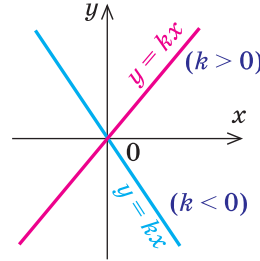


Рис. 28

У загальному випадку при  $k \neq 0$  і  $b \neq 0$  функція  $y = kx + b$  не буде ні парною, ні непарною, оскільки  $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$  і також  $f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x)$ .

*Зростання і спадання лінійної функції залежить від значення коефіцієнта  $k$ .*

При  $k = 0$  одержуємо функцію  $y = b$  — постійну.

При  $k > 0$  функція  $y = kx + b$  зростає, а при  $k < 0$  — спадає (обґрунтування наведено в розв'язанні прикладу 4 до пункту 2.1).

У курсі геометрії було обґрунтовано, що **графіком лінійної функції  $y = kx + b$  завжди є пряма лінія.**

Оскільки при  $x = 0$  функція набуває значення  $y = b$ , то *ця пряма завжди перетинає вісь  $Oy$  у точці  $b$ .* Графіки лінійних функцій наведено в таблиці 4.

**2. Функція  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ).** Ця функція виражає *обернено пропорційну залежність.*

*Область визначення:  $x \neq 0$ .* Це можна записати також так:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

*Область значень:  $y \neq 0$ .* Це можна записати також так:

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Для обґрунтування області значень функції  $y = \frac{k}{x}$  позначимо  $\frac{k}{x} = a$ .

Тоді із цієї рівності одержимо  $x = \frac{k}{a}$  для всіх  $a \neq 0$ . Тобто для всіх  $a \neq 0$

існує значення  $x = \frac{k}{a}$ , при якому  $y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\frac{k}{a}} = a$ . Отже,  $y$  набуває всіх дій-

сних значень, які не рівні нулю.

Функція непарна, оскільки її областю визначення є множина, симетрична відносно точки  $O$ , і  $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$ . Отже, її графік симетричний відносно початку координат (рис. 29 і 30).

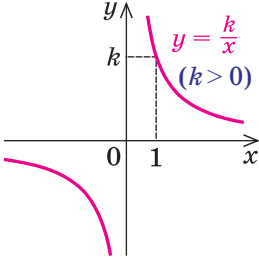


Рис. 29

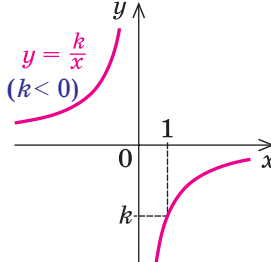


Рис. 30

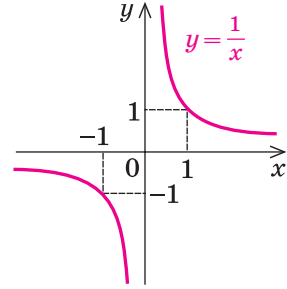


Рис. 31

Зростання і спадання функції залежить від знака коефіцієнта  $k$ .

- Якщо  $x_2 > x_1$  (тобто  $x_2 - x_1 > 0$ ), то для порівняння значень  $f(x_2)$  і  $f(x_1)$  розглянемо їхню різницю:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1x_2} = \frac{-k(x_2 - x_1)}{x_1x_2}. \quad (1)$$

На проміжку  $(0; +\infty)$  значення  $x_1 > 0$  і  $x_2 > 0$ , отже,  $x_1x_2 > 0$ . На проміжку  $(-\infty; 0)$  значення  $x_1 < 0$  і  $x_2 < 0$ , отже,  $x_1x_2 > 0$ .

Ураховуючи, що  $x_2 - x_1 > 0$ , у кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  або  $(0; +\infty)$  при  $k > 0$  з рівності (1) отримуємо  $f(x_2) - f(x_1) < 0$ , а при  $k < 0$  одержуємо  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ .

При  $k > 0$  на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  та  $(0; +\infty)$  якщо  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) < f(x_1)$ , отже, функція спадає на кожному із цих проміжків.

При  $k < 0$  на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  та  $(0; +\infty)$  якщо  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) > f(x_1)$ , отже, функція зростає на кожному з цих проміжків. ○

З курсу алгебри відомо, що графік функції  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) називається *гіперболою* (вона складається з двох віток). При  $k > 0$  вітки гіперболи знаходяться в I і III координатних чвертях, а при  $k < 0$  — у II і IV чвертях (рис. 29 і 30).

Зауваження. Характеризуючи зростання чи спадання функції  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ), слід пам'ятати, що, наприклад, функція  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 31) спадає на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  та  $(0; +\infty)$ , але на всій області визначення ( $x \neq 0$ ) ця функція не є спадною (і не є зростаючою). Дійсно, якщо взяти

$x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$ , то  $x_2 > x_1$ , але  $f(x_2) = f(1) = 1$  і  $f(x_1) = f(-1) = -1$ , тобто більшому значенню аргументу не відповідає менше значення функції і на всій її області визначення функція  $f(x) = \frac{1}{x}$  не є спадною.

Із цієї ж причини не можна сказати, що функція  $f(x) = \frac{1}{x}$  спадає при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

**3. Функція  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).** Як відомо з курсу алгебри, графіком цієї функції є *парабола*, вітки якої напрямлені вгору при  $a > 0$  (рис. 32) і вниз при  $a < 0$  (рис. 33). Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = 0$ , то графік завжди проходить через початок координат.

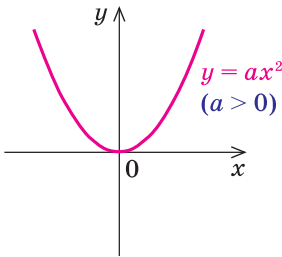


Рис. 32

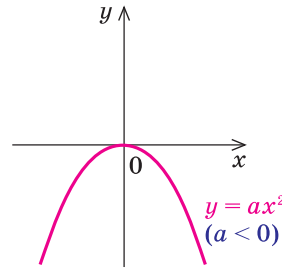


Рис. 33

*Область визначення:*  $x \in \mathbf{R}$ , оскільки значення  $y = ax^2$  можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ .

*Функція парна*, оскільки  $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$ . Отже, її графік симетричний відносно осі  $Oy$ .

Інші властивості сформулюємо, скориставшись графіком функції  $y = ax^2$  (рис. 32 і 33). Їх можна обґрунтувати аналітично (проведіть таке обґрунтування самостійно) або спираючись на властивості функції  $y = x^2$  і на геометричні перетворення її графіка, які буде розглянуто в пункті 2.3.

*Область значень.* При  $a > 0$  графік проходить через початок координат, а всі його інші точки розташовані вище осі  $Ox$ . Якщо значення  $x$  збільшується до нескінченності, то і значення  $y$  теж збільшується до нескінченності  $(+\infty)$ , отже,  $y \geq 0$ , тобто  $E(y) = [0; +\infty)$ .

Аналогічно при  $a < 0$  графік також проходить через початок координат, але всі інші його точки знаходяться нижче осі  $Ox$ . Якщо значення  $x$  збільшується до нескінченності, то значення  $y$  зменшується до мінус нескінченності  $(-\infty)$ , отже,  $y \leq 0$ , тобто  $E(y) = (-\infty; 0]$ .

*Зростання і спадання.* При  $a > 0$  на проміжку  $(-\infty; 0]$  функція спадає, а на проміжку  $[0; +\infty)$  — зростає.

При  $a < 0$  на проміжку  $(-\infty; 0]$  функція зростає, а на проміжку  $[0; +\infty)$  — спадає.

**4. Квадратична функція  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).** З курсу алгебри 9 класу відомо, що функція виду  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a, b, c$  — дійсні числа, причому  $a \neq 0$ , називається *квадратичною*. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору при  $a > 0$  і вниз при  $a < 0$ .

Абсциса вершини цієї параболи  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . Для обґрунтування цього достатньо в заданій формулі виділити повний квадрат:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ тобто}$$

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ де } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

( $D = b^2 - 4ac$  — дискримінант квадратного тричлена  $ax^2 + bx + c$ ).

Нагадаємо, що залежно від знака дискримінанта  $D$  парабола або перетинає вісь  $Ox$  ( $D > 0$ ), або не перетинає ( $D < 0$ ), або дотикається до неї ( $D = 0$ ). Основні варіанти розміщення графіка функції  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) зображено в таблиці 5.

Таблиця 5

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Охарактеризуємо властивості функції  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), спираючись на ці відомі нам графіки (самостійно обґрунтуйте відповідні властивості аналітично).

**Область визначення:**  $D(y) = \mathbf{R}$ , оскільки значення  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ .

**Область значень.** При  $a > 0$  функція набуває всіх значень  $y \geq y_0$ , тобто  $E(y) = [y_0; +\infty)$ .

При  $a < 0$  функція набуває всіх значень  $y \leq y_0$ , тобто  $E(y) = (-\infty; y_0]$ .

**Парність і непарність.** При  $b = 0$  одержуємо парну квадратичну функцію  $y = \varphi(x) = ax^2 + c$ . Дійсно,  $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$ .

У загальному випадку (якщо  $b \neq 0$ ) функція  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) не є ні парною, ні непарною, оскільки  $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$  (і не дорівнює  $-f(x)$ ).

**Зростання і спадання.** При  $a > 0$  на проміжку  $(-\infty; x_0]$  функція спадає, а на проміжку  $[x_0; +\infty)$  — зростає.

При  $a < 0$  на проміжку  $(-\infty; x_0]$  функція зростає, а на проміжку  $[x_0; +\infty)$  — спадає.

Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = c$ , то *графік завжди перетинає вісь  $Oy$  у точці  $c$ .*

Відповідні графіки при  $D > 0$  наведено також у таблиці 4.

### Приклади розв'язання завдань

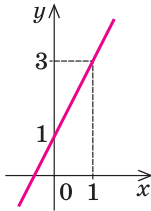
**Приклад 1** Побудуйте графік функції:

1)  $y = 2x + 1$ ;    2)  $y = -3x - 1$ ;    3)  $y = 4$ .

#### Розв'язання

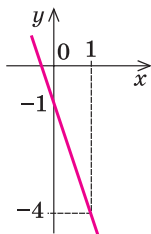
- 1) ► Графік функції  $y = 2x + 1$  — пряма. ◀

$x$	0	1
$y$	1	3



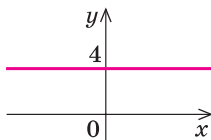
- 2) ► Графік функції  $y = -3x - 1$  — пряма. ◀

$x$	0	1
$y$	-1	-4



- 3) ► Графік функції  $y = 4$  — пряма, паралельна осі  $Ox$ , яка проходить через точку 4 на осі  $Oy$ . ◀

$x$	0	1
$y$	4	4



#### Коментар

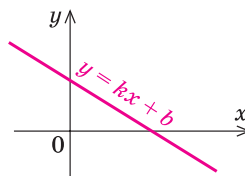
Усі задані функції лінійні, отже, їх графіками є прямі.

Щоб побудувати прямі в завданнях 1 і 2, достатньо побудувати дві точки цих прямих. Наприклад, можна взяти  $x = 0$  і  $x = 1$  і знайти відповідні значення  $y$ . Оформляти ці обчислення зручно у вигляді таблиць:

$x$	0	1
$y$		

У завданні 3 розглядається окремий випадок лінійної функції ( $y = b$ ). Для побудови цього графіка корисно пам'ятати, що пряма  $y = 4$  — це пряма, паралельна осі  $Ox$  (при будь-якому значенні  $x$  значення  $y$  дорівнює 4).

**Приклад 2\*** За наведеним графіком функції  $y = kx + b$  укажіть знаки  $k$  і  $b$ .

**Розв'язання**

▶ При  $x = 0$  значення  $y = b > 0$  — за рисунком. Оскільки зображено графік спадної лінійної функції, то  $k < 0$ . ◀

Відповідь:  $b > 0$ ,  $k < 0$ .

**Коментар**

Графік функції  $y = kx + b$  — пряма, яка перетинає вісь  $Oy$  у точці  $b$ . На рисунку ця точка лежить вище нуля, отже,  $b > 0$ .

Лінійна функція  $y = kx + b$  при  $k > 0$  зростаюча, а при  $k < 0$  — спадна. На рисунку зображено графік спадної функції, отже,  $k < 0$ .

**Приклад 3** Побудуйте графік<sup>1</sup> функції  $y = x^2 - 4x + 3$ .

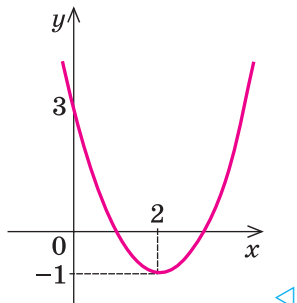
**Розв'язання**

▶ Графік заданої функції — парабола (виду  $y = x^2$ ), вітки якої напрямлені вгору.

Абсциса вершини:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Тоді  $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$  і графік має такий вигляд:

**Коментар**

Функція  $y = x^2 - 4x + 3$  — квадратична (має вигляд  $y = ax^2 + bx + c$ , де  $a \neq 0$ ). Отже, її графіком буде парабола (виду  $y = ax^2$ ), вітки якої напрямлені вгору ( $a = 1 > 0$ ).

Абсциса вершини параболи обчислюється за формулою  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , а ордината  $y_0$  — це відповідне значення заданої функції при  $x = x_0$ , тобто  $y_0 = y(x_0)$ .

Якщо потрібно уточнити, як проходить графік, то можна знайти координати кількох додаткових точок, наприклад, при  $x = 0$  одержуємо  $y = c = 3$ .

<sup>1</sup> Побудову таких графіків за допомогою геометричних перетворень графіка функції  $y = x^2$  розглядатимемо в пункті 2.3.



### Запитання для контролю

1. Яка функція називається лінійною? Назвіть властивості лінійної функції. Яка лінія є графіком лінійної функції? Наведіть приклади лінійних функцій та їх графіків.
2. Яка лінія є графіком функції  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ )? Наведіть приклади графіків функцій  $y = \frac{k}{x}$  при  $k > 0$  і при  $k < 0$ . За графіками вкажіть властивості цієї функції при  $k > 0$  і при  $k < 0$ . Доведіть непарність функції  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ).
3. Яка лінія є графіком функції  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ )? Як розміщено цей графік при  $a > 0$  і при  $a < 0$ ? Наведіть приклади графіків функцій  $y = ax^2$  при  $a > 0$  і при  $a < 0$ . За графіками вкажіть властивості цієї функції при  $a > 0$  і при  $a < 0$ . Доведіть парність функції  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ).
4. Яка лінія є графіком функції  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )? Як розміщено цей графік при  $a > 0$  і при  $a < 0$ ? Як знайти абсциси вершини графіка функції  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ )? Наведіть приклади графіків цієї функції при  $a > 0$  і при  $a < 0$ . За графіками вкажіть властивості цієї функції при  $a > 0$  і при  $a < 0$ .

### Вправи

- 1°. Побудуйте графік функції:  
1)  $y = 3x - 2$ ; 2)  $y = -x + 4$ ; 3)  $y = -2$ ; 4)  $y = -5x$ ; 5)  $y = 0$ ; 6)  $y = 4x$ .  
Чи є серед цих функцій парні або непарні? Відповідь обґрунтуйте.
- 2\*. За наведеними графіками функцій  $y = kx + b$  (рис. 34) укажіть знаки  $k$  і  $b$  у кожному випадку.

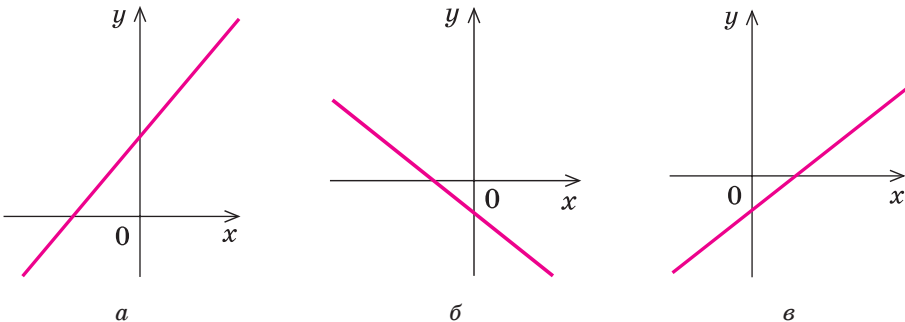


Рис. 34

Побудуйте графік функції (3–5).

- 3°. 1)  $y = -\frac{2}{x}$ ;      2)  $y = \frac{3}{x}$ ;      3)  $y = -\frac{1}{x}$ ;      4)  $y = \frac{5}{x}$ .
- 4°. 1)  $y = -2x^2$ ;      2)  $y = 3x^2$ ;      3)  $y = -3x^2$ ;      4)  $y = 5x^2$ .
5. 1)  $y = x^2 - 6x + 7$ ;      2)  $y = -x^2 + 4x + 2$ ;  
3)  $y = 2x^2 - 2x + 1$ ;      4)  $y = -3x^2 + 6x$ .

6\*. За наведеними графіками функції  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) (рис. 35) укажіть знаки  $a$ ,  $b$  і  $c$  у кожному випадку.

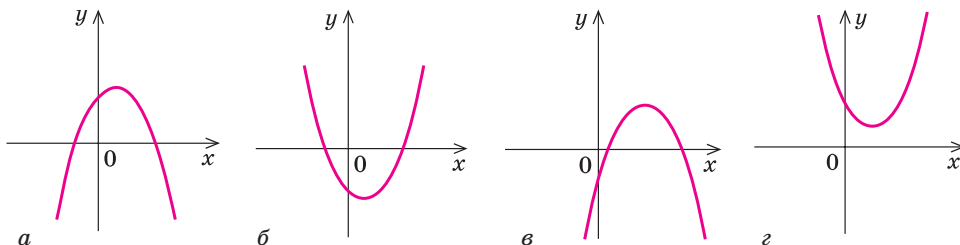


Рис. 35

7\*. На рисунку зображено графіки функцій  $y = \sqrt{x+3}$  і  $y = x - 3$  (рис. 36). Укажіть проміжок, на якому виконується нерівність  $\sqrt{x+3} \leq x - 3$ .

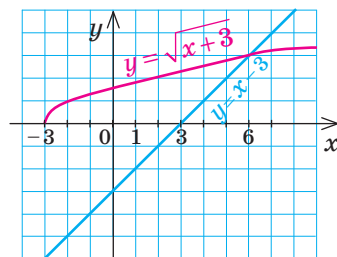


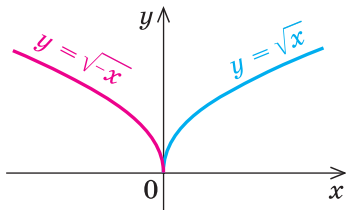
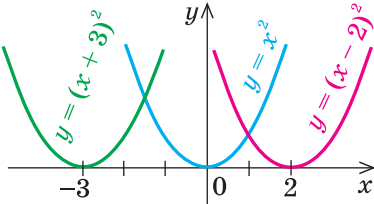
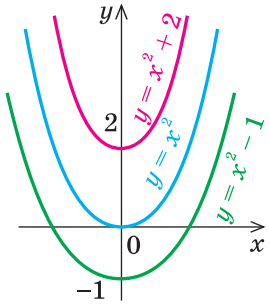
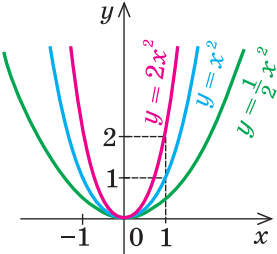
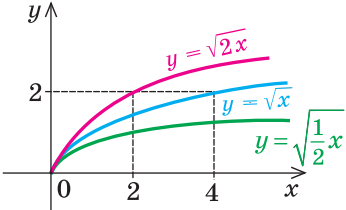
Рис. 36

### 2.3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Таблиця 6

Перетворення графіка функції $y = f(x)$			
№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі $Ox$

Продовження табл. 6

1	2	3	4
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі $Oy$
3	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі $Ox$ на $a$ одиниць
4	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі $Oy$ на $c$ одиниць
5	$y = kf(x)$ ( $k > 0$ )		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі $Oy$ (при $k > 1$ розтяг, при $0 < k < 1$ — стиск)
6	$y = f(\alpha x)$ ( $\alpha > 0$ )		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі $Ox$ (при $\alpha > 1$ — стиск, при $0 < \alpha < 1$ — розтяг)

1	2	3	4
7	$y =  f(x) $		Вище осі $Ox$ (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, нижче осі $Ox$ — симетрія відносно осі $Ox$
8	$y = f( x )$		Праворуч від осі $Oy$ (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, і та сама частина графіка — симетрія відносно осі $Oy$

### Приклади й обґрунтування

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

**1. Побудова графіка функції  $y = -f(x)$ .** Порівняємо графіки функцій  $y = x^2$  та  $y = -x^2$  (див. перший рядок табл. 6). Очевидно, що графік функції  $y = -x^2$  можна одержати з графіка функції  $y = x^2$  симетричним відображенням його відносно осі  $Ox$ . Покажемо, що завжди графік функції  $y = -f(x)$  можна одержати з графіка функції  $y = f(x)$  симетричним відображенням відносно осі  $Ox$ .

- Дійсно, за означенням графік функції  $y = f(x)$  складається з усіх точок  $M$  координатної площини, які мають координати  $(x; y) = (x; f(x))$ . Тоді графік функції  $y = -f(x)$  складається з усіх точок  $K$  координатної площини, які мають координати  $(x; y) = (x; -f(x))$ . Точки  $M(x; f(x))$  і  $K(x; -f(x))$  розміщено на координатній площині симетрично відносно осі  $Ox$  (рис. 37). Отже, кожна точка  $K$  графіка функції  $y = -f(x)$  одержується симетричним відображенням відносно осі  $Ox$  деякої точки  $M$  графіка функції  $y = f(x)$ . Тому

**графік функції  $y = -f(x)$  можна одержати з графіка функції  $y = f(x)$  його симетричним відображенням відносно осі  $Ox$ .** ○

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції  $y = |f(x)|$ . Маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Ox\text{).} \end{cases}$$

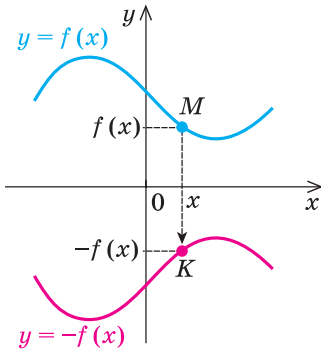


Рис. 37

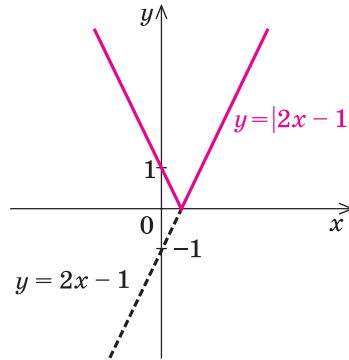


Рис. 38

Отже,

**графік функції  $y = |f(x)|$  може бути побудований так: частина графіка функції  $y = f(x)$ , яка лежить вище осі  $Ox$  (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче осі  $Ox$ , відображується симетрично відносно цієї осі.**

Наприклад, на рисунку 38 і в таблиці 6 (рядок сьомий) з використанням цього правила зображено графік функції  $y = |2x - 1|$ .

## 2. Побудова графіка функції $y = f(-x)$ .

- Для побудови графіка функції  $y = f(-x)$  урахуємо, що в означенні графіка функції перша координата для точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату  $(-x)$ , то графік функції  $y = f(-x)$  складатиметься з усіх точок  $T$  координатної площини з координатами  $(-x; y) = (-x; f(x))$ , а графік функції  $y = f(x)$  — з усіх точок  $M(x; f(x))$ .

Точки  $M(x; f(x))$  і  $T(-x; f(x))$  розміщено на координатній площині симетрично відносно осі  $Oy$  (рис. 39). Отже, кожна точка  $T$  графіка функції  $y = f(-x)$  одержується симетричним відображенням відносно осі  $Oy$  деякої точки  $M$  графіка функції  $y = f(x)$ . Тому

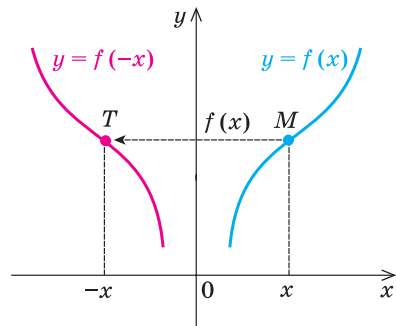


Рис. 39

**графік функції  $y = f(-x)$  можна одержати з графіка функції  $y = f(x)$  його симетричним відображенням відносно осі  $Oy$ .** ○

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції  $y = f(|x|)$ . Маємо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \geq 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ f(-x) & \text{при } x < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Oy). \end{cases}$$

Інакше кажучи, для того щоб отримати графік  $y = f(|x|)$  при  $x < 0$  (тобто ліворуч від осі  $Oy$ ), потрібно відобразити симетрично відносно осі  $Oy$  ту частину графіка функції  $y = f(x)$ , яка лежить праворуч від осі  $Oy$ . Таким чином, частину графіка функції  $y = f(x)$ , яка розташована ліворуч від осі  $Oy$ , узагалі не використовують у побудові графіка функції  $y = f(|x|)$ . Отже,

**графік функції  $y = f(|x|)$  будують так: частину графіка функції  $y = f(x)$ , яка лежить праворуч від осі  $Oy$  (і на самій осі), залишають без зміни і саме цю частину відображують симетрично відносно осі  $Oy$ .**

Наприклад, на рисунку 40 та в табл. 6 (рядок восьмий) з використанням цього правила зображено графік функції  $y = 2|x| - 1$ .

### 3. Побудова графіка функції $y = f(x - a)$ .

● Для того щоб побудувати графік функції  $y = f(x - a)$ , виберемо як першу координату точки  $N$  цього графіка значення  $x + a$ . Тоді графік функції  $y = f(x - a)$  складається з усіх точок  $N$  координатної площини з координатами  $(x + a; y) = (x + a; f(x + a - a)) = (x + a; f(x))$ , а графік функції  $y = f(x)$  — з усіх точок  $M(x; f(x))$ .

Якщо точка  $M$  має координати  $(x; y)$ , а точка  $N$  — координати  $(x + a; y)$ , то перетворення точок  $(x; y) \rightarrow (x + a; y)$  — це паралельне перенесення точки  $M$  уздовж осі  $Ox$  на  $a$  одиниць (тобто на вектор  $(a; 0)$ ).

Оскільки кожену точку  $N$  графіка функції  $y = f(x - a)$  одержують паралельним перенесенням деякої точки  $M$  графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Ox$  на  $a$  одиниць (рис. 41), то

**графік функції  $y = f(x - a)$  можна одержати паралельним перенесенням графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Ox$  на  $a$  одиниць.** ○

Наприклад, у третьому рядку таблиці 6 зображено графік функції  $y = (x - 2)^2$  (виконано паралельне перенесення графіка  $y = x^2$  на +2 одиниці вздовж осі  $Ox$ ) та графік функції  $y = (x + 3)^2$  (виконано паралельне перенесення графіка  $y = x^2$  на -3 одиниці вздовж осі  $Ox$ ).

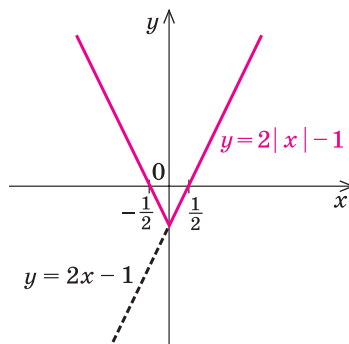


Рис. 40

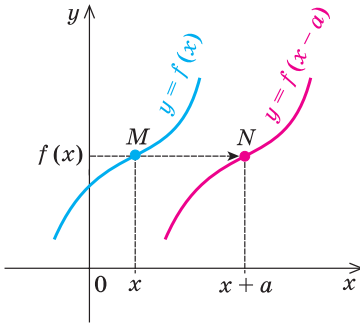


Рис. 41

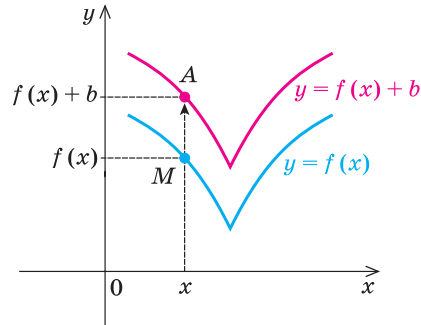


Рис. 42

#### 4. Побудова графіка функції $y = f(x) + b$ .

- Графік функції  $y = f(x) + b$  складається з усіх точок  $A$  координатної площини з координатами  $(x; y) = (x; f(x) + b)$ , а графік функції  $y = f(x)$  — з усіх точок  $M(x; f(x))$ .

Але якщо точка  $M$  має координати  $(x; y)$ , а точка  $A$  — координати  $(x; y + b)$ , то перетворення точок  $(x; y) \rightarrow (x; y + b)$  — це паралельне перенесення точки  $M$  уздовж осі  $Oy$  на  $b$  одиниць (тобто на вектор  $(0; b)$ ).

Оскільки кожна точка  $A$  графіка функції  $y = f(x) + b$  одержується паралельним перенесенням деякої точки  $M$  графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Oy$  на  $b$  одиниць (рис. 42), то

**графік функції  $y = f(x) + b$  можна одержати паралельним перенесенням графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Oy$  на  $b$  одиниць.** ○

Наприклад, у четвертому рядку таблиці 6 зображено графік функції  $y = x^2 + 2$  (виконано паралельне перенесення графіка функції  $y = x^2$  на  $+2$  одиниці вздовж осі  $Oy$ ) та графік функції  $y = x^2 - 1$  (виконано паралельне перенесення графіка функції  $y = x^2$  на  $-1$  уздовж осі  $Oy$ ).

#### 5. Побудова графіка функції $y = kf(x)$ .

- Графік функції  $y = kf(x)$  ( $k > 0$ ) складається з усіх точок  $B(x; kf(x))$ , а графік функції  $y = f(x)$  — з усіх точок  $M(x; f(x))$  (рис. 43).

Назвемо *перетворенням розтягу* уздовж осі  $Oy$  з коефіцієнтом  $k$  (де  $k > 0$ ) таке перетворення фігури  $F$ , при якому кожна її точка  $(x; y)$  переходить у точку  $(x; ky)$ .

Перетворення розтягу уздовж осі  $Oy$  задають формулами:  $x' = x$ ;  $y' = ky$ . Ці

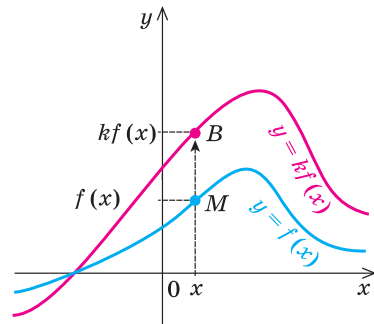


Рис. 43

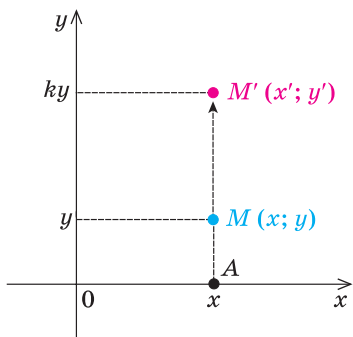


Рис. 44

формули виражають координати  $(x'; y')$  точки  $M'$ , у яку переходить точка  $M(x; y)$  при перетворенні розтягу вздовж осі  $Oy$  (рис. 44). При цьому відбувається розтягування відрізка  $AM$  у  $k$  разів, і в результаті точка  $M$  переходить у точку  $M'$ . (Зауважимо, що іноді вказане перетворення графіка функції  $y = f(x)$  називають *розтягом* тільки при  $k > 1$ , а при  $0 < k < 1$  його називають *стиском уздовж осі  $Oy$*  у  $\frac{1}{k}$  разів.)

Як бачимо, кожна точка  $B$  графіка функції  $y = kf(x)$  одержується з точки  $M$  перетворенням розтягу вздовж осі  $Oy$ . При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі  $Oy$ . Наприклад, якщо графіком функції  $y = f(x)$  була парабола, то після розтягування або стискування графік залишається параболою. Тому

**графік функції  $y = kf(x)$  ( $k > 0$ ) одержується з графіка функції  $y = f(x)$  його розтягуванням (при  $k > 1$  розтяг у  $k$  разів) або стискуванням (при  $0 < k < 1$  стиск у  $\frac{1}{k}$  разів) уздовж осі  $Oy$ .** ○

## 6. Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$ .

- Для побудови графіка функції  $y = f(\alpha x)$  ( $\alpha > 0$ ) виберемо як першу координату точки  $C$  цього графіка значення  $\frac{x}{\alpha}$ . Тоді графік функції  $y = f(\alpha x)$  складатиметься з усіх точок  $C$  з координатами  $\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha \frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$ , а графік функції  $y = f(x)$  — з усіх точок  $M(x; f(x))$  (рис. 45).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі  $Ox$  з коефіцієнтом  $\alpha$*  (де  $\alpha > 0$ ) таке перетворення фігури  $F$ , при якому кожна її точка  $(x; y)$  переходить у точку  $(\alpha x; y)$ .

Перетворення розтягу вздовж осі  $Ox$  задається формулами:  $x' = \alpha x$ ;  $y' = y$ . Ці формули виражають координати  $(x'; y')$  точки  $M'$ , у яку переходить точка  $M(x; y)$  при перетворенні розтягу вздовж осі  $Ox$  (рис. 46). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка  $BM$  в  $\alpha$  разів, і в результаті точка  $M$  переходить у точку  $M'$ . (Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають *розтягом* (у  $\frac{1}{\alpha}$  разів) тільки при  $0 < \alpha < 1$ , а при  $\alpha > 1$  його називають *стис-*



ком уздовж осі  $Ox$  ( $\alpha$  разів). Як бачимо, кожна точка  $C$  графіка функції  $y = f(\alpha x)$  одержується з точки  $M$  графіка функції  $y = f(x)$  перетворенням розтягу вздовж осі  $Ox$  (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому

**графік функції  $y = f(\alpha x)$  ( $\alpha > 0$ ) одержується з графіка функції  $y = f(x)$  його розтягуванням (при  $0 < \alpha < 1$  розтяг в  $\frac{1}{\alpha}$  разів) або стискуванням (при  $\alpha > 1$  стиск в  $\alpha$  разів) уздовж осі  $Ox$ . ○**

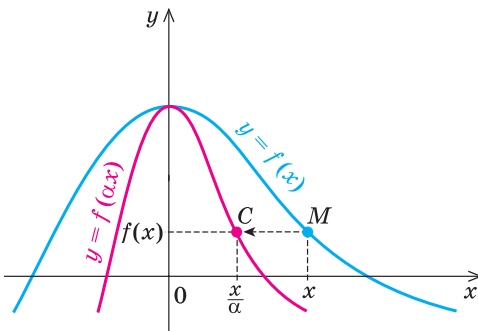


Рис. 45

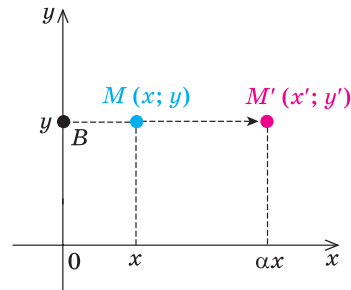
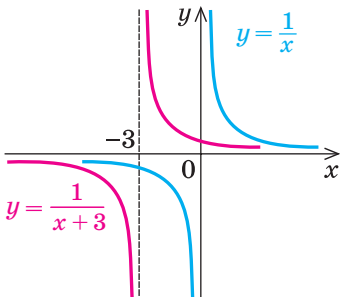


Рис. 46

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Побудуйте графік функції  $y = \frac{1}{x+3}$ .

*Розв'язання*



*Коментар*

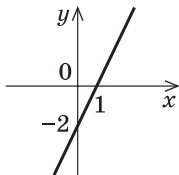
Ми можемо побудувати графік функції  $y = f(x) = \frac{1}{x}$ . Тоді графік функції  $y = \frac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x - (-3))$  можна одержати паралельним перенесенням графіка функції  $y = f(x)$  уздовж осі  $Ox$  на  $-3$  одиниці (тобто вліво).

**Приклад 2** Побудуйте графік функції  $y = -|2x - 2|$ .

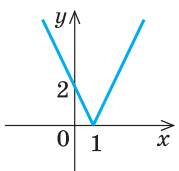
*Розв'язання*

► Послідовно будуємо графіки:

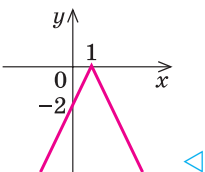
1.  $y = 2x - 2$



2.  $y = |2x - 2|$



3.  $y = -|2x - 2|$



*Коментар*

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції.

1. Ми можемо побудувати графік функції  $y = f(x) = 2x - 2$  (пряма).

2. Потім можна побудувати графік функції  $y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$  (вище осі  $Ox$  графік функції  $y = 2x - 2$  залишається без зміни, а частина графіка, розташована нижче осі  $Ox$ , відображається симетрично відносно осі  $Ox$ ).

3. Після цього можна побудувати графік функції

$$y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$$

(симетрія графіка функції  $y = \varphi(x)$  відносно осі  $Ox$ ).

**Приклад 3\*** Побудуйте графік функції  $y = \sqrt{4 - |x|}$ .

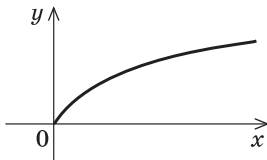
*Розв'язання*

► Запишемо рівняння заданої функції так:

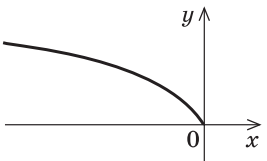
$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

Послідовно будуємо графіки:

1.  $y = \sqrt{x}$



2.  $y = \sqrt{-x}$



*Коментар*

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в таблиці 4, підкореневий вираз функції запишемо так:

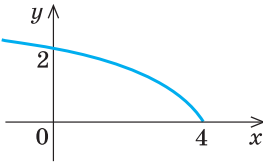
$$y = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

1. Ми можемо побудувати графік функції  $y = f(x) = \sqrt{x}$ .

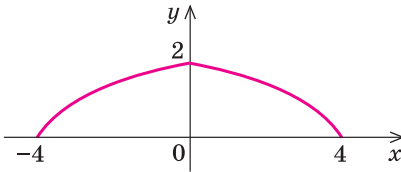
2. Потім можна побудувати графік функції  $y = g(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$

(симетрія графіка функції  $f(x)$  відносно осі  $Oy$ ).

3.  $y = \sqrt{-(x-4)}$



4.  $y = \sqrt{-(|x|-4)}$



3. Після цього можна побудувати графік функції

$$y = \varphi(x) = \sqrt{-(x-4)} = g(x-4)$$

(паралельне перенесення графіка функції  $g(x)$  уздовж осі  $Ox$  на 4 одиниці).

4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції

$$y = \sqrt{-(|x|-4)} = \varphi(|x|) = \sqrt{4-|x|}$$

(праворуч від осі  $Oy$  відповідна частина графіка функції  $y = \varphi(x)$  залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі  $Oy$ ).

### Заяпитання для контролю

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції  $y = f(x)$  одержати графік функції:

- 1)  $y = -f(x)$ ;      2)  $y = f(-x)$ ;      3)  $y = f(x-a)$ ;  
 4)  $y = f(x) + c$ ;      5)  $y = kf(x)$ , де  $k > 0$ ;      6)  $y = f(ax)$ , де  $a > 0$ ;  
 7)  $y = |f(x)|$ ;      8)  $y = f(|x|)$ .

2\*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких із графіка функції  $y = f(x)$  можна одержати графіки вказаних вище функцій.

### Вправи

Побудуйте графіки функцій та відповідностей (1–7):

1. 1)  $y = |x-5|$ ;      2)  $y = |x|-5$ ;      3)  $y = ||x|-5|$ ;      4\*)  $|y| = x-5$ .  
 2. 1°)  $y = x^2-9$ ;      2)  $y = |x^2-9|$ ;      3)  $y = |x^2|-9$ ;      4\*)  $|y| = x^2-9$ .  
 3. 1°)  $y = (x+1)^2$ ;      2)  $y = (|x|+1)^2$ ;  
     3)  $y = (x+1)^2-3$ ;      4)  $y = |(x+1)^2-3|$ .  
 4. 1°)  $y = \frac{1}{x+2}$ ;      2)  $y = \left| \frac{1}{x+2} \right|$ ;      3)  $y = \frac{1}{|x|+2}$ ;      4\*)  $|y| = \frac{1}{x+2}$ .  
 5. 1°)  $y = -\frac{2}{x}$ ;      2°)  $y = 3 - \frac{2}{x}$ ;      3)  $y = -\frac{2}{x-1}$ ;      4)  $y = -\frac{2}{|x|}$ .

6. 1°)  $y = \sqrt{x-3}$ ; 2°)  $y = \sqrt{x} - 3$ ; 3)  $y = \sqrt{|x|-3}$ ; 4)  $y = |\sqrt{x} - 3|$ ;  
 5\*)  $y = |\sqrt{|x|-3}|$ ; 6\*)  $|y| = \sqrt{x-3}$ ; 7\*)  $|y| = \sqrt{x} - 3$ .
7. 1°)  $y = -\sqrt{x}$ ; 2°)  $y = -\sqrt{x} + 4$ ; 3)  $y = -\sqrt{|x|}$ ; 4)  $y = -\sqrt{x-1}$ .
8. Функція  $y = f(x)$  задана на проміжку  $[0; 12]$  і має графік, зображений на рисунку 47. Побудуйте графіки функцій (та відповідностей 9° і 10°):  
 1)  $y = -f(x)$ ; 2)  $y = f(-x)$ ; 3)  $y = |f(x)|$ ; 4)  $y = f(|x|)$ ;  
 5\*)  $y = 2f(x)$ ; 6\*)  $y = f(2x)$ ; 7\*)  $y = \frac{1}{2}f(x)$ ; 8\*)  $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ ;  
 9\*)  $|y| = f(x)$ ; 10\*)  $|y| = f(|x|)$ .

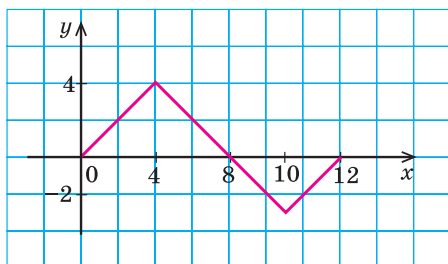


Рис. 47

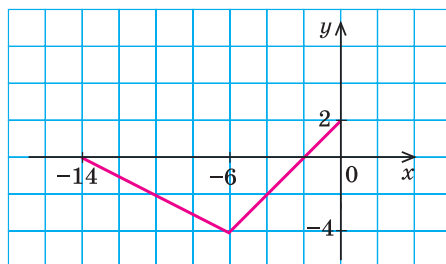


Рис. 48

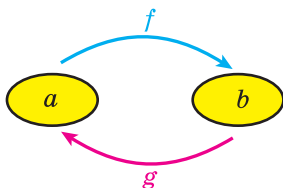
9. Виконайте завдання вправи 8 для функції  $y = f(x)$ , заданої на проміжку  $[-14; 0]$ , графік якої зображено на рисунку 48.

## 2.4. Обернена функція

Таблиця 7

### 1. Поняття оберненої функції

Якщо функція  $y = f(x)$  набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію  $y = g(x)$ , яка називається *оберненою до функції  $y = f(x)$* :



для кожного  $a \in D(f)$ ,  
якщо  $f(a) = b$ , то  $g(b) = a$

$E(f) = D(g)$ ;  $D(f) = E(g)$

Функції  $f(x)$  і  $g(x)$  взаємно обернені

Продовження табл. 7

2. Властивості оберненої функції	
	<p>1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої <math>y = x</math></p>
	<p>2) Якщо функція <math>f(x)</math> зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо <math>f(x)</math> зростає, і спадає, якщо <math>f(x)</math> спадає</p>
3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$	
Алгоритм	Приклад
<p>1. З'ясувати, чи буде функція <math>y = f(x)</math> оборотною на всій області визначення: для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння <math>y = f(x)</math> єдиний корінь відносно змінної <math>x</math>. Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція (наприклад, це може бути проміжок, де функція <math>y = f(x)</math> зростає або спадає).</p> <p>2. З рівності <math>y = f(x)</math> виразити <math>x</math> через <math>y</math>.</p> <p>3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через <math>x</math>, а функцію — через <math>y</math>.</p>	<p>Знайдіть функцію, обернену до функції <math>y = 2x + 4</math>. ▶ З рівності <math>y = 2x + 4</math> можна односторонньо виразити <math>x</math> через <math>y</math>:</p> $x = \frac{1}{2}y - 2.$ <p>Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через <math>y</math>, а функцію — через <math>x</math>. Позначимо в одержаній формулі аргумент через <math>x</math>, а функцію — через <math>y</math>.</p> <p>Маємо функцію <math>y = \frac{1}{2}x - 2</math>, обернену до функції <math>y = 2x + 4</math>. ◀</p>

## Пояснення й обґрунтування

1. **Поняття оберненої функції.** Відомо, що залежність шляху від часу для тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю  $v_0$ , виражається формулою  $S = v_0 t$ . З цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху  $t = \frac{S}{v_0}$ . Функцію  $t(S) = \frac{S}{v_0}$  називають

*оберненою до функції*  $S(t) = v_0 t$ . Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню  $t$  ( $t \geq 0$ ) відповідає єдине значення  $S$  і, навпаки, кожному значенню  $S$  ( $S \geq 0$ ) відповідає єдине значення  $t$ .

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція  $f(x)$  набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається *оборотною*). Тоді для кожного числа  $y_0 = b$  (з області значень функції  $f(x)$ ) існує єдине значення  $x_0 = a$ , таке, що  $f(a) = b$ . Розглянемо нову функцію  $g(x)$ , яка кожному числу  $b$  з області значень функції  $f(x)$  ставить у відповідність число  $a$ , тобто  $g(b) = a$  для кожного  $b$  з області значень функції  $f(x)$ . У цьому випадку функція  $g(x)$  називається оберненою до функції  $f(x)$ , а функція  $f(x)$  — оберненою до функції  $g(x)$ .

З означення оберненої функції випливає, що область значень прямої функції  $E(f)$  є областю визначення оберненої функції  $D(g)$ , а область визначення прямої функції  $D(f)$  є областю значень оберненої функції  $E(g)$ .

Отже,

$$E(f) = D(g), D(f) = E(g).$$

## 2. Властивості оберненої функції

**Властивість 1.** Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої  $y = x$ .

- Ураховуючи наведену вище процедуру побудови функції, оберненої до функції  $y = f(x)$ , маємо: якщо  $f(a) = b$ , то за означенням графіка функції точка  $M$  з координатами  $(a; b)$  належить графіку функції  $y = f(x)$ . Аналогічно, оскільки  $g(b) = a$ , то точка  $M_1$  з координатами  $(b; a)$  належить графіку функції  $y = g(x)$ . Точки  $M(a; b)$  і  $M_1(b; a)$  розміщені на координатній площині симетрично відносно прямої  $y = x$  (рис. 49).

Дійсно, пряма  $y = x$  є віссю симетрії системи координат. Отже, при симетрії відносно прямої  $y = x$  вісь  $Ox$  відображається на вісь  $Oy$ , а вісь  $Oy$  — на

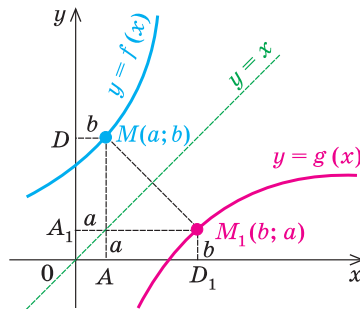


Рис. 49

вісь  $Ox$ . Тоді (наприклад, при  $a > 0$  і  $b > 0$ ) прямокутник  $OAMD$  із сторонами  $OA = a$  і  $OD = b$  на осях координат відображається на прямокутник  $OA_1M_1D_1$  із сторонами на осях координат, у якого  $OA_1 = OA = a$  і  $OD_1 = OD = b$ . Таким чином, при симетрії відносно прямої  $y = x$  точка  $M(a; b)$  відображається в точку  $M_1(b; a)$  (а точка  $M_1$  — у точку  $M$ ). Отже, при симетрії відносно прямої  $y = x$  будь-яка точка  $M(a; b)$ , що належить графіку функції  $y = f(x)$ , має відповідну точку  $M_1(b; a)$ , яка належить графіку функції  $y = g(x)$ , а будь-яка точка  $M_1(b; a)$ , що належить графіку функції  $y = g(x)$ , має відповідну точку  $M(a; b)$ , яка належить графіку функції  $y = f(x)$ . Отримуємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої  $y = x$ . ○

**Властивість 2.** Якщо функція  $f(x)$  зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо  $f(x)$  зростає, і спадає, якщо  $f(x)$  спадає.

- Дійсно, якщо функція  $f(x)$  зростає (спадає) на деякому проміжку, то за властивістю зростаючої (спадної) функції кожного свого значення вона набуває в єдиній точці з цього проміжку (див. приклад 6 до пункту 2.1), отже, вона має обернену функцію  $g(x)$  на цьому проміжку. Обґрунтувати, що функція  $g(x)$  зростає, якщо  $f(x)$  зростає, можна методом від супротивного.

Нехай числа  $a_1$  і  $a_2$  входять до області визначення функції  $f(x)$  і

$$a_2 > a_1. \quad (1)$$

Позначимо  $f(a_1) = b_1$ ,  $f(a_2) = b_2$ . Якщо функція  $f(x)$  зростає, то  $f(a_2) > f(a_1)$ , тобто  $b_2 > b_1$ . За означенням оберненої функції  $g(x)$  числа  $b_1$  і  $b_2$  входять до її області визначення і

$$g(b_1) = a_1, \quad g(b_2) = a_2. \quad (2)$$

Якщо припустити, що функція  $g(x)$  не є зростаючою, то з нерівності  $b_2 > b_1$  не може випливати нерівність  $g(b_2) > g(b_1)$  (інакше функція  $g(x)$  буде зростаючою), отже, може виконуватися тільки нерівність  $g(b_2) \leq g(b_1)$ . Але тоді за формулами (2) одержуємо  $a_2 \leq a_1$ , що суперечить умові (1). Отже, наше припущення неправильне, і функція  $g(x)$  зростає, якщо  $f(x)$  зростає.

Аналогічно обґрунтовується, що у випадку, коли функція  $f(x)$  спадає, обернена до неї функція  $g(x)$  теж спадає. ○

**3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції  $y = f(x)$ .** З означення оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності необхідно знати, як значення  $x$  виражається

через значення  $y$ . Це можна зробити, розв'язавши рівняння  $y = f(x)$  відносно змінної  $x$ . Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх  $y$  з області значень функції  $f(x)$ , і ми одержимо формулу  $x = g(y)$ , яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через  $y$ , а функцію — через  $x$ . Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції  $y = f(x)$ .

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в таблиці 7 і зrealізовано в наступних прикладах.

### Приклади розв'язування завдань

**Приклад 1** Знайдіть функцію, обернену до функції  $y = \frac{1}{x-1}$ .

#### Розв'язання

► Область визначення:  $x \neq 1$ . Тоді з рівності  $y = \frac{1}{x-1}$  маємо

$$xy - y = 1, \quad xy = y + 1, \quad x = \frac{y+1}{y}.$$

Позначаємо аргумент через  $x$ , а функцію — через  $y$  і одержуємо функцію  $y = \frac{x+1}{x}$ , обернену до заданої. ◀

#### Коментар

На всій області визначення ( $x \neq 1$ ) задана функція оборотна, оскільки з рівняння  $y = \frac{1}{x-1}$  можна однозначно виразити  $x$  через  $y$  ( $y \neq 0$  на області значень заданої функції). Одержана формула  $x = \frac{y+1}{y}$  задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через  $y$ , а функцію — через  $x$ . Змінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

**Приклад 2** Знайдіть функцію, обернену до функції  $y = x^2$ .

#### Розв'язання

► З рівності  $y = x^2$  при  $y \geq 0$  одержуємо  $x = \pm\sqrt{y}$ . Тоді при  $y > 0$  одному значенню  $y$  відповідають два значення  $x$ . Отже, на всій області визначення  $x \in (-\infty; +\infty)$  функція  $y = x^2$  не є оборотною, і для неї неможливо знайти обернену функцію. ◀

#### Коментар

Область значень заданої функції:  $y \geq 0$ . Але при  $y > 0$  з рівності  $y = x^2$  не можна однозначно виразити  $x$  через  $y$ . Наприклад, при  $y = 4$  одержуємо  $x = \pm 2$ . Через це ми не можемо значенню  $y = 4$  поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.



**Приклад 3** Знайдіть функцію, обернену до функції  $y = x^2$  при  $x \geq 0$ .

*Розв'язання*

► З рівності  $y = x^2$  при  $y \geq 0$  одержуємо  $x = \pm\sqrt{y}$ . Ураховуючи, що за умовою  $x \geq 0$ , маємо  $x = \sqrt{y}$ .

Позначимо аргумент через  $x$ , а функцію — через  $y$  і одержимо, що функцією, оберненою до функції  $y = x^2$ , яка задана тільки при  $x \geq 0$ , буде функція  $y = \sqrt{x}$ . ◀

*Коментар*

Множина значень заданої функції:  $y \geq 0$ . При  $x \geq 0$  задана функція  $y = x^2$  зростає, отже, на проміжку  $x \geq 0$  вона має обернену функцію. Тому на цьому проміжку рівняння  $x^2 = y$  ми зможемо однозначно розв'язати: при  $x \geq 0$  маємо  $x = \sqrt{y}$ .

Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через  $y$ , а функцію — через  $x$ . Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Зауваження. У прикладах 2 і 3 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією й тією самою формулою. Як відомо, графіком функції  $y = x^2$  (приклад 2) є парабола, а графіком функції  $y = x^2$  при  $x \geq 0$  (приклад 3) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 50).

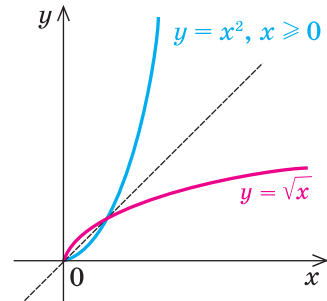


Рис. 50

**Заяпитання для контролю**

1. За якої умови для заданої функції  $y = f(x)$  можна побудувати обернену функцію?
2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції  $y = f(x)$ , яка задана таблицею:

$x$	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте обернену функцію  $y = g(x)$  за допомогою таблиці:

$x$				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.
4. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.
5. Чи існує функція, обернена до функції  $y = x^2$ , де  $x \leq 0$ ? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою виду  $y = g(x)$ .

### Вправи

1. Запишіть формулу, яка задає функцію  $y = g(x)$ , обернену до заданої. Укажіть область визначення і множину значень функції  $g(x)$ :  
 1°)  $y = 3x - 6$ ;    2°)  $y = -3x - 6$ ;    3)  $y = \frac{2}{x}$ ;    4)  $y = -\frac{1}{x}$ ;    5)  $y = \sqrt{x}$ .
2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:  
 1°)  $y = 2x$ ;    2°)  $y = x - 2$ ;    3)  $y = -\frac{1}{x}$ ;    4\*)  $y = \frac{1}{x-1}$ ;    5\*)  $y = \sqrt{x+1}$ .
3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графік даної функції і функції, оберненої до неї:  
 1)  $y = \frac{1}{4}x^2$  при  $x \geq 0$ ;    2)  $y = \frac{1}{4}x^2$  при  $x \leq 0$ ;  
 3)  $y = (x - 2)^2$  при  $x \geq 2$ ;    4)  $y = x^2 - 2$  при  $x \leq 0$ .

## § 3 РІВНЯННЯ

### 3.1. Рівняння-наслідки та рівносильні перетворення рівнянь

Таблиця 8

1. Поняття рівняння та його коренів	
Означення	Приклад
<p><i>Рівність зі змінною називається рівнянням. У загальному вигляді рівняння з однією змінною <math>x</math> записують так: <math>f(x) = g(x)</math>.</i></p> <p>Під цим коротким записом розуміють математичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні</p>	<p><math>2x = -1</math> — лінійне рівняння;</p> <p><math>x^2 - 3x + 2 = 0</math> — квадратне рівняння;</p> <p><math>\sqrt{x+2} = x</math> — ірраціональне рівняння (містить змінну під знаком кореня)</p>

Продовження табл. 8

<p><i>Коренем</i> (або розв'язком) <i>рівняння</i> з однією змінної називається значення змінної, яке перетворює це рівняння на правильну рівність.</p> <p><b>Розв'язати рівняння</b> — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає</p>	<p><math>x = 2</math> — корінь рівняння <math>\sqrt{x+2} = x</math>, оскільки при <math>x = 2</math> одержуємо правильну рівність: <math>\sqrt{4} = 2</math>, тобто <math>2 = 2</math></p>
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
<p><b>Областю допустимих значень</b> (або <b>областю визначення</b>) <b>рівняння</b> називається <b>спільна область визначення</b> для функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math>, що стоять у лівій і правій частинах рівняння</p>	<p>Для рівняння <math>\sqrt{x+2} = x</math>  ОДЗ: <math>x + 2 \geq 0</math>, тобто <math>x \geq -2</math>, оскільки область визначення функції <math>f(x) = \sqrt{x+2}</math> визначається умовою <math>x + 2 \geq 0</math>, а область визначення функції <math>g(x) = x</math> є множина всіх дійсних чисел</p>
3. Рівняння-наслідки	
<p><b>Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого.</b></p> <p>Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо рівняння-наслідки.</p> <p>При використанні рівнянь-наслідків не втрачаються корені початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування (див. пункт 5 цієї таблиці)</p>	<p style="text-align: center;"><math>\sqrt{x+2} = x.</math></p> <p>► Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:</p> $(\sqrt{x+2})^2 = x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2, x_2 = -1.$ <p><i>Перевірка.</i> <math>x = 2</math> — корінь (див. вище); <math>x = -1</math> — сторонній корінь (при <math>x = -1</math> одержуємо неправильну рівність <math>1 = -1</math>). ◁</p> <p><i>Відповідь:</i> 2.</p>

4. Рівносильні рівняння	
Означення	Найпростіші теореми
<p>Два рівняння називаються <b>рівносильними на деякій множині</b>, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені.</p> <p>Це означає, що <i>кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого є коренем першого</i> (схема розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень наведена в пункті 5 цієї таблиці)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині)</li> <li>Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого рівняння)</li> </ol>

## 5. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь



<sup>1</sup> Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь розглянуто в пункті 3.2.

## Пояснення й обґрунтування

**1. Поняття рівняння та його коренів.** Рівняння в математиці найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому в загальному вигляді рівняння з однією змінною  $x$  записують так:

$$f(x) = g(x).$$

Найчастіше рівняння означають коротше — як рівність із змінною.

Нагадаємо, що *коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, при підстановці якого в рівняння утворюється правильна рівність. Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.*

Наприклад, рівняння  $2x = -1$  має єдиний корінь  $x = -\frac{1}{2}$ , а рівняння  $|x| = -1$  не має коренів, оскільки значення  $|x|$  не може бути від'ємним числом.

**2. Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння.** Якщо задано рівняння  $f(x) = g(x)$ , то спільна область визначення для функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  називається *областю допустимих значень* цього рівняння. (Іноді використовують також терміни «область визначення рівняння» або «множина допустимих значень рівняння».) Наприклад, для рівняння  $x^2 = x$  областю допустимих значень є всі дійсні числа. Це можна записати, наприклад, так: ОДЗ:  $x \in \mathbf{R}$ , оскільки функції  $f(x) = x^2$  і  $g(x) = x$  мають області визначення  $\mathbf{R}$ .

Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції  $f(x)$ , так і до області визначення функції  $g(x)$  (інакше ми не зможемо отримати правильну числову рівність). Отже, *кожен корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння.* Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ рівняння при його розв'язуванні.

Наприклад, у рівнянні  $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = x$  функція  $g(x) = x$  визначена при всіх дійсних значеннях  $x$ , а функція  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$  — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цього рівняння задається системою

$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases} \text{ з якої одержуємо систему } \begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 1, \end{cases}$$

що не має розв'язків. Таким чином, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

Зазначимо, що знаходження ОДЗ заданого рівняння може бути корисним для його розв'язування, але не завжди є обов'язковим елементом розв'язування.

**3. Методи розв'язування рівнянь.** Для розв'язування рівнянь використовують методи *точного* і *наближеного розв'язування*. Зокрема, для точного розв'язування рівнянь у курсі математики 5–6 класів використовували залежності між компонентами та результатами дій і властивості числових рівностей; у курсі алгебри 7–9 класів — рівносильні перетворення рівнянь, а для наближеного розв'язування рівнянь — графічний метод.

Графічний метод розв'язування рівнянь не дає високої точності знаходження коренів рівняння, і за його допомогою найчастіше можна дістати лише грубі наближення коренів. Іноді зручно графічно визначити кількість коренів рівняння або знайти межі, у яких знаходяться ці корені. У деяких випадках можна графічно довести, що рівняння не має коренів. З указаних причин у шкільному курсі алгебри і початків аналізу під вимогою «розв'язати рівняння» розуміється вимога «використовуючи методи точного розв'язування, знайти корені даного рівняння». Наближеними методами розв'язування рівнянь можна користуватися тільки тоді, коли це зазначено в умові задачі (наприклад, якщо ставиться задача розв'язати рівняння графічно).

Переважно при розв'язуванні рівнянь різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування. Перший із них полягає в тому, що задане рівняння замінюють більш простим рівнянням, яке має ті самі корені, — рівносильним рівнянням. У свою чергу, одержане рівняння замінюють простішим, рівносильним йому, і т. д. У результаті одержують найпростіше рівняння, яке рівносильне заданому і корені якого легко знайти. Ці корені і тільки вони є коренями даного рівняння.

Другий метод розв'язування рівнянь полягає в тому, що задане рівняння замінюють простішим рівнянням, до коренів якого належать усі корені даного рівняння, тобто замінюють так званим рівнянням-наслідком. У свою чергу, одержане рівняння замінюють більш простим рівнянням-наслідком доти, поки не одержать найпростіше рівняння, корені якого легко знайти. Тоді всі корені заданого рівняння знаходяться серед коренів останнього рівняння. Отже, щоб знайти корені заданого рівняння, достатньо корені останнього рівняння підставити в задане рівняння. За допомогою такої перевірки відділяють корені заданого рівняння (вилучають так звані *сторонні корені* — ті корені останнього рівняння, які не задовольняють заданому).

У наступному пункті буде також показано застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь певного виду.

#### Рівняння-наслідки

Розглянемо докладніше, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків. При розв'язуванні рівнянь головне — не загубити корені заданого рівняння, і тому в першу чергу ми повинні стежити за тим, щоб кожен корінь початкового рівняння залишався коренем наступного. Фактично це і є означенням рівняння-наслідку:

**у тому випадку, коли кожний корінь першого рівняння є коренем другого, друге рівняння називається наслідком першого.**

Це означення дозволяє обґрунтувати такий орієнтир: для одержання рівняння-наслідку достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожне наступне рівняння ми можемо одержати як правильну числову рівність.

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то кожен корінь першого рівняння перетворює це рівняння на правильну числову рівність. Але тоді друге рівняння теж буде правильною числовою рівністю, тобто розглядуване значення змінної є коренем і другого рівняння, а це й означає, що друге рівняння є наслідком першого.

Застосуємо наведений орієнтир до розв'язування рівняння  $\frac{x^2-1}{x+1}=0$  (поки що не використовуючи відому умову рівності дробу нулю).

Якщо правильно, що дріб дорівнює нулю, то обов'язково його чисельник дорівнює нулю. Отже, з даного рівняння одержуємо рівняння-наслідок  $x^2 - 1 = 0$ . Але тоді правильно, що  $(x - 1)(x + 1) = 0$ . Останнє рівняння має два корені:  $x = 1$  та  $x = -1$ . Підставляючи їх у задане рівняння, бачимо, що тільки корінь  $x = 1$  задовольняє початковому рівнянню. Чому це сталося?

Це відбувається тому, що, використовуючи рівняння-наслідки, ми гарантуємо тільки те, що корені заданого рівняння не втрачаються (кожний корінь першого рівняння є коренем другого). Але друге рівняння, крім кореня першого рівняння, має ще й інший корінь, який не є коренем першого рівняння. Для першого рівняння цей корінь є *стороннім*, і, щоб його відсіяти, виконуємо перевірку підстановкою коренів у початкове рівняння. (Більш детально причини появи сторонніх коренів розглянуто в таблиці 9.) Отже, щоб правильно використовувати рівняння-наслідки для розв'язування рівнянь, необхідно пам'ятати ще один орієнтир: **при використанні рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, і тому перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.**

Схема застосування цих орієнтирів подана в таблиці 8. У пункті 3 цієї таблиці наведено розв'язання рівняння

$$\sqrt{x+2} = x. \quad (1)$$

Для того щоб розв'язати це рівняння за допомогою рівнянь-наслідків, достатньо задане рівняння розглянути як правильну числову рівність і зазначити, що у випадку, коли два числа рівні, то і їхні квадрати теж будуть рівні:

$$(\sqrt{x+2})^2 = x^2. \quad (2)$$

Отже, ми гарантуємо, що у випадку, коли рівність (1) правильна, то і рівність (2) теж буде правильною, а це й означає (як було показано вище), що рівняння (2) є наслідком рівняння (1). Якщо ми хоча б один раз використаємо рівняння-наслідки (а не рівносильні перетворення), то можемо отримати сторонні корені, і тоді до розв'язання обов'язково входить перевірка одержаних коренів підстановкою їх у задане рівняння.

Зауваження. Перехід від заданого рівняння до рівняння-наслідку можна позначити спеціальним значком  $\Rightarrow$ , але його використання для запису розв'язання не є обов'язковим. Разом з тим, якщо цей значок використано, то це свідчить про те, що ми скористалися рівняннями-наслідками, і тому обов'язково до запису розв'язання необхідно включити перевірку одержаних коренів.

### Рівносильні рівняння

З поняттям рівносильності ви знайомі з курсу алгебри 7 класу, де рівносильними називалися рівняння, які мали одні й ті самі корені. Зауважимо, що рівносильними вважалися і такі два рівняння, які не мали коренів. Формально будемо вважати, що і в цьому випадку рівняння мають одні й ті самі корені, оскільки відповіді до таких рівнянь однакові: «рівняння не має коренів» (точніше: однаковими є множини коренів таких рівнянь — вони обидві порожні, що позначаються символом  $\emptyset$ ).

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо розглядати більш загальне поняття рівносильності, а саме рівносильність на певній множині.

**Два рівняння називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені, тобто якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння є коренем першого.**

Для рівнянь, які задано на множині всіх дійсних чисел (наприклад, для лінійних), ми можемо дати однозначну відповідь на запитання «Чи рівносильні задані рівняння?». Наприклад, рівняння  $x + 3 = 0$  і  $2x + 6 = 0$  рівносильні, оскільки обидва мають однаковий корінь  $x = -3$  і інших коренів не мають. Отже, кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге.

При розгляді рівносильності рівнянь на множині, яка відрізняється від множини всіх дійсних чисел, відповідь на запитання «Чи рівносильні задані рівняння?» може суттєво залежати від того, на якій множині ми розглядаємо ці рівняння. Наприклад, якщо розглянути рівняння:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0, \quad (3)$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad (4)$$

то, як було показано вище, рівняння (3) має тільки один корінь  $x = 1$ , а рівняння (4) — два корені:  $x = 1$  та  $x = -1$ . Таким чином, на множині



всіх дійсних чисел ці рівняння не є рівносильними, оскільки у рівняння (4) є корінь  $x = -1$ , якого немає у рівняння (3). Але на множині додатних дійсних чисел ці рівняння рівносильні, оскільки на цій множині рівняння (3) має єдиний додатний корінь  $x = 1$  і рівняння (4) теж має тільки один додатний корінь  $x = 1$ . Отже, на множині додатних чисел кожне із цих рівнянь має ті самі розв'язки, що й друге.

Зазначимо, що множина, на якій розглядають рівносильність рівнянь, як правило, не задається штучно (як в останньому випадку). Найчастіше за таку множину вибирають ОДЗ заданого рівняння. Домовимося, що надалі

**всі рівносильні перетворення рівнянь (*a* також нерівностей і систем рівнянь та нерівностей) ми будемо виконувати на ОДЗ заданого рівняння (нерівності чи системи).**

Зазначимо, що в тому випадку, коли ОДЗ заданого рівняння є множиною всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних рівнянь). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання рівняння, а реально врахувати її, виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння.

Наприклад, для рівняння  $\sqrt{x+2} = x$  ОДЗ задається нерівністю  $x + 2 \geq 0$ . Коли ми переходимо до рівняння  $x + 2 = x^2$ , то для всіх його коренів це рівняння є правильною рівністю. Тоді вираз  $x^2$ , який стоїть у правій частині цієї рівності, завжди невід'ємний ( $x^2 \geq 0$ ), а отже, рівний йому вираз  $x + 2$  теж буде невід'ємним:  $x + 2 \geq 0$ . Але це й означає, що ОДЗ заданого рівняння ( $x + 2 \geq 0$ ) врахована автоматично для всіх коренів другого рівняння і тому при переході від рівняння  $\sqrt{x+2} = x$  до рівняння  $x + 2 = x^2$  ОДЗ заданого рівняння можна не записувати до розв'язання.

Для виконання рівносильних перетворень спробуємо виділити загальні орієнтири, аналогічні відповідним орієнтирам для одержання рівнянь-наслідків.

Як указано вище, виконуючи *рівносильні перетворення рівнянь*, необхідно **врахувати ОДЗ заданого рівняння** — це перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень рівнянь.

За означенням рівносильності рівнянь потрібно гарантувати, щоб кожен корінь першого рівняння був коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння був коренем першого. Для першої частини цієї вимоги ми вже виділили загальний орієнтир: достатньо гарантувати збереження правильної рівності при переході від першого рівняння до другого.

Щоб виконати другу частину цієї вимоги, достатньо друге рівняння розглянути як правильну рівність (тобто взяти таке значення змінної, яке є коренем другого рівняння) і гарантувати, що при переході до

першого рівняння правильна рівність зберігається (цей корінь залишається і коренем першого рівняння). Фактично з означення рівносильності рівнянь одержуємо, що *кожне з рівносильних рівнянь є наслідком другого рівняння*. Таким чином, виконуючи рівносильні перетворення, ми повинні гарантувати збереження правильної рівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих перетвореннях, а й при зворотних — це другий орієнтир для розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень. (Відповідні орієнтири схематично подано в пункті 5 таблиці 8.)

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень рівняння  $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ , достатньо врахувати його ОДЗ:  $x+1 \neq 0$  і умову рівності дробу нулю (дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю). Також слід звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.

Запис розв'язання в цьому разі може бути таким:

$\frac{x^2-1}{x+1}=0$ . ОДЗ:  $x+1 \neq 0$ . Тоді  $x^2-1=0$ . Отже,  $x=1$  (задовольняє умові ОДЗ) або  $x=-1$  (не задовольняє умові ОДЗ). *Відповідь: 1.*

Для виконання рівносильних перетворень рівнянь можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності рівнянь узагальнимо також формулювання найпростіших теорем про рівносильність, відомих з курсу алгебри 7 класу.

**Теорема 1.** *Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині).*

**Теорема 2.** *Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).*

Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне обґрунтуванню орієнтирів для рівносильних перетворень заданого рівняння.

Зауваження. Для позначення переходу від заданого рівняння до рівносильного йому рівняння можна використовувати спеціальний значок  $\Leftrightarrow$ , але в записі розв'язань це не є обов'язковим. (Хоча іноді ми його будемо використовувати, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення.)

**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x-1}$ .

*Розв'язання*

*Коментар*

► ОДЗ:  $x - 2 \neq 0$  і  $x - 1 \neq 0$ .

На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x-1} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{5(x-1) - 3(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)} = 0, \quad (3)$$

$$2x + 1 = 0, \quad (4)$$

тобто  $x = -\frac{1}{2}$ .

Урахуємо ОДЗ: при  $x = -\frac{1}{2}$

$$x - 2 = -\frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{2} \neq 0,$$

$$x - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -1\frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже,  $x = -\frac{1}{2}$  — корінь.

*Відповідь:*  $-\frac{1}{2}$ .

Використаємо рівносильні перетворення для розв'язування заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати ОДЗ, тому зафіксуємо її обмеження на початку розв'язання.

Зазначимо, що *в рівняннях обмеження ОДЗ можна тільки зафіксувати, але не розв'язувати, а в кінці перевірити, чи виконуються ці обмеження для знайдених коренів.*

При перенесенні члена заданого рівняння з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком одержуємо рівняння (1), рівносильне заданому.

Зводячи до спільного знаменника, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, знову одержуємо правильну рівність і можемо обґрунтувати, що при виконанні зворотних дій рівність теж не порушується, отже, одержані рівняння (1)–(3) рівносильні заданому (на його ОДЗ).

*Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дроби дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю.* Але друга умова вже врахована в обмеженнях ОДЗ, отже, одержуємо рівняння (4), рівносильне заданому рівнянню на його ОДЗ. Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки з урахуванням ОДЗ, то ми повинні перевірити, чи задовольняє одержане число обмеженням ОДЗ.

**4. Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів при розв'язуванні рівнянь.** Найбільш типові випадки появи сторонніх коренів та втрати коренів рівняння наведено в таблиці 9. Там же вказано, як у кожному з цих випадків одержати правильне (чи повне) розв'язання.

Причина	Перетворення, при яких це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання	
1. Поява сторонніх коренів			
<p><b>Одержання рівнянь-наслідків за рахунок:</b></p> <p><b>а) переходу до рівняння, у якого ОДЗ ширша, ніж у заданого рівняння;</b></p>	<p><b>1. Зведення подібних членів</b></p>	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$ <p>Перенесемо з правої частини рівняння в ліву доданок <math>\sqrt{x-2}</math> з протилежним знаком і зведемо подібні члени.</p> <p>Одержимо <math>x^2 - 6x = 0</math>,</p> $x_1 = 0, x_2 = 6$	
	<p><b>2. Зведення обох частин рівняння до спільного знаменника (при відкиданні знаменника)</b></p>	$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$ <p>Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник усіх дробів <math>(x+2)(x+3)</math>.</p> <p>Одержимо</p> $4(x+3) + 7(x+2) = 4,$ $11x = -22, x = -2$	
	<p><b>3. Піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрата</b></p>	$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$ <p>Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата.</p> $2x + 1 = x,$ $x = -1$	
<p><b>б) виконання перетворень, при яких відбувається неявне множення на нуль;</b></p>	<p><b>Множення обох частин рівняння на вираз зі змінною</b></p>	$x^2 + x + 1 = 0.$ <p>Помножимо обидві частини рівняння на <math>x-1</math>.</p> $(x-1)(x^2+x+1) = 0.$ <p>Одержимо <math>x^3 - 1 = 0</math>,</p> $x = 1$	

Таблиця 9

У чому полягає помилка	Як одержати правильне (чи повне) розв'язання	Приклад правильного (чи повного) розв'язання
при розв'язуванні рівняння		
$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння	<b>Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння</b>	$x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}.$ <p>► <math>x^2 - 6x = 0, x_1 = 0, x_2 = 6.</math>            Перевірка показує, що <math>x_1 = 0</math> — сторонній корінь, <math>x_2 = 6</math> — корінь.  <i>Відповідь:</i> 6. ◁</p>
$x = -2$ не є коренем заданого рівняння		$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}.$ <p>► <math>4(x+3) + 7(x+2) = 4;</math>  <math>11x = -22, x = -2.</math>            Перевірка показує, що <math>x = -2</math> — сторонній корінь.  <i>Відповідь:</i> коренів немає. ◁</p>
$x = -1$ не є коренем заданого рівняння		$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}.$ <p>► <math>2x + 1 = x, x = -1.</math>            Перевірка показує, що <math>x = -1</math> — сторонній корінь.  <i>Відповідь:</i> коренів немає. ◁</p>
$x = 1$ не є коренем заданого рівняння		<p>Для розв'язання цього рівняння не було необхідності множити на <math>x - 1</math>.</p> $x^2 + x + 1 = 0.$ <p>► <math>D = -3 &lt; 0.</math>  <i>Відповідь:</i> коренів немає. ◁            Якщо помножити обидві частини рівняння на <math>x - 1</math>, то перевірка показує, що <math>x = 1</math> — сторонній корінь, тобто рівняння не має коренів.</p>

Причина	Перетворення, при яких це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання
1. Поява сторонніх коренів		
<p><b>в) застосування до обох частин рівняння функції, яка не є зростаючою або спадною</b></p>	<p><b>Піднесення обох частин рівняння до парного степеня або застосування до обох частин рівняння тригонометричних функцій (див. с. 365)</b></p>	$x - 1 = 2x + 1.$ <p>Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:</p> $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ <p>Одержимо <math>3x^2 + 6x = 0</math>,  <math>x_1 = 0, x_2 = -2</math></p>
2. Втрата коренів		
<p><b>Явне чи неявне звуження ОДЗ заданого рівняння, зокрема виконання перетворень, у процесі яких відбувається неявне ділення на нуль</b></p>	<p><b>1. Ділення обох частин рівняння на вираз зі змінною</b></p>	$x^2 = x.$ <p>Поділивши обидві частини рівняння на <math>x</math>, одержимо  <math>x = 1</math></p>
	<p><b>2. Додавання, віднімання, множення або ділення обох частин рівняння на вираз, у якого ОДЗ вужча, ніж у заданого рівняння</b></p>	$x^2 = 1.$ <p>Якщо до обох частин рівняння додати <math>\sqrt{x}</math>, то одержимо рівняння</p> $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ <p>у якого тільки один корінь  <math>x = 1</math></p>

## Продовження табл. 9

У чому полягає помилка	Як одержати правильне (чи повне) розв'язання	Приклад правильного (чи повного) розв'язання
при розв'язуванні рівняння		
$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння	<b>Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння</b>	<p>У даному рівнянні не було необхідності підносити до квадрата.</p> $x - 1 = 2x + 1.$ <p>► <math>x - 2x = 1 + 1, x = -2.</math>  <b>Відповідь:</b> <math>-2.</math> ◁</p> <p>Якщо використати піднесення до квадрата, то перевірка показує, що <math>x_2 = -2</math> — корінь, а <math>x_1 = 0</math> — сторонній корінь</p>
при розв'язуванні рівняння		
<p>Втратили корінь <math>x = 0</math>, оскільки після ділення на <math>x</math> фактично одержали рівняння</p> $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x},$ <p>у якого ОДЗ: <math>x \neq 0</math>, тобто звужили ОДЗ заданого рівняння</p>	<b>Ті значення, на які звужилася ОДЗ, необхідно розглянути окремо</b>	$x^2 = x.$ <p>► 1. При <math>x = 0</math> одержуємо <math>0^2 = 0</math> — правильна рівність, отже, <math>x = 0</math> — корінь.</p> <p>2. При <math>x \neq 0</math> одержуємо</p> $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}, x = 1.$ <p><b>Відповідь:</b> <math>0; 1.</math> ◁</p> <p>(Зазвичай зручніше розв'язувати так: <math>x^2 - x = 0,</math>  <math>x(x - 1) = 0; x = 0, x = 1.)</math></p>
<p>Втратили корінь <math>x = -1</math>, оскільки ОДЗ заданого рівняння: <math>x</math> — будь-яке число, а <math>\sqrt{x}</math> існує тільки при <math>x \geq 0</math></p>	<b>Ті значення, на які звужилася ОДЗ, необхідно розглянути окремо</b>	<p>У даному рівнянні не було необхідності додавати до обох частин <math>\sqrt{x}</math>.</p> <p>► <math>x^2 = 1, x = \pm 1.</math>  <b>Відповідь:</b> <math>\pm 1.</math> ◁</p> <p>(Якби довелось додавати до обох частин <math>\sqrt{x}</math>, то при <math>x &lt; 0</math> задане рівняння потрібно було б розглянути окремо, і тоді одержали б ще й корінь <math>x = -1.</math>)</p>

### Заяпитання для контролю

1. Що називається коренем рівняння? Наведіть приклади.
2. Дайте означення області допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Наведіть приклади.
3. Дайте означення рівняння-наслідку заданого рівняння. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння-наслідок.
4. Дайте означення рівносильних рівнянь. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння, рівносильне заданому.
5. Сформулюйте основні теореми про рівносильність рівнянь. Наведіть приклади їх використання.
6. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна одержати сторонні для заданого рівняння корені. Як можна відсіяти сторонні корені? Наведіть приклади.
7. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна втратити корені цього рівняння. Наведіть приклади. Поясніть на прикладах, як необхідно доповнити відповідні перетворення, щоб не втратити корені заданого рівняння.

### Вправи

1°. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

$$1) \frac{x-5}{x+2} - \frac{2x-3}{x} = 0;$$

$$3) \sqrt{x} = \frac{3x-6}{x-1};$$

$$2) \frac{2x+1}{3} - \frac{x}{x^2+1} = 0;$$

$$4) \sqrt{x^2+5} - \frac{x-5}{x+4} = 0.$$

2. З'ясуйте: а) чи є друге рівняння наслідком першого;

б) чи є ці рівняння рівносильними (відповідь обґрунтуйте):

$$1) 2x^2 - 8x - 9 = 0 \text{ і } x^2 - 4x - 4,5 = 0; \quad 2) \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = 0 \text{ і } x^2 - 4 = 0.$$

3°. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

$$1) 5x - 8 = 7 - 3x \text{ і } 5x + 3x = 7 + 8;$$

$$2) (2x - 1)(x^2 + 5) = x(x^2 + 5) \text{ і } 2x - 1 = x.$$

4°. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

$$1) x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3} \text{ і } x^2 = 9; \quad 2) (2x - 1)(x^2 - 5) = x(x^2 - 5) \text{ і } 2x - 1 = x.$$

5°. Поясніть, які перетворення було використано при переході від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:

$$1) 3x + 1,1 = 6,8 - 2x \text{ і } 3x + 2x = 6,8 - 1,1;$$

$$2) \frac{x^2-81}{x+9} + 3x^2 - 1 = 0 \text{ і } x - 9 + 3x^2 - 1 = 0;$$



- 3)  $\frac{5}{3x-1} + x = 3$  і  $5 + x(3x - 1) = 3(3x - 1)$ ;
- 4)  $\sqrt{x^2 - 1} = x - 2$  і  $x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$ .
6. Чи є рівносильними задані рівняння на ОДЗ першого з них:
- 1)  $5 - x = x + 7$  і  $5 - x + \frac{1}{x-3} = x + 7 + \frac{1}{x-3}$ ;
- 2)  $\frac{12-2x}{x-2} = \frac{x-5}{x-2}$  і  $12 - 2x = x - 5$ ;
- 3)  $6 - x = 10$  і  $6 - x + \sqrt{x} - \sqrt{x} = 10$ ;
- 4)  $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 6) = 5(x^2 + 6)$  і  $x^2 + 2x - 3 = 5$ ;
- 5)  $x^2 - 1 = 6x - 1$  і  $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{6x - 1}{x}$ ?
7. Розв'яжіть рівняння і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:
- 1)  $\frac{8}{x} - \frac{5-x}{2} = \frac{8+3x}{x} - x$ ;
- 2)  $\frac{x}{4} + \frac{(x-2)^2 + 8}{x} = \frac{(4-x)(2-x)}{x}$ ;
- 3)  $\frac{7}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{6}{x^2-9} - \frac{x-4}{3+x}$ ;
- 4)  $\frac{1}{x-2} + \frac{x-6}{3x^2-12} = \frac{1}{2-x} - 1$ .
8. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:
- 1)  $3x + \sqrt{x-2} = 5x - 1 + \sqrt{x-2}$ ;
- 2)  $\sqrt{2x+5} = x + 1$ ;
- 3)  $\sqrt{3-2x} = 1 - x$ ;
- 4)  $\sqrt{5+x^2} = x - 4$ .
9. За якої умови рівняння є рівносильними:
- 1)  $\frac{f(x)}{2x-3} = g(x)$  і  $f(x) = g(x)(2x-3)$ ;
- 2)  $f(x) + \sqrt{x} = g(x) + \sqrt{x}$  і  $f(x) = g(x)$ ?
10. Чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо:
- 1) рівняння  $(x^2 + 7)f(x) = 4x^2 + 28$  замінити рівнянням  $f(x) = 4$ ;
- 2) рівняння  $(x-1)f(x) = (x-1)g(x)$  замінити рівнянням  $f(x) = g(x)$ ;
- 3) рівняння  $\frac{f(x)}{x+3} = \frac{g(x)}{x+3}$  замінити рівнянням  $f(x) = g(x)$ ;
- 4) рівняння  $\frac{f(x)}{3x^2+5} = 0$  замінити рівнянням  $f(x) = 0$ ?
11. Розв'яжіть рівняння і обґрунтуйте, що побудовано ланцюжок рівносильних рівнянь:
- 1)  $13 - (x-1)^2 + (2x-1)(x+1) = (x+2)^2$ ;
- 2)  $(x-1)^3 - (x-3)^3 = 3x + 26$ ;
- 3)  $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$ ;
- 4)  $(3x-1)^2 + (6x-3)(2x+1) = (x-1)^2 + 5(2x+1)^2$ .

### 3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Таблиця 10

Орієнтир	Приклад						
1. Скінченна ОДЗ							
<p>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення</p>	$\sqrt{x^2-1} + x = 1 + \sqrt{2-2x^2}.$ <p>▶ ОДЗ: <math>\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ 2-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1, \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.</math></p> <p>Перевірка.  <math>x = 1</math> — корінь (<math>\sqrt{0} + 1 = 1 + \sqrt{0}, 1 = 1</math>),  <math>x = -1</math> — не корінь (<math>\sqrt{0} - 1 \neq 1 + \sqrt{0}</math>).                  Відповідь: 1. ◀</p>						
2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння							
<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x) = g(x)</math></td> <td rowspan="2" style="padding: 5px;"><math>\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x) \geq a,</math> <math>g(x) \leq a</math></td> </tr> </table> <p>Якщо потрібно розв'язати рівняння виду <math>f(x) = g(x)</math> і з'ясувалося, що <math>f(x) \geq a, g(x) \leq a</math>, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> одночасно дорівнюють <math>a</math></p>	$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$	$f(x) \geq a,$ $g(x) \leq a$	$1 - x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{ x }}.$ <p>▶ <math>f(x) = 1 - x^2 \leq 1,</math>  <math>g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{ x }} \geq 1</math> (бо <math>\sqrt{ x } \geq 0</math>).</p> <p>Отже, задане рівняння рівносильне системі</p> $\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1 + \sqrt{ x }} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$ <p>Відповідь: 0. ◀</p>			
$f(x) = g(x)$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$						
$f(x) \geq a,$ $g(x) \leq a$							
<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0</math></td> <td rowspan="5" style="padding: 5px;"><math>\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_1(x) \geq 0,</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_2(x) \geq 0,</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>\dots</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_n(x) \geq 0</math></td> </tr> </table> <p>Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю</p>	$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$	$f_1(x) \geq 0,$	$f_2(x) \geq 0,$	$\dots$	$f_n(x) \geq 0$	$\sqrt{x-2} +  x^2 - 2x  + (x^2 - 4)^2 = 0.$ <p>▶ <math>f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0, f_2(x) =  x^2 - 2x  \geq 0,</math>  <math>f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0.</math></p> <p>Отже, задане рівняння рівносильне системі</p> $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\  x^2 - 2x  = 0, \\ (x^2 - 4)^2 = 0. \end{cases}$ <p>З першого рівняння одержуємо <math>x = 2</math>, що задовольняє всій системі</p> <p>Відповідь: 2. ◀</p>
$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0$	$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$						
$f_1(x) \geq 0,$							
$f_2(x) \geq 0,$							
$\dots$							
$f_n(x) \geq 0$							

Продовження табл. 10

3. Використання зростання та спадання функцій	
Схема розв'язування рівняння	
<p>1. Підбираємо один або декілька коренів рівняння.</p> <p>2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння)</p>	
<p>The graph shows a coordinate system with x and y axes. A horizontal blue line is labeled <math>y = a</math>. A pink curve labeled <math>y = f(x)</math> is shown. The curve starts from the bottom left, rises to a local maximum, falls to a local minimum, and then rises again. It intersects the horizontal line <math>y = a</math> at a single point <math>x_0</math>. A yellow shaded region on the x-axis is between <math>\alpha</math> and <math>\beta</math>, with <math>x_0</math> inside it. Dashed vertical lines connect <math>\alpha</math>, <math>x_0</math>, and <math>\beta</math> to the x-axis. A dashed horizontal line connects <math>a</math> on the y-axis to the intersection point <math>(x_0, a)</math>.</p>	<p>Теореми про корені рівняння</p> <p>1. Якщо в рівнянні <math>f(x) = a</math> функція <math>f(x)</math> зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.</p> <p>Приклад Рівняння <math>\sqrt{x} + 2x^3 = 3</math> має єдиний корінь <math>x = 1</math> (<math>\sqrt{1} + 2 \cdot 1^3 = 3</math>, тобто <math>3 = 3</math>), оскільки функція <math>f(x) = \sqrt{x} + 2x^3</math> зростає на всій області визначення <math>x \geq 0</math></p>
	<p>The graph shows a coordinate system with x and y axes. A pink curve labeled <math>y = f(x)</math> is shown, similar to the one in the previous graph. A blue curve labeled <math>y = g(x)</math> is shown, which starts high on the left, rises to a local maximum, and then falls. The two curves intersect at a point <math>(x_0, a)</math>. A yellow shaded region on the x-axis is between <math>\alpha</math> and <math>\beta</math>, with <math>x_0</math> inside it. Dashed vertical lines connect <math>\alpha</math>, <math>x_0</math>, and <math>\beta</math> to the x-axis. A dashed horizontal line connects <math>a</math> on the y-axis to the intersection point <math>(x_0, a)</math>.</p>

### Пояснення й обґрунтування

1. **Скінченна ОДЗ.** Нагадаємо, що у разі, коли задано рівняння  $f(x) = g(x)$ , спільна область визначення для функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  називається *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції  $f(x)$ , так і до області визначення функції  $g(x)$ . Отже, кожен корінь рівняння

обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння. Це дозволяє в деяких випадках, аналізуючи ОДЗ, одержати розв'язки рівняння.

Наприклад, якщо задано рівняння  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-2x} = 3x-6$ , то його ОДЗ можна записати за допомогою системи  $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 4-2x \geq 0. \end{cases}$  Розв'язуючи цю систему, одержуємо  $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2, \end{cases}$  тобто  $x = 2$ . Отже, ОДЗ заданого рівняння

складається лише з одного значення  $x = 2$ . Але якщо тільки для одного числа потрібно з'ясувати, чи є воно коренем заданого рівняння, то для цього достатньо підставити це значення в рівняння. У результаті одержуємо правильну числову рівність ( $0 = 0$ ). Отже,  $x = 2$  — корінь цього рівняння, інших коренів бути не може, оскільки всі корені рівняння знаходяться в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім  $x = 2$ .

Розглянутий приклад дозволяє виділити орієнтир для розв'язування аналогічних рівнянь:

**якщо ОДЗ рівняння (а також нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення.**

Зауваження. У тому випадку, коли ОДЗ — порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо зразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів.

Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння  $\sqrt{x-3} = \sqrt{2-x} + 5x$ , то його ОДЗ задається системою  $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$  тобто  $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2, \end{cases}$  яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

**2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння.** Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою оцінки значень лівої та правої частин рівняння.

Нехай ми розв'язуємо рівняння  $f(x) = g(x)$  і нам удалося з'ясувати, що для всіх допустимих значень  $x$  значення  $f(x) \geq a$ , а значення  $g(x) \leq a$ .

● Розглянемо два випадки: 1)  $f(x) > a$ ; 2)  $f(x) = a$ .

Якщо  $f(x) > a$ , то рівність  $f(x) = g(x)$  не може виконуватися, бо  $g(x) \leq a$ , тобто при  $f(x) > a$  задане рівняння коренів не має. Залишається тільки випадок  $f(x) = a$ , але, ураховуючи необхідність виконання рівності  $f(x) = g(x)$ , маємо, що тоді  $g(x) = a$ . Отже, ми обґрунтували, що виконання рівності  $f(x) = g(x)$  (за умов  $f(x) \geq a$  і  $g(x) \leq a$ ) гарантує одночасне виконання рівностей  $f(x) = a$  і  $g(x) = a$  (і навпаки, якщо одночасно виконуються рівності  $f(x) = a$

і  $g(x) = a$ , то виконується і рівність  $f(x) = g(x)$ ). Як було показано в пункті 3.1, це й означає, що рівняння  $f(x) = g(x)$  рівносильне системі

темі  $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$  Коротко це можна записати так:

$$\begin{array}{|l} f(x) = g(x) \\ \hline f(x) \geq a, \\ g(x) \leq a \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases} \quad \circ$$

Приклад використання такого способу розв'язування рівнянь наведено в пункті 2 таблиці 10.

Аналогічно до попередніх міркувань можна обґрунтувати і орієнтир для розв'язування рівняння  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0$ , у якому всі функції-доданки невід'ємні ( $f_1(x) \geq 0$ ;  $f_2(x) \geq 0$ ; ...;  $f_n(x) \geq 0$ ).

● Якщо припустити, що  $f_1(x) > 0$ , то сума всіх функцій, що стоять у лівій частині цього рівняння, може дорівнювати нулю тільки тоді, коли сума  $f_2(x) + \dots + f_n(x)$  буде від'ємною. Але це неможливо, оскільки за умовою всі функції невід'ємні. Отже, при  $f_1(x) > 0$  задане рівняння не має коренів. Ці самі міркування можна повторити для будь-якої іншої функції-доданка. Залишається єдина можливість — усі функції-доданки дорівнюють нулю (очевидно, що в цьому випадку рівність  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0$  обов'язково буде виконуватися). Таким чином, *сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.* ○

Наприклад, щоб розв'язати рівняння  $x^4 + |x - 1| = 2x^2 - 1$ , достатньо перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді  $(x^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$  і взяти до уваги, що  $(x^2 - 1)^2$  і  $|x - 1|$  — невід'ємні функції. Отже, задане рівняння рівносильне системі  $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ |x - 1| = 0. \end{cases}$  З другого рівняння одержуємо  $x = 1$ , що задовольняє всій системі, тобто задане рівняння має єдиний корінь  $x = 1$ .

**3. Використання зростання та спадання функцій до розв'язування рівнянь** спирається на таку властивість: *зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.*

Корисно пам'ятати спеціальні теореми про корені рівняння.

**Теорема 1.** *Якщо в рівнянні  $f(x) = a$  функція  $f(x)$  зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.*

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 51. Пряма  $y = a$  перетинає графік зростаючої на проміжку  $[\alpha; \beta]$  функції  $y = f(x)$  тільки в одній точці. Це й означає, що рівняння  $f(x) = a$  не може мати більше одного кореня на проміжку  $[\alpha; \beta]$ . Доведемо це твердження аналітично.

- Якщо на проміжку  $[\alpha; \beta]$  рівняння має корінь  $x_0$ , то  $f(x_0) = a$ . Інших коренів бути не може, оскільки для зростаючої функції  $f(x)$  при  $x > x_0$  одержуємо  $f(x) > f(x_0) = a$ , а при  $x < x_0$  маємо  $f(x) < f(x_0) = a$ . Отже, при  $x \neq x_0$   $f(x) \neq a$ . Аналогічно для спадної функції при  $x \neq x_0$  одержуємо  $f(x) \neq a$ . ○

**Теорема 2.** Якщо в рівнянні  $f(x) = g(x)$  функція  $f(x)$  зростає на деякому проміжку, а функція  $g(x)$  спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 52.

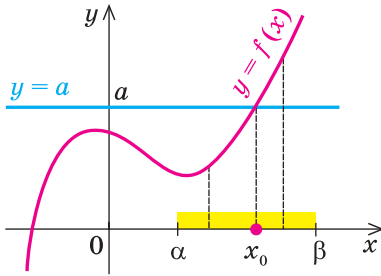


Рис. 51

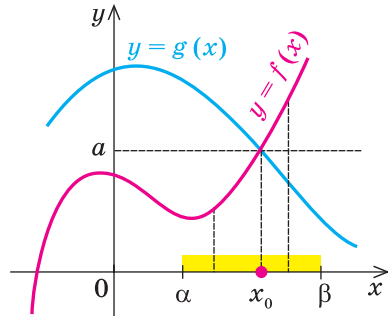


Рис. 52

- Якщо на проміжку  $[\alpha; \beta]$  рівняння має корінь  $x_0$ , то  $f(x_0) = g(x_0) = a$ . Інших коренів бути не може, оскільки, наприклад, для зростаючої функції  $f(x)$  і спадної функції  $g(x)$  при  $x > x_0$  маємо  $f(x) > a$ , а  $g(x) < a$ , отже,  $f(x) \neq g(x)$ . Аналогічно і при  $x < x_0$   $f(x) \neq g(x)$ . ○

Кожна із цих теорем стверджує, що в розглянутому проміжку задача рівняння може мати не більш ніж один корінь, тобто або це рівняння зовсім не має коренів, або воно має тільки єдиний корінь. Якщо нам удалося підібрати один корінь такого рівняння, то інших коренів у заданому проміжку рівняння не має.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння  $x^3 + x = 10$ , достатньо помітити, що функція  $f(x) = x^3 + x$  є зростаючою на всій числовій прямій (як сума двох зростаючих функцій) і що  $x = 2$  — корінь<sup>1</sup> цього рівняння

<sup>1</sup> Корінь  $x = 2$  одержано підбиранням. Як правило, підбір починають із цілих значень:  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , які підставляють у задане рівняння.

( $2^3 + 2 = 10$ ;  $10 = 10$ ). Отже, задане рівняння  $f(x) = 10$  має єдиний корінь  $x = 2$ .

Зазначимо, що кожна з цих теорем гарантує єдиність кореня рівняння (якщо він є) тільки на проміжку зростання (чи спадання) відповідної функції. Якщо функція має декілька проміжків зростання і спадання, то доводиться розглядати кожен з них окремо.

**Приклад** Розв'яжемо за допомогою теореми 2 рівняння  $x^3 + x = \frac{2}{x}$ .

► Спочатку слід урахувати його ОДЗ:  $x \neq 0$  і згадати, що функція  $y = \frac{2}{x}$  на всій області визначення не є ні спадною, ні зростаючою (пункт 2.2), але вона спадає на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . Тому розглянемо кожен проміжок окремо.

1) При  $x > 0$  задане рівняння має корінь  $x = 1$  ( $1^3 + 1 = \frac{2}{1}$ ,  $2 = 2$ ).

Функція  $f(x) = x^3 + x$  зростає при  $x > 0$  (як показано вище, вона зростає на множині  $\mathbf{R}$ ), а функція  $g(x) = \frac{2}{x}$  спадає на проміжку  $x > 0$ .

Отже, задане рівняння  $f(x) = g(x)$  при  $x > 0$  має єдиний корінь  $x = 1$ .

2) При  $x < 0$  задане рівняння має корінь  $x = -1$  ( $(-1)^3 + (-1) = \frac{2}{-1}$ ,  $-2 = -2$ ).

Функція  $f(x) = x^3 + x$  зростає при  $x < 0$ , а функція  $g(x) = \frac{2}{x}$  спадає на цьому проміжку. Тому задане рівняння  $f(x) = g(x)$  при  $x < 0$  має єдиний корінь  $x = -1$ .

У відповідь слід записати всі знайдені корені (хоч на кожному з проміжків корінь єдиний, але всього коренів — два). Отже, задане рівняння має тільки два корені: 1 і  $-1$ . ◀

### Приклади розв'язування завдань

**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x-1)^2$ .

#### Розв'язання

► ОДЗ:  $x \neq 0$ . На ОДЗ  $x^4 > 0$ . Тоді функція  $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$  (як сума двох взаємно обернених додатних чисел), а функція  $g(x) = 2 - (x-1)^2 \leq 2$ .

#### Коментар

Якщо розкрити дужки і звести обидві частини рівняння до спільного знаменника, то для знаходження коренів одержаного рівняння доведеться розв'язувати повне рівняння восьмого степеня, усі корені якого ми не зможемо знайти.

Таким чином, задане рівняння рів-

$$\text{носильне системі } \begin{cases} x^4 + \frac{1}{x^4} = 2, \\ 2 - (x-1)^2 = 2. \end{cases}$$

З другого рівняння системи одержуємо  $x = 1$ , що задовольняє і першому рівнянню, тобто система (отже, і задане рівняння) має єдиний розв'язок  $x = 1$ .

*Відповідь:* 1. ◁

Спробуємо оцінити області значень функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння. Оскільки на ОДЗ ( $x \neq 0$ )  $x^4 > 0$ , то в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел, яка завжди більша або дорівнює 2*. У правій частині від 2 віднімається невід'ємне число  $(x-1)^2$ . Отже, при всіх значеннях  $x$  одержуємо значення, менші або рівні 2. Рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють 2.

### Приклад 2

Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + x^3 = \sqrt{y} + y^3, \\ x^2 + 3y^2 = 36. \end{cases}$$

#### Розв'язання

▶ ОДЗ:  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$  Розглянемо функ-

цію  $f(t) = \sqrt{t} + t^3$ . На своїй області визначення ( $t \geq 0$ ) ця функція є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій). Тоді перше рівняння заданої системи, яке має вигляд  $f(x) = f(y)$ , рівносильне рівнянню  $x = y$ . Отже, на ОДЗ задана система

$$\text{рівносильна системі } \begin{cases} x = y, \\ x^2 + 3y^2 = 36. \end{cases}$$

Підставляючи  $x = y$  у друге рівняння системи, маємо  $4y^2 = 36$ ,  $y^2 = 9$ ,  $y = \pm 3$ . Ураховуючи, що на ОДЗ  $y \geq 0$ , одержуємо  $y = 3$ . Тоді  $x = y = 3$ .

*Відповідь:* (3; 3). ◁

#### Коментар

Іноді властивості функцій вдається використати при розв'язуванні систем рівнянь. Якщо помітити, що в лівій і правій частинах першого рівняння заданої системи стоять значення однієї і тієї ж функції, яка є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то *рівність  $f(x) = f(y)$  для зростаючої функції можлива тоді і тільки тоді, коли  $x = y$ , оскільки однакових значень зростаюча функція може набувати тільки при одному значенні аргументу*. (Зауважимо, що така сама властивість матиме місце і для спадної функції.)

Зауваження. Твердження, яке було обґрунтовано в коментарі до прикладу 2, може бути використано при розв'язуванні аналогічних завдань. Коротко його можна сформулювати так: *якщо функція  $f(x)$  є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині  $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$* .



**Заяпаннтя для контролю**

- Пояснїть на прикладах, як можна використати властивостї функцї до розв'язуваннтя рївняннтя.
- Обгрунтуйте правильнїсть орієнтирїв для розв'язуваннтя рївняннтя з використанням властивостей функцї, якї наведено в таблицї 10.

**Вправи**

Розв'яжіть рївняннтя (1–4), використовуючи властивостї вїдповїдних функцї.

- 1°. 1)  $\sqrt{x-2} + x^2 = \sqrt{8-4x} + x + 2$ ;  
2)  $2x + \sqrt{x^2-9} = x^2 + \sqrt{18-2x^2} - 3$ ;  
3)  $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+3x} + \sqrt{4x^2+y^2-2y-3} = \sqrt{x^4-1} - 2y + 3$ .
- 2°. 1)  $\sqrt{4+x^2} = 2-x^4$ ;                      2)  $1+|x^5+3x| = \sqrt{1-x^4}$ ;  
3\*)  $x^6 + \frac{1}{x^6} = 1 - 2x - x^2$ ;                      4\*)  $\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} = 2 - |2x-1|$ .
3. 1)  $|x^2 - 7x + 12| + |x^2 - 9| + |6 - 2x| = 0$ ;  
2)  $|x + 2| + |y - 5| + |2x^2 - 8| = 0$ ;  
3)  $\sqrt{1-y} + \sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-3x} = 0$ ;  
4)  $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2-x} = 0$ ;  
5)  $x^2 + y^2 + 5 = 4x + 2y$ ;  
6)  $3x^2 + y^2 + 2z^2 = 4y - 6x - 12z - 25$ .
4. 1)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-6} = 2$ ;                      2)  $x + \sqrt{x} + x^9 = 3$ ;  
3)  $2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+9} = 5 - x$ ;                      4)  $\sqrt{x-2} + x = \frac{40}{x-1}$ ;  
5)  $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+2} = \frac{10}{x}$ ;                      6)  $2x + \sqrt{x} = \sqrt{10-x}$ .
- 5\*. Розв'яжіть систему рївняннтя:
- 1)  $\begin{cases} x + x^5 = y + y^5, \\ x^2 + 3y = 10; \end{cases}$                       2)  $\begin{cases} \sqrt{-x} - x = \sqrt{-y} - y, \\ x^3 + y^3 = -16; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x^3 - y^3 = y^5 - x^5, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$                       4)  $\begin{cases} \sqrt{-3x} - \sqrt{-3y} = x - y, \\ 3x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

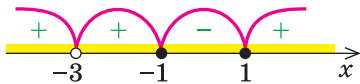
## § 4

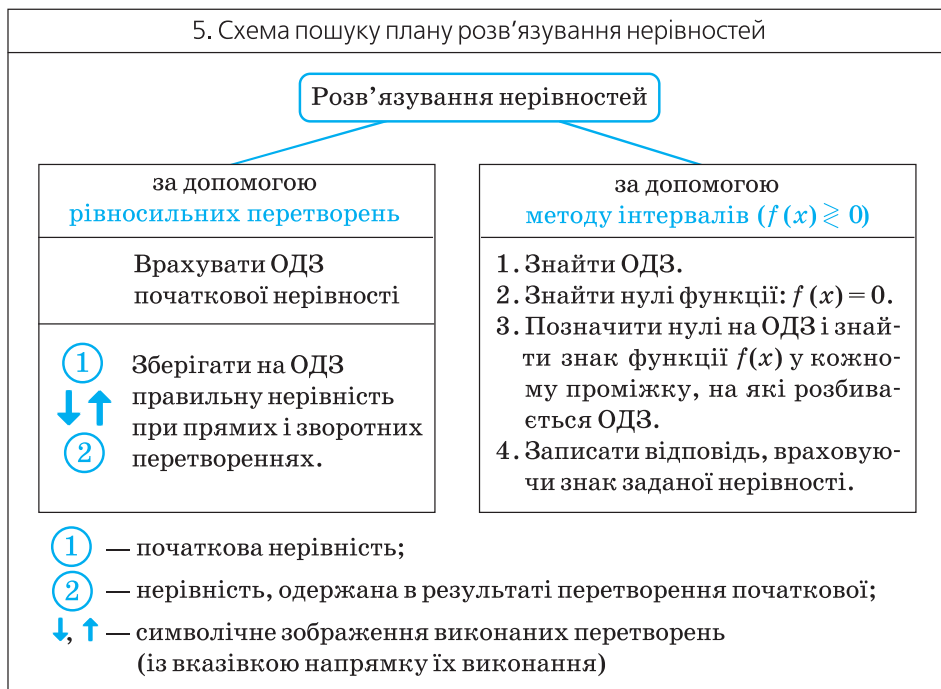
## НЕРІВНОСТІ: РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТА ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ

Таблиця 11

1. Поняття нерівності зі змінною та її розв'язків	
Означення	Приклад
<p>Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків <math>&gt;</math>, <math>&lt;</math>, <math>\geq</math>, <math>\leq</math>, то одержуємо <i>нерівність зі змінною</i>.</p> <p>У загальному вигляді нерівність з однією змінною <math>x</math> (наприклад, для випадку «більше») записують так: <math>f(x) &gt; g(x)</math></p>	<p><math>3x &lt; 1</math> — лінійна нерівність;  <math>x^2 - 3x + 2 &gt; 0</math> — квадратна нерівність;  <math>\frac{x-5}{2x+4} &lt; 1</math> — дробова нерівність</p>
<p><b>Розв'язком нерівності з однією змінною</b> називається значення змінної, яке перетворює задану нерівність на правильну числову нерівність.</p> <p><i>Розв'язати нерівність</i> — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає</p>	<p><math>x = 4</math> — один з розв'язків нерівності <math>2x - 3 &gt; x</math>, оскільки при <math>x = 4</math> одержуємо правильну нерівність: <math>2 \cdot 4 - 3 &gt; 4</math>, тобто <math>5 &gt; 4</math></p>
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
<p><b>Областю допустимих значень (або областю визначення) нерівності</b> називається спільна область визначення для функцій <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math>, що стоять у лівій і правій частинах нерівності</p>	<p>Для нерівності <math>\sqrt{x+2} &lt; x</math> ОДЗ: <math>x + 2 \geq 0</math>, тобто <math>x \geq -2</math>, оскільки область визначення функції <math>f(x) = \sqrt{x+2}</math> визначається умовою <math>x + 2 \geq 0</math>, а областю визначення функції <math>g(x) = x</math> є множина всіх дійсних чисел</p>
3. Рівносильні нерівності	
Означення	Найпростіші теореми
<p><b>Дві нерівності називаються рівносильними</b> на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки</p>	<p>1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині)</p>

Продовження табл. 11

<p>тобто якщо кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої</p>	<p><b>2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)</b></p>
	<p><b>3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)</b></p>
<p><b>4. Метод інтервалів</b> (розв'язування нерівностей виду <math>f(x) \geq 0</math>)</p>	
<p>План</p>	<p>Приклад</p>
<p><b>1. Знайти ОДЗ.</b>  <b>2. Знайти нулі функції</b>  <math>f(x) = 0</math>.  <b>3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак <math>f(x)</math> у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.</b>  <b>4. Записати відповідь, урахувавши знак заданої нерівності</b></p>	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} \geq 0</math>.</p> <p>Нехай <math>f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2}</math>.</p> <p>1. ОДЗ: <math>(x + 3)^2 \neq 0</math>, отже, <math>x \neq -3</math>.                  2. Нулі функції: <math>f(x) = 0</math>.  <math>\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} = 0</math>, <math>x^2 - 1 = 0</math>,  <math>x_1 = -1</math>, <math>x_2 = 1</math> (входять до ОДЗ)</p> <p>3. </p> <p>Відповідь: <math>(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)</math>.</p>



### Пояснення й обґрунтування

**1. Поняття нерівності зі змінною та її розв'язків.** Якщо два вирази зі змінною сполучити одним із знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , то одержимо нерівність зі змінною.

Аналогічно до рівняння, нерівність зі змінною (наприклад, із знаком  $>$ ) найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження тих значень аргументів, при яких значення однієї із заданих функцій більше за значення другої заданої функції. Тому в загальному вигляді нерівність з однією змінною  $x$  (наприклад, для випадку «більше») записують так:  $f(x) > g(x)$ .

Нагадаємо, що *розв'язком нерівності називається значення змінної, яке перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.*

*Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.*

Наприклад, розв'язками нерівності  $3x < 6$  є всі  $x < 2$ , розв'язками нерівності  $x^2 > -1$  є всі дійсні числа ( $\mathbf{R}$ ), а нерівність  $x^2 < -1$  не має розв'язків, оскільки значення  $x^2$  не може бути від'ємним числом, меншим за  $-1$ .

**2. Область допустимих значень (ОДЗ) нерівності** означають аналогічно до ОДЗ рівняння. Якщо задано нерівність  $f(x) > g(x)$ , то спільна область визначення для функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  називається областю допустимих значень цієї нерівності (іноді використовують також терміни «область визначення нерівності» або «множина допустимих значень нерівності»). Наприклад, для нерівності  $x^2 < x$  областю допустимих значень є всі дійсні числа (це можна записати, наприклад, так: ОДЗ:  $x \in \mathbf{R}$ ), оскільки функції  $f(x) = x^2$  і  $g(x) = x$  мають області визначення  $x \in \mathbf{R}$ .

Зрозуміло, що кожен розв'язок заданої нерівності входить як до області визначення функції  $f(x)$ , так і до області визначення функції  $g(x)$  (інакше ми не зможемо отримати правильну числову нерівність). Отже, *кожен розв'язок нерівності обов'язково входить до ОДЗ цієї нерівності*. Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ нерівності для її розв'язування.

Наприклад, у нерівності  $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} > x$  функція  $g(x) = x$  визначена при всіх дійсних значеннях  $x$ , а функція  $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{2-x}$  — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цієї нерівності задається системою  $\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$  з якої одержуємо систему  $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2, \end{cases}$  що не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданої нерівності не містить жодного числа, через те ця нерівність не має розв'язків.

Узагалі при розв'язуванні нерівностей різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування: рівносильні перетворення нерівностей або так званий метод інтервалів.

**3. Рівносильні нерівності.** З поняттям рівносильності нерівностей ви знайомі з курсу алгебри 9 класу. Як і для випадку рівносильних рівнянь, рівносильність нерівностей ми будемо розглядати на певній множині.

*Дві нерівності називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто якщо кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої.*

Домовимося, що надалі всі рівносильні перетворення нерівностей будемо виконувати на ОДЗ заданої нерівності. Зазначимо, що у випадку, коли ОДЗ заданої нерівності є множина всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних нерівностей). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання нерівності, а дійсно врахувати її, виконуючи рівносильні перетворення заданої нерівності.

Загальні орієнтири для виконання рівносильних перетворень нерівностей аналогічні до відповідних орієнтирів для виконання рівносильних перетворень рівнянь.

Як було вказано вище, виконуючи *рівносильні перетворення нерівностей*, необхідно **врахувати ОДЗ заданої нерівності** — це і є перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень нерівностей.

За означенням рівносильності нерівностей потрібно забезпечити, щоб кожен розв'язок першої нерівності був розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності був розв'язком першої. Для цього **достатньо забезпечити збереження правильної нерівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих, а й при зворотних перетвореннях**. Це і є другий орієнтир для розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень. Дійсно, кожен розв'язок нерівності перетворює її на правильну числову нерівність, і якщо правильна нерівність зберігається, то розв'язок кожної з нерівностей буде також і розв'язком іншої, а отже, нерівності будуть рівносильні (відповідні орієнтири схематично подано в пункті 5 таблиці 11).

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень нерівність

$$\frac{x-3}{x+1} > 0, \quad (1)$$

достатньо врахувати її ОДЗ:  $x + 1 \neq 0$  і умову додатності дробу (*дріб буде додатним тоді і тільки тоді, коли чисельник і знаменник дроби мають однакові знаки*), а також звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямку зі збереженням правильної нерівності.

### Розв'язання

► Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x-3 > 0, \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тоді одержуємо  $\begin{cases} x > 3, \\ x > -1 \end{cases}$  або  $\begin{cases} x < 3, \\ x < -1. \end{cases}$

Отже,  $x > 3$  або  $x < -1$ .

Відповідь:  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ . ◀

### Коментар

Зауважимо, що, записуючи умову додатності дроби — сукупність систем (2), ми неявно врахували ОДЗ нерівності (1). Дійсно, якщо  $x + 1 > 0$  або  $x + 1 < 0$ , то  $x + 1 \neq 0$ , тому в явному вигляді ОДЗ заданої нерівності не записана при оформленні розв'язання.

Крім виділених загальних орієнтирів, виконуючи рівносильні перетворення нерівностей, можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності нерівностей узагальнимо також формулювання найпрості-

ших теорем про рівносильність нерівностей, відомих з курсу алгебри 9 класу.

1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині).
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знака нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).
3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).

Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне до обґрунтування орієнтирів для рівносильних перетворень заданої нерівності.

Зауваження. Для позначення переходу від заданої нерівності до рівносильної їй нерівності можна використовувати спеціальний значок  $\Leftrightarrow$ , але його використання при записуванні розв'язань не є обов'язковим (хоча іноді ми будемо ним користуватися, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення).

**4. Метод інтервалів.** Розв'язування нерівностей методом інтервалів спирається на властивості функцій, пов'язані зі зміною знаків функції. Пояснимо ці властивості, використовуючи графіки відомих нам функцій, наприклад  $y = \frac{1}{x}$  і  $y = 2x - 2$  (рис. 53).

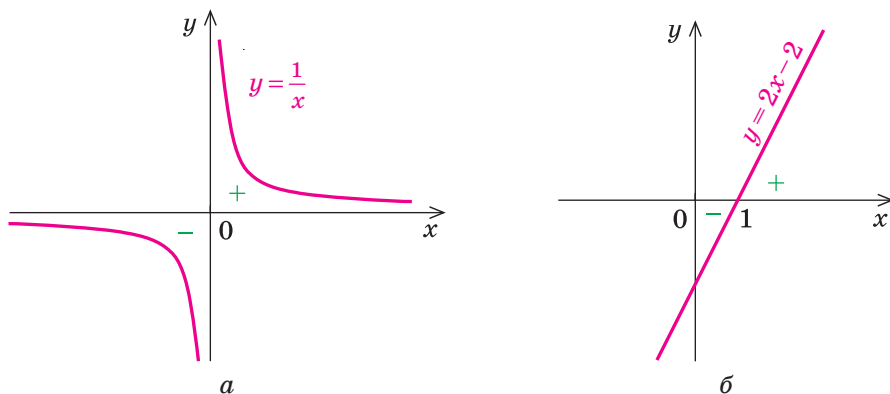


Рис. 53

Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що функція може змінити свій знак тільки у двох випадках:

- 1) якщо графік розривається (як у випадку функції  $y = \frac{1}{x}$  (рис. 53, а) — графік розривається в точці 0, і знак функції змінюється в точці 0);
- 2) якщо графік без розриву переходить з нижньої півплощини у верхню (або навпаки), але тоді графік перетинає вісь  $Ox$  (як у випадку функції  $y = 2x - 2$ ) (рис. 53, б). На осі  $Ox$  значення функції дорівнюють нулю. (Нагадаємо, що значення аргументу, при яких функція перетворюється на нуль, називають *нулями функції*.) Отже, **будь-яка функція може поміняти свій знак тільки в нулях або в точках, де розривається графік функції** (у так званих *точках розриву* функції<sup>1</sup>).

Точки, у яких розривається графік функції  $f(x)$ , ми виділяємо, як правило, коли знаходимо область визначення цієї функції. Наприклад, якщо  $f(x) = \frac{1}{x}$ , то її область визначення  $x \neq 0$ , і саме в точці 0 графік функції розривається (рис. 53, а). Якщо ж на якомусь проміжку області визначення графік функції не розривається і функція не дорівнює нулю, то за наведеним вище висновком вона не може в цьому проміжку поміняти свій знак<sup>2</sup>. Отже, якщо відмітити нулі функції на її області визначення, то область визначення розіб'ється на проміжки, усередині яких знак функції змінитися не може (і тому цей знак можна визначити в будь-якій точці з цього проміжку).

У таблиці 12 наведено розв'язання дробово-раціональної нерівності  $\frac{2x+4}{x-1} > 0$  методом інтервалів; коментар, який пояснює кожен крок розв'язування; *план розв'язування нерівностей виду  $f(x) \geq 0$  методом інтервалів*.

Таблиця 12

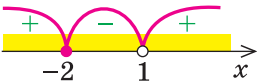
Приклад	Коментар	План розв'язування
$\frac{2x+4}{x-1} > 0$ <p>► <math>f(x) = \frac{2x+4}{x-1}</math></p>	<p>Розглянемо функцію, яка стоїть у лівій частині цієї нерівності, і позначимо її через <math>f(x)</math>: <math>f(x) = \frac{2x+4}{x-1}</math></p>	

<sup>1</sup> Докладніше це поняття буде розглянуто в 11 класі.

<sup>2</sup> В 11 класі ми уточнимо формулювання цієї властивості (так званих неперервних функцій). Для всіх відомих вам функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, дробово-раціональних) ця властивість має місце.



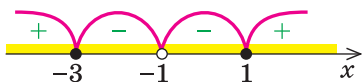
Продовження табл. 12

1. ОДЗ: $x - 1 \neq 0$ , тобто $x \neq 1$	Розв'язком нерівності $f(x) > 0$ можуть бути тільки числа, що входять до області визначення функції $f(x)$ , тобто числа, які входять до ОДЗ нерівності. Тому першим етапом розв'язування нерівності методом інтервалів буде знаходження її ОДЗ	1. Знайти ОДЗ нерівності
2. Нулі $f(x)$ : ( $f(x) = 0$ ). $\frac{2x+4}{x-1} = 0,$ тоді $x = -2$ .	Нас цікавлять ті проміжки області визначення функції $f(x)$ , на яких ця функція додатна. Як було зазначено вище, функція $f(x)$ може поміняти знак у своїх нулях, тому другим етапом розв'язування нерівності $f(x) > 0$ буде знаходження нулів функції (для цього прирівнюємо функцію $f(x)$ до нуля і розв'язуємо одержане рівняння)	2. Знайти нулі $f(x)$ ( $f(x) = 0$ )
3. 	Якщо тепер відмітити нулі на області визначення функції $f(x)$ , то область визначення розбивається на проміжки, причому всередині кожного проміжку функція $f(x)$ не змінює свій знак (рис. 1). Тому знак функції в кожному проміжку можна визначати в будь-якій точці цього проміжку. Це і є третім етапом розв'язування	3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ
4. Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ . $\triangleleft$	На рисунку до пункту 3 видно, що розв'язком нерівності є об'єднання проміжків $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$	4. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності

Наведемо приклади розв'язування більш складної дробово-раціональної нерівності методом інтервалів та за допомогою рівносильних перетворень.

**Приклад**Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \leq 0$ .I спосіб (метод інтервалів)*Розв'язання*▶ Нехай  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$ .1 ОДЗ:  $x \neq -1$ .2. Нулі  $f(x)$ :  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0$ ,

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

 $x_1 = 1, x_2 = -3$  (входять до ОДЗ).3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак  $f(x)$  у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.4. Відповідь:  $[-3; -1) \cup (-1; 1]$ . ◀*Коментар*

Задана нерівність має вигляд  $f(x) \leq 0$ , і для її розв'язування можна застосувати метод інтервалів. Для цього використовуємо план, наведений вище та в таблиці 11.

При знаходженні нулів  $f(x)$  стежимо за тим, щоб знайдені значення входили до ОДЗ (або виконуємо перевірку знайдених коренів рівняння  $f(x) = 0$ ).

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід урахувати, що всі нулі функції повинні ввійти до відповіді (у даному випадку — числа  $-3$  і  $1$ ).

II спосіб (за допомогою рівносильних перетворень)*Коментар*

Виберемо для розв'язування метод рівносильних перетворень нерівності. Виконуючи рівносильні перетворення, ми повинні врахувати ОДЗ заданої нерівності, тобто врахувати обмеження  $(x+1)^2 \neq 0$ .

Але якщо  $x \neq -1$ , то  $(x+1)^2 > 0$ , і тоді в заданому дробу знаменник додатний. Якщо виконується задана нерівність, то чисельник дробу  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$  (і навпаки, якщо виконується остання нерівність, то на ОДЗ дріб  $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \leq 0$ ), тобто задана нерівність рівносильна на ОДЗ нерівності  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ .

Щоб розв'язати одержану квадратну нерівність, знайдемо корені квадратного тричлена  $x^2 + 2x - 3$  і побудуємо ескіз графіка функції  $y = x^2 + 2x - 3$ . Розв'язок квадратної нерівності:  $-3 \leq x \leq 1$ .

Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки на ОДЗ, то ми повинні вибрати тільки ті розв'язки квадратної нерівності, які задовольняють обмеження ОДЗ.

#### Розв'язання

► ОДЗ:  $(x + 1)^2 \neq 0$ , отже,  $x \neq -1$ .

Тоді  $(x + 1)^2 > 0$  і задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівності  $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ . Оскільки  $x^2 + 2x - 3 = 0$  при  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$  (ці значення  $x$  входять до ОДЗ), одержуємо  $-3 \leq x \leq 1$  (див. рисунок).



Ураховуючи ОДЗ, отримуємо відповідь.

Відповідь:  $[-3; -1) \cup (-1; 1]$ . ◀

### Заяпитання для контролю

1. Поясніть на прикладах зміст понять: «розв'язок нерівності», «розв'язати нерівність», «область допустимих значень нерівності», «рівносильні нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладі, як можна виконувати рівносильні перетворення нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність нерівностей.

### Вправи

Розв'яжіть нерівність (1–2) двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і за допомогою методу інтервалів.

1°. 1)  $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} \geq 0$ ;

2)  $\frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}$ ;

3)  $\frac{x^2 - 25}{(x+5)(x-4)} \leq 0$ ;

4)  $\frac{x^2 + 12}{x^2 - 2x - 8} \geq 1$ .

2\*. 1)  $x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$ ;

2)  $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$ ;

3)  $\frac{81}{x} \geq x^3$ ;

4)  $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$ .

3°. Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = \sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}$ ;

2)  $y = \sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$ ;

3)  $y = \sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$ ;

4)  $y = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$ .

**§ 5** ГРАФІКИ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ  
З ДВОМА ЗМІННИМИ

Таблиця 13

1. Побудова графіків функцій виду  $y = f(x) + g(x)$

*Якщо нам відомі графіки функцій  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$ , то ескіз графіка функції  $y = f(x) + g(x)$  можна побудувати так: зобразити в одній системі координат графіки функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , а потім будувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення  $x$  (з області визначення функції  $f(x) + g(x)$ ) необхідні операції над відрізками, які зображають відповідні ординати  $f(x)$  і  $g(x)$ .*

*Аналогічно можна будувати і схематичні графіки функцій*

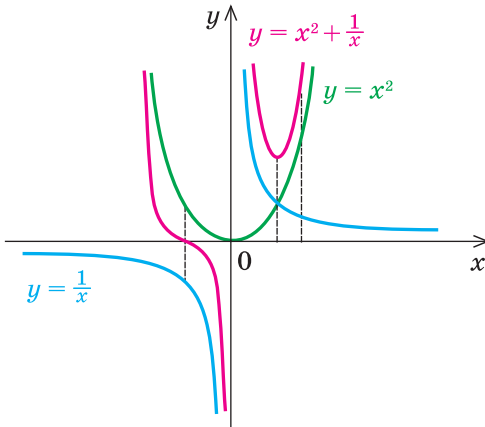
$$y = f(x) \cdot g(x) \text{ та } y = \frac{1}{f(x)}$$

Приклад

Коментар

Побудуйте графік функції

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$



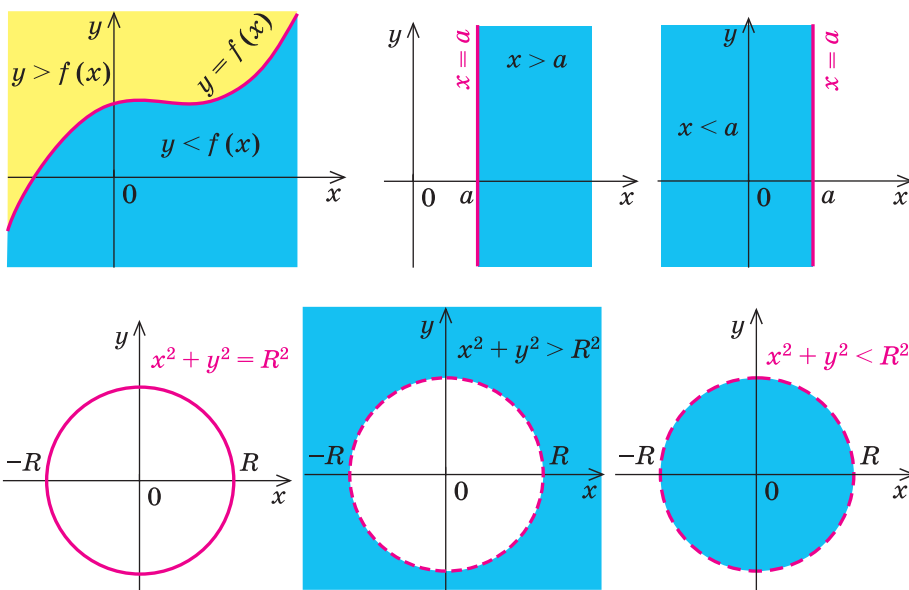
Будуємо в одній системі координат графіки функцій-доданків:  $y = x^2$  та  $y = \frac{1}{x}$  (на рисунку вони побудовані відповідно зеленою та синіми лініями). Для кожного значення  $x$  (крім  $x = 0$ , яке не входить до області визначення заданої функції) додаємо відповідні відрізки — значення функцій (справа від осі  $Oy$ ) або віднімаємо, якщо значення  $f(x)$  і  $g(x)$  протилежні за знаком (у даному випадку — зліва від осі  $Oy$ ). На рисунку рожевою лінією зображено результат — графік функції  $y = x^2 + \frac{1}{x}$

Продовження табл. 13

2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними

**Означення.** *Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними  $x$  і  $y$  називається множина всіх точок координатної площини з координатами  $(x; y)$ , де пара чисел  $(x; y)$  є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).*

Графіки деяких рівнянь і нерівностей

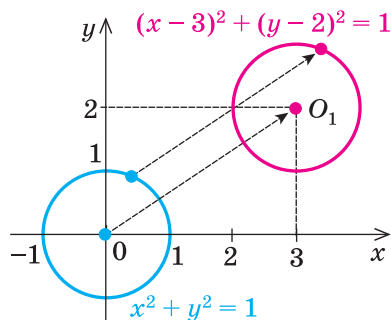


3. Геометричні перетворення графіка рівняння  $F(x; y) = 0$

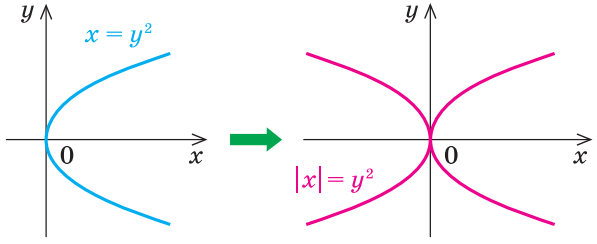
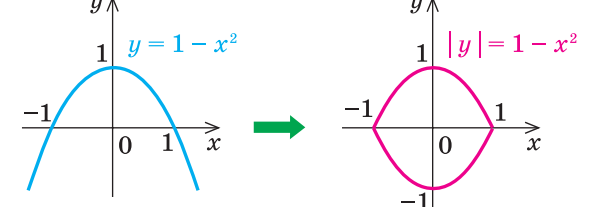
Перетворення

$F(x - a; y - b) = 0$   
Паралельне перенесення  
графіка рівняння  
 $F(x; y) = 0$   
на вектор  $\vec{n}(a; b)$

Приклад



Продовження табл. 13

<p><math>F( x ; y) = 0</math></p> <p>Частина графіка рівняння <math>F(x; y) = 0</math> праворуч від осі <math>Oy</math> (і на самій осі) залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі <math>Oy</math>.</p>	 <p>The diagram shows two coordinate systems. The left one shows a blue parabola opening to the right, labeled <math>x = y^2</math>, with its vertex at the origin <math>O</math>. A green arrow points to the right coordinate system, which shows a pink graph labeled <math> x  = y^2</math>. This graph consists of the original blue parabola and its mirror image across the <math>y</math>-axis, forming a shape symmetric about the <math>y</math>-axis.</p>
<p><math>F(x;  y ) = 0</math></p> <p>Частина графіка рівняння <math>F(x; y) = 0</math> вище від осі <math>Ox</math> (і на самій осі) залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі <math>Ox</math>.</p>	 <p>The diagram shows two coordinate systems. The left one shows a blue parabola opening downwards, labeled <math>y = 1 - x^2</math>, with its vertex at <math>(0, 1)</math> and <math>x</math>-intercepts at <math>-1</math> and <math>1</math>. A green arrow points to the right coordinate system, which shows a pink graph labeled <math> y  = 1 - x^2</math>. This graph consists of the original blue parabola and its mirror image across the <math>x</math>-axis, forming a shape symmetric about the <math>x</math>-axis.</p>

### Пояснення й обґрунтування

1. Побудова графіків функцій виду  $y = f(x) + g(x)$ . Якщо відомі графіки функцій  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$ , то можна побудувати орієнтовний вид графіка функції  $y = f(x) + g(x)$ , або  $y = f(x) \cdot g(x)$ , або  $y = \frac{1}{f(x)}$ . Для

цього достатньо зобразити в одній системі координат графіки функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , а потім побудувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення  $x$  (з області визначення заданої функції) необхідні операції над відрізками (або над довжинами цих відрізків), які зображають відповідні ординати  $f(x)$  і  $g(x)$ .

Приклад побудови графіка функції виду  $y = f(x) + g(x)$  наведено в таблиці 13, а графіка функції виду  $y = \frac{1}{f(x)}$  — далі в прикладі 1 (в останньому випадку зручно будувати графіки функцій  $y = f(x)$  і  $y = \frac{1}{f(x)}$  не в одній системі координат, а в різних, розміщених так, щоб їхні осі ординат розташовувалися на одній прямій).

Зауважимо, що такий спосіб побудови графіка функції не завжди дає можливість виявити всі характерні особливості поведінки графіка (часто це можна зробити тільки в результаті спеціального дослідження функції, яке буде розглянуто в 11 класі), але в багатьох випадках наведений спосіб дозволяє отримати певне уявлення про вид графіка заданої функції.

**2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними.** З поняттям графіка рівняння з двома змінними ви ознайомилися в курсі алгебри. Аналогічно вводиться і поняття графіка нерівності з двома змінними. Тому можна дати спільне означення цих графіків:

*Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними  $x$  і  $y$  називається множина всіх точок координатної площини з координатами  $(x; y)$ , де пара чисел  $(x; y)$  є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).*

● Для побудови графіка нерівності  $y > f(x)$  (чи  $y < f(x)$ ) достатньо мати графік функції  $y = f(x)$ . Дійсно, за означенням графік функції  $y = f(x)$  складається з усіх точок  $M$  координатної площини з координатами  $(x; y) = (x; f(x))$ . Тоді для кожного значення  $x$  точки, координати яких задовольняють нерівності  $y > f(x)$ , будуть розташовані вище точки  $M$  (рис. 54, а), а точки, координати яких задовольняють нерівності  $y < f(x)$ , будуть розташовані нижче точки  $M$  (рис. 54, б). Таким чином,

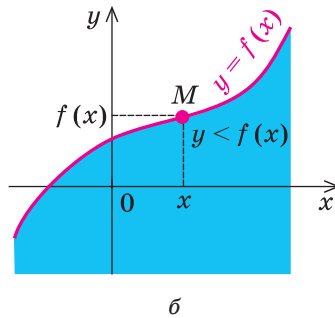
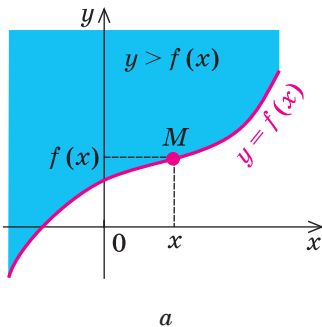


Рис. 54

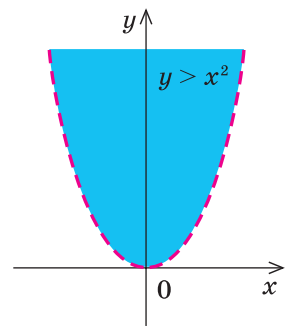


Рис. 55

графік нерівності  $y > f(x)$  складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться вище від графіка функції  $y = f(x)$ , а графік нерівності  $y < f(x)$  складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться нижче від графіка функції  $y = f(x)$ . ○

Наприклад, на рисунку 55 зображено графік нерівності  $y > x^2$ , а на рисунку 56 графік нерівності  $y \leq x^2$ . Оскільки точки графіка  $y = x^2$  не належать графіку нерівності  $y > x^2$ , то на першому графіку парабола  $y = x^2$  зображена штриховою лінією; але точки графіка  $y = x^2$  належать графіку нерівності  $y \leq x^2$ , тому на другому графіку парабола  $y = x^2$  зображена суцільною лінією.

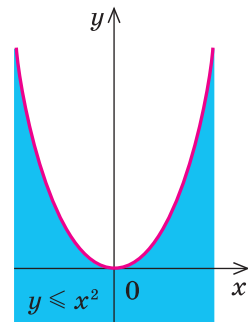


Рис. 56

Аналогічно, якщо на координатній площині є пряма  $x = a$ , то графіком нерівності  $x > a$  будуть усі точки координатної площини, які розташовані праворуч від цієї прямої, а графіком нерівності  $x < a$  будуть усі точки координатної площини, які розташовані ліворуч від цієї прямої.

Наприклад, на рисунку 57 зображено графік нерівності  $x > 2$ , а на рисунку 58 — графік нерівності  $x \leq -1$ .

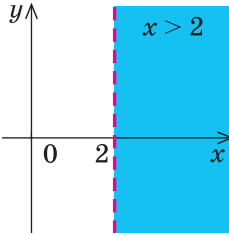


Рис. 57

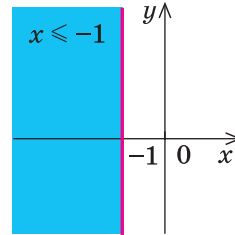
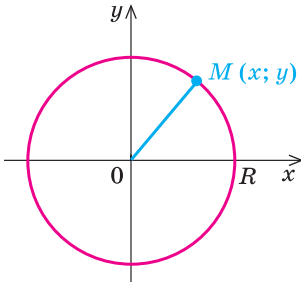


Рис. 58

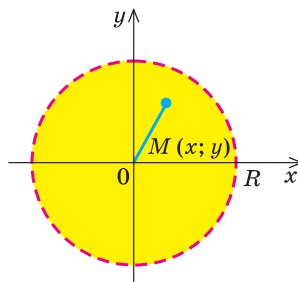
Зазначимо, що в тому випадку, коли на координатній площині є зображення кола  $x^2 + y^2 = R^2$ , то

графіком нерівності  $x^2 + y^2 < R^2$  будуть усі точки координатної площини, які розташовані всередині кола, а графіком нерівності  $x^2 + y^2 > R^2$  будуть всі точки координатної площини, які розташовані поза колом.

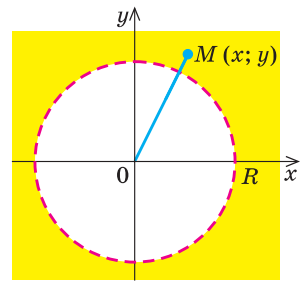
- Дійсно, якщо на координатній площині розглянути точку  $M(x, y)$ , то  $OM^2 = x^2 + y^2$  (точка  $O$  — початок координат). Якщо  $x^2 + y^2 = R^2$  (де  $R > 0$ ), то  $OM^2 = R^2$ , отже,  $OM = R$  — точка  $M$  лежить на колі радіуса  $R$  із центром у початку координат (рис. 59, а). Якщо  $x^2 + y^2 < R^2$ , то  $OM^2 < R^2$ , отже,  $OM < R$ . Тобто нерівності  $x^2 + y^2 < R^2$  задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які розташовані всередині круга, обмеженого колом радіуса  $R$  із центром у початку координат (рис. 59, б).



а



б



в

Рис. 59



Якщо  $x^2 + y^2 > R^2$ , то  $OM^2 > R^2$ , отже,  $OM > R$ . Тобто нерівності  $x^2 + y^2 > R^2$  задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які знаходяться поза кругом, обмеженим колом радіуса  $R$  із центром у початку координат (рис. 59, в).

Аналогічно, якщо на площині є зображення кола  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , то графіком нерівності  $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$  будуть усі точки координатної площини, які розташовані всередині кола, а графіком нерівності  $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$  будуть усі точки координатної площини, які розташовані поза колом. Наприклад, на рисунку 60 зображено графік нерівності  $x^2 + y^2 > 9$ , а на рисунку 61 — графік нерівності  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 16$ . ○

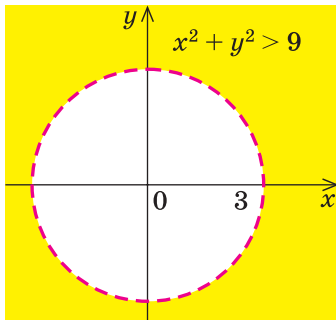


Рис. 60

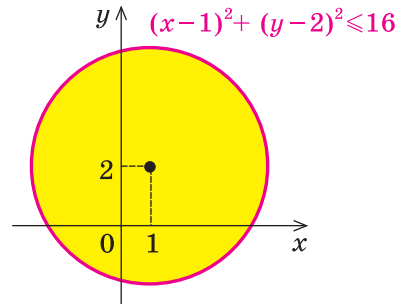


Рис. 61

### 3. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ .

● За означенням графік рівняння

$$F(x; y) = 0 \quad (1)$$

складається з усіх точок  $M(x_0; y_0)$  координатної площини, координати  $(x_0; y_0)$  яких є розв'язками цього рівняння. Це означає, що при підстановці пари чисел  $(x_0; y_0)$  у задане рівняння воно перетворюється на правильну числову рівність, отже,  $F(x_0; y_0) = 0$  — правильна рівність.

Розглянемо точку  $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ . Якщо координати цієї точки підставити в рівняння

$$F(x - a; y - b) = 0, \quad (2)$$

то одержимо рівність  $F(x_0; y_0) = 0$ , яка є правильною. Тому координати точки  $M_1$  є розв'язками рівняння (2), а отже, точка  $M_1$  належить графіку рівняння  $F(x - a; y - b) = 0$ . Точку  $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$  можна одержати з точки  $M(x_0; y_0)$  паралельним перенесенням її на вектор  $\vec{n}(a; b)$ . Оскільки кожному точці  $M_1$  графіка рівняння  $F(x - a; y - b) = 0$  можна одержати з точки  $M$  графіка рівняння

$F(x; y) = 0$  паралельним перенесенням її на вектор  $\vec{n}(a; b)$  (рис. 62), то і весь

**графік рівняння  $F(x - a; y - b) = 0$  можна одержати з графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  паралельним перенесенням його на вектор  $\vec{n}(a; b)$ .** ○

- Для обґрунтування зв'язку між графіками  $F(x; y) = 0$  і  $F(|x|; y) = 0$  достатньо помітити, що при  $x \geq 0$  рівняння  $F(|x|; y) = 0$  збігається з рівнянням  $F(x; y) = 0$ , отже, збігаються і їхні графіки праворуч від осі  $Oy$  і на самій осі. Нехай точка  $M(x_0; y_0)$  (де  $x_0 \geq 0$ ) — одна із спільних точок цих графіків. Тоді  $F(x_0; y_0) = 0$  — правильна рівність. Розглянемо точку  $M_1(-x_0; y_0)$ . Якщо координати цієї точки підставити в рівняння  $F(|x|; y) = 0$  і врахувати, що  $x_0 \geq 0$ , то одержимо рівність  $F(x_0; y_0) = 0$ , яка є правильною. Тому координати точки  $M_1$  є розв'язками рівняння  $F(|x|; y) = 0$ , а отже, точка  $M_1$  належить графіку цього рівняння. Ураховуючи, що точки  $M$  і  $M_1$  симетричні відносно осі  $Oy$  (рис. 63),

**графік рівняння  $F(|x|; y) = 0$  можна одержати із графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  так: частину графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  праворуч від осі  $Oy$  (і на самій осі) залишити без змін і цю саму частину відобразити симетрично відносно осі  $Oy$ .** ○

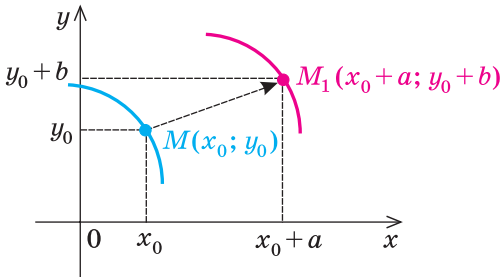


Рис. 62

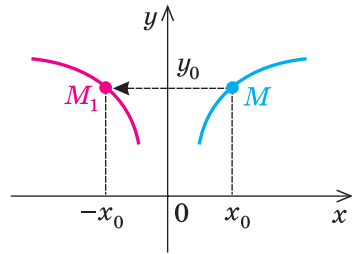


Рис. 63

Аналогічно можна обґрунтувати, що

**для побудови графіка рівняння  $F(x; |y|) = 0$  частину графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  вище від осі  $Ox$  (і на самій осі) потрібно залишити без змін і цю саму частину відобразити симетрично відносно осі  $Ox$ .**

У таблиці 13 наведено найпростіші приклади використання геометричних перетворень графіків рівнянь. Указані співвідношення використовують у завданнях типу: побудувати графік рівняння чи нерівності або зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють заданому рівнянню (нерівності).

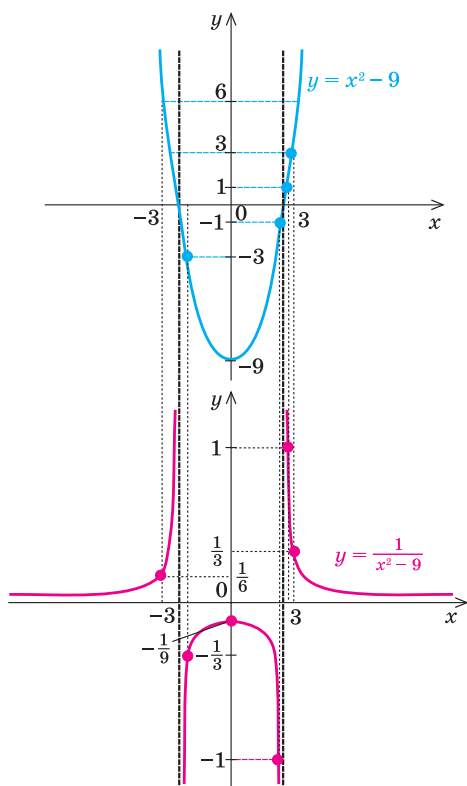
## Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Побудуйте графік функції  $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ .

### Розв'язання

►  $x^2 - 9 = 0$  при  $x = \pm 3$ . Тому область визначення заданої функції:

$$x^2 - 9 \neq 0, \text{ тобто } x \neq \pm 3.$$



### Коментар

Побудуємо дві системи координат так, щоб осі ординат у них були на одній прямій. У тих точках, де функція  $f(x) = x^2 - 9$  дорівнює нулю ( $x = \pm 3$ ), не існує графіка функції

$$y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

Тому проведемо через ці точки вертикальні прямі, що не перетинають графік функції

$$y = \frac{1}{f(x)}.$$

Потім для кожного значення  $x$  поділимо 1 на відповідне значення ординати  $f(x)$  (використовуючи те, що ординати  $f(x)$  відмічені на верхньому графіку). На рисунку червоною лінією зображено результат — графік функції

$$y = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

(Для побудови цього графіка вибрано різний масштаб по осях  $Ox$  і  $Oy$ .)



**Приклад 2**

Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі

$$\begin{cases} x^2 + y \leq 0, \\ x - y < 2. \end{cases}$$

*Розв'язання*

► Задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} y \leq -x^2, \\ y > x - 2. \end{cases}$$

Зобразимо штриховкою графіки нерівностей системи (першої — вертикальною, другої — горизонтальною):

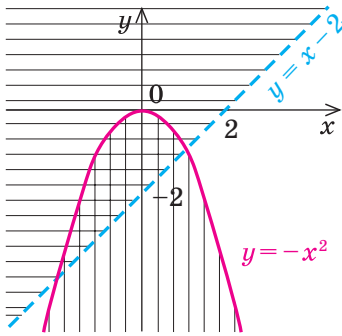


Рис. 64

Тоді множина точок, координати яких задовольняють системі, буде такою:

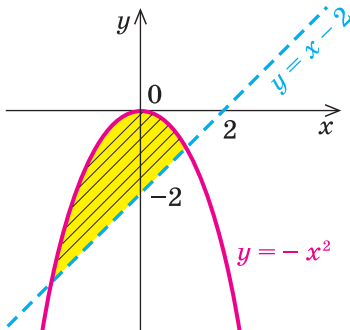


Рис. 65

*Коментар*

Перепишемо задану систему так, щоб нам було зручно зображати графіки заданих нерівностей (тобто запишемо нерівності у вигляді  $y > f(x)$  або  $y < f(x)$ ). Множиною точок, координати яких задовольняють нерівності  $y \leq -x^2$ , є об'єднання параболи  $y = -x^2$  і точок координатної площини, які розташовані нижче цієї параболи (на рис. 64 ця множина позначена вертикальною штриховкою). Множина точок, координати яких задовольняють нерівності  $y > x - 2$ , складається з точок координатної площини, які знаходяться вище прямої  $y = x - 2$  (на рисунку ця множина позначена горизонтальною штриховкою).

Системі нерівностей задовольняють координати тих і тільки тих точок, які належать перетину множин точок, що задаються кожною з нерівностей заданої системи (на рисунку перетину множин відповідає та область, де штриховки наклалися одна на одну).

Зауважимо, що в подібних завданнях можна не виконувати проміжних рисунків, а відразу штрихувати шукану множину точок координатної площини (вище прямої  $y = x - 2$  і нижче параболи  $y = -x^2$  разом з тією частиною параболи, яка лежить вище прямої; рис. 65).

**Приклад 3** Побудуйте графік рівняння  $|x - y| + 2|x + y| = x + 6$ .

*Орієнтир*

Для спрощення виразу з кількома модулями з двома змінними можна знайти нулі підмодульних виразів (тобто прирівняти їх до нуля) і розбити область визначення розглядуваного виразу на декілька частин, у кожній з яких всі модулі розкриваються однозначно.

Використовуючи цей орієнтир, одержуємо *план розв'язання* прикладу.

Прирівнюємо до нуля підмодульні вирази  $x - y = 0$  (звідси  $y = x$ ) і  $x + y = 0$  (звідси  $y = -x$ ). Прямі  $y = x$  і  $y = -x$  розбивають координатну площину на чотири області. У кожній із цих областей всі модулі розкриваються однозначно, і після перетворення одержаної рівності можна будувати відповідну частину графіка заданого рівняння.

*Розв'язання*

- 1. Область визначення:  $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ .  
 2.  $x - y = 0$  при  $y = x$ ;  $x + y = 0$  при  $y = -x$ .  
 3. Прямі  $y = x$  і  $y = -x$  розбивають координатну площину на чотири частини, у кожній з яких позначено знаки першого і другого підмодульних виразів (рис. 66, а). (Будемо вважати, що кожна область береться разом із променями, які її обмежують.) Дійсно, якщо точки розташовані в області I або на її межі, то їхні координати задоволь-

няють системі нерівностей  $\begin{cases} y \geq x, \\ y \geq -x, \end{cases}$  яку можна записати так:

$\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \geq 0. \end{cases}$  Тоді в області I перший підмодульний вираз є від'ємним,

а другий — додатним, і тому задане рівняння має вигляд:  $-(x - y) + 2(x + y) = x + 6$ . Звідси  $y = 2$ . Будемо частину графіка цієї функції, що розміщується в області I (рис. 66, б).

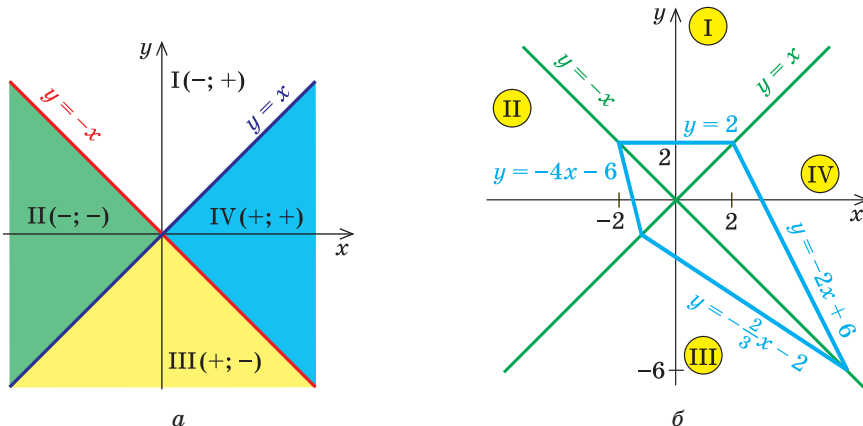


Рис. 66

Аналогічно для точок області II:  $\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq -x, \end{cases}$  тобто  $\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x + y \leq 0. \end{cases}$

Отже, в області II задане рівняння має вигляд:  $-(x - y) - 2(x + y) = x + 6$ . Звідси  $y = -4x - 6$ . Будуємо частину графіка цієї функції, що розташовується в області II.

Якщо точки розташовані в області III:  $\begin{cases} y \leq x, \\ y \leq -x, \end{cases}$  тобто  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \leq 0, \end{cases}$

із заданого рівняння одержуємо  $(x - y) - 2(x + y) = x + 6$ . Звідси  $y = -\frac{2}{3}x - 2$ .

Якщо точки лежать в області IV:  $\begin{cases} y \leq x, \\ y \geq -x, \end{cases}$  тобто  $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ x + y \geq 0, \end{cases}$  із задано-

го рівняння маємо  $(x - y) + 2(x + y) = x + 6$ . Звідси  $y = -2x + 6$ .

Остаточний вигляд графіка рівняння наведено на рисунку 66, б.  $\triangleleft$

### Заяпитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна, маючи графіки функцій  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$ , побудувати ескіз графіка функції  $y = f(x) + g(x)$  та функції  $y = \frac{1}{f(x)}$ .
2. Що називається графіком рівняння з двома змінними? Що називається графіком нерівності з двома змінними? Наведіть приклади.
3. Як, знаючи графік функції  $y = f(x)$ , побудувати графік нерівності  $y > f(x)$  та нерівності  $y < f(x)$ ? Наведіть приклади.
4. Як, знаючи графік рівняння  $F(x; y) = 0$ , можна побудувати графік рівняння  $F(x - a; y - b) = 0$  та рівнянь  $F(|x|; y) = 0$  і  $F(x; |y|) = 0$ ? Наведіть приклади.
5. Обґрунтуйте правила геометричних перетворень графіка рівняння  $F(x; y) = 0$  для одержання графіків рівнянь  $F(x - a; y - b) = 0$ ,  $F(|x|; y) = 0$ ,  $F(x; |y|) = 0$ .
6. Поясніть на прикладі, як можна знайти на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі нерівностей із двома змінними.

### Вправи

1. Побудуйте ескіз графіка функції:

$$1) y = x + \frac{1}{x}; \quad 2) y = x - \frac{1}{x}; \quad 3) y = x^3 + \frac{1}{x}; \quad 4) y = x^2 - \frac{1}{x}.$$

2. Побудуйте графік рівняння:

$$1) |y| = x - 2; \quad 2) |y| = x^2 - x; \quad 3) |x| = -y^2;$$

$$4) |x| + |y| = 2; \quad 5) |x| - |y| = 2.$$

3. Побудуйте графік нерівності:

$$1) y > x^2 - 3; \quad 2) y < \frac{1}{x}; \quad 3) x^2 + y^2 \leq 25;$$

$$4) (x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 4.$$

4. Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y > x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9, \\ x^2 + y^2 \leq 25; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y \leq 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y \leq 5 - x, \\ y \geq x, \\ y \leq 2x + 4. \end{cases}$$

5. Побудуйте графік рівняння:

$$1) |x - y| - |x + y| = y + 3;$$

$$2) |x - 2y| + |2x - y| = 2 - y;$$

$$3) |3x + y| + |x - y| = 4.$$

## § 6 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

При розв'язуванні математичних завдань інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа  $n$ .

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо — їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так: 1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при  $n = 1$ ; 2) я можу показати, що для кожного наступного значення  $n$  вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Такий спосіб міркувань при доведенні математичних тверджень називається *методом математичної індукції*. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, у яких містяться слова «для довільного натурального  $n$ » (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) *початок індукції*: перевіряють, чи виконується розглядуване твердження при  $n = 1$ ;

2) *індуктивний перехід*: доводять, що коли задане твердження виконується для  $k$ , то воно виконується і для  $k + 1$ .

Таким чином, почавши з  $n = 1$ , ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливність сформульованого твердження для  $n = 2, 3, \dots$ , тобто для будь-якого натурального  $n$ .

На практиці цей метод зручно використовувати за схемою, наведеною в таблиці 14.

Таблиця 14

Схема доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції	Приклад
<p>1. <i>Перевіряємо, чи виконується дане твердження при <math>n = 1</math> (іноді починають з <math>n = p</math>).</i></p> <p>2. <i>Припускаємо, що задане твердження справедливе при <math>n = k</math>, де <math>k \geq 1</math> (другий варіант — при <math>n \leq k</math>).</i></p> <p>3. <i>Доводимо (спираючись на припущення) справедливність нашого твердження і при <math>n = k + 1</math>.</i></p> <p>4. <i>Робимо висновок, що дане твердження справедливе для будь-якого натурального числа <math>n</math> (для будь-якого <math>n \geq p</math>).</i></p>	<p>Доведіть, що для довільного натурального <math>n</math>:</p> $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$ <p>► Для зручності запису позначимо <math>S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)</math>.</p> <p>1. При <math>n = 1</math> рівність виконується:  <math>1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3</math>, тобто <math>2 = 2</math>.</p> <p>2. Припускаємо, що задана рівність є правильною при <math>n = k</math>, де <math>k \geq 1</math>, тобто <math>S_k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)</math>. (1)</p> <p>3. Доведемо, що рівність виконується і при <math>n = k + 1</math>, тобто доведемо, що <math>S_{k+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)</math>.</p> <p>Ураховуючи, що <math>S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)</math>, і підставляючи <math>S_k</math> з рівності (1), одержуємо <math>S_{k+1} = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)</math>, що й потрібно було довести.</p> <p>4. Отже, задана рівність правильна для будь-якого натурального <math>n</math>. ◀</p>

### Приклади розв'язування завдань

**Приклад 1** Доведіть, що  $10^n - 9n - 1$  ділиться на 81 при будь-якому натуральному  $n$ .

#### Коментар

Оскільки твердження необхідно довести для будь-якого натурального  $n$ , то використаємо метод математичної індукції за схемою, наведеною в таблиці 14. Виконуючи індуктивний перехід (від  $n = k$  до  $n = k + 1$ ),



подамо вираз, який одержуємо при  $n = k + 1$ , як суму двох виразів: того, що одержали при  $n = k$ , і ще одного виразу, який ділиться на 81.

*Розв'язання*

- ▶ Перевіряємо, чи виконується задане твердження при  $n = 1$ . Якщо  $n = 1$ , заданий вираз дорівнює 0, тобто ділиться на 81. Отже, задана властивість виконується при  $n = 1$ .
- Припускаємо, що задане твердження виконується при  $n = k$ , тобто що  $10^k - 9k - 1$  ділиться на 81.
- Доведемо, що задане твердження виконується і при  $n = k + 1$ , тобто що  $10^{k+1} - 9(k+1) - 1$  ділиться на 81.  
 $10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k$ .  
 Вираз у дужках — це значення заданого виразу при  $n = k$ , яке за припущенням індукції ділиться на 81. Отже, кожний доданок останньої суми ділиться на 81, тоді і вся сума, тобто  $10^{k+1} - 9(k+1) - 1$ , ділиться на 81. Таким чином, задане твердження виконується і при  $n = k + 1$ .
- Отже, вираз  $10^k - 9n - 1$  ділиться на 81 при будь-якому натуральному  $n$ . ◀

**Приклад 2** Доведіть, що  $2^n > 2n + 1$ , якщо  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Коментар*

Оскільки твердження повинно виконуватися починаючи з  $n = 3$ , то перевірку проводимо саме для цього числа. Записуючи припущення індукції, зручно використати, що за означенням поняття «більше»  $a > b$  тоді і тільки тоді, коли  $a - b > 0$ . Доводячи нерівність при  $n = k + 1$ , знову використовуємо те саме означення і доводимо, що різниця між лівою і правою частинами відповідної нерівності додатна.

*Розв'язання*

- При  $n = 3$  одержуємо  $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$ , тобто  $8 > 7$  — правильна нерівність. Отже, при  $n = 3$  задана нерівність виконується.
- Припускаємо, що задана нерівність виконується при  $n = k$  (де  $k \geq 3$ ):  
 $2^k > 2k + 1$ , тобто  $2^k - 2k - 1 > 0$ . (1)
- Доведемо, що задана нерівність виконується і при  $n = k + 1$ , тобто доведемо, що  $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$ .

Розглянемо різницю

$$2^{k+1} - (2(k+1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$$

(оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при  $k \geq 3$  вираз  $2k - 1$  теж додатний). Отже,  $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$ , тобто задана нерівність виконується і при  $n = k + 1$ .

- Таким чином, задана нерівність виконується при всіх натуральних  $n \geq 3$ .

## Вправи

Доведіть за допомогою методу математичної індукції (1–12).

- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$  при всіх натуральних  $n$  ( $n \in N$ ).
- $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ , де  $n \in N$ .
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ , де  $n \in N$ .
- $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ , де  $n \in N$ .
- Добуток  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  позначається  $n!$  (читається: « $n$  факторіал»). Доведіть, що  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ , де  $n \in N$ .
- $4^n > 7n - 5$ , якщо  $n \in N$ .
- $2^n > n^3$ , якщо  $n \geq 10$ .
- Доведіть, що  $9^n - 8n - 1$  ділиться на 16 при будь-якому натуральному  $n$ .
- Доведіть, що  $5^n + 2 \cdot 3^n - 3$  ділиться на 8 при будь-якому натуральному  $n$ .
- Доведіть, що  $7^n + 3^n - 2$  ділиться на 8 при будь-якому натуральному  $n$ .
- Доведіть, що  $2^{3n+3} - 7n + 41$  ділиться на 49 при будь-якому натуральному  $n$ .
- Доведіть, що коли  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 8$ ,  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$ , то  $a_n = 3^n - 1$ , де  $n \in N$ .

## § 7 МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

### 7.1. Означення многочленів від однієї змінної та їх тотожна рівність

Розглянемо одночлен і многочлен, які залежать тільки від однієї змінної, наприклад від змінної  $x$ .

За означенням одночлена числа і букви (у нашому випадку одна буква —  $x$ ) у ньому пов'язані тільки двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня. Якщо в цьому одночлені добуток усіх чисел записати перед буквою, а добуток усіх степенів букви записати як цілий невід'ємний степінь цієї букви (тобто записати одночлен у стандартному вигляді), то одержимо вираз виду  $ax^n$ , де  $a$  — деяке число. Тому *одночлен від однієї змінної  $x$  — це вираз виду  $ax^n$ , де  $a$  — деяке число,  $n$  — ціле невід'ємне число*. Якщо  $a \neq 0$ , то показник степеня  $n$  змінної  $x$  називається *степенем одночлена*. Наприклад,  $25x^6$  — одночлен шостого степеня,  $\frac{2}{3}x^2$  — одночлен другого степеня. Якщо одночлен є числом (не рівним нулю), то його степінь вважають рівним нулю. Для

однотлена, який заданий числом 0, поняття степеня не означають (оскільки  $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \dots$ ).

За означенням многочлен від однієї змінної  $x$  — це сума одночленів від однієї змінної  $x$ . Тому

**многочленом від однієї змінної  $x$  називається вираз виду**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

**де коефіцієнти  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  — деякі числа.**

Якщо  $a_n \neq 0$ , то цей многочлен називають *многочленом  $n$ -го степеня* від змінної  $x$ . При цьому член  $a_n x^n$  називають *старшим членом* многочлена  $f(x)$ , число  $a_n$  — *коефіцієнтом при старшому члені*, а член  $a_0$  — *вільним членом*. Наприклад,  $5x^3 - 2x + 1$  — многочлен третього степеня, у якого вільний член дорівнює 1, а коефіцієнт при старшому члені дорівнює 5.

Зазначимо, що іноді нумерацію коефіцієнтів многочлена починають з початку запису виразу (1), і тоді загальний вид многочлена  $f(x)$  записують так:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n,$$

де  $b_0, b_1, \dots, b_n$  — деякі числа.

**Теорема 1. Одночлени  $ax^n$ , де  $a \neq 0$ , та  $bx^m$ , де  $b \neq 0$ , тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли  $a = b$  і  $n = m$ .**

**Одночлен  $ax^n$  тотожно рівний нулю тоді і тільки тоді, коли  $a = 0$ .**

● Оскільки рівність одночленів

$$ax^n = bx^m \quad (2)$$

виконується при всіх значеннях  $x$  (за умовою ці одночлени тотожно рівні), то, підставляючи в цю рівність  $x = 1$ , отримуємо  $a = b$ . Скорочуючи обидві частини рівності (2) на  $a$  (де  $a \neq 0$  за умовою), одержуємо  $x^n = x^m$ . При  $x = 2$  із цієї рівності маємо:  $2^n = 2^m$ . Оскільки  $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n$ , а  $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_m$ , то рівність  $2^n = 2^m$  можлива лише

тоді, коли  $n = m$ . Отже, з тотожної рівності  $ax^n = bx^m$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) отримуємо, що  $a = b$  і  $n = m$ .

Якщо відомо, що  $ax^n = 0$  для всіх  $x$ , то при  $x = 1$  одержуємо  $a = 0$ . Тому одночлен  $ax^n$  тотожно рівний нулю при  $a = 0$  (тоді  $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv 0^1$ ). ○

Надалі будь-який одночлен виду  $0 \cdot x^n$  замінюватимемо на 0.

**Теорема 2. Якщо многочлен  $f(x)$  тотожно рівний нулю (тобто набуває нульових значень при всіх значеннях  $x$ ), то всі його коефіцієнти рівні нулю.**

<sup>1</sup> Значком  $\equiv$  позначено тотожну рівність многочленів.

- Для доведення використовуємо метод математичної індукції.  
Нехай  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0$ .  
При  $n = 0$  маємо  $f(x) = a_0 \equiv 0$ , тому  $a_0 = 0$ . Тобто в цьому випадку твердження теореми виконується.  
Припустимо, що при  $n = k$  це твердження також виконується: якщо многочлен  $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0$ , то  $a_k = a_{k-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ .  
Доведемо, що задане твердження виконується й при  $n = k + 1$ . Нехай  

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \quad (3)$$
Оскільки рівність (3) виконується при всіх значеннях  $x$ , то, підставляючи в цю рівність  $x = 0$ , одержуємо, що  $a_0 = 0$ . Тоді рівність (3) перетворюється на таку рівність:  $a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \dots + a_1 x \equiv 0$ . Внесемо  $x$  у лівій частині цієї рівності за дужки та одержимо  

$$x (a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \dots + a_1) \equiv 0. \quad (4)$$
Рівність (4) повинна виконуватися при всіх значеннях  $x$ . Для того щоб вона виконувалася при  $x \neq 0$ , повинна виконуватися тотожність  

$$a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \dots + a_1 \equiv 0.$$
У лівій частині цієї тотожності стоїть многочлен із степенями змінної від  $x^0$  до  $x^k$ . Тоді за припущенням індукції всі його коефіцієнти дорівнюють нулю:  $a_{k+1} = a_k = \dots = a_1 = 0$ . Але ми довели також, що  $a_0 = 0$ , тому наше твердження виконується і при  $n = k + 1$ . Отже, твердження теореми справедливе для будь-якого цілого невід'ємного  $n$ , тобто для всіх многочленів. ○

**Многочлен, у якого всі коефіцієнти рівні нулю, зазвичай називають нульовим многочленом, або нуль-многочленом, і позначають  $0(x)$  або просто  $0$  (оскільки  $0(x) = 0$ ).**

**Теорема 3. Якщо два многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  тотожно рівні, то вони збігаються (тобто їхні степені однакові й коефіцієнти при однакових степенях рівні).**

- Нехай многочлен  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , а многочлен  $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ . Розглянемо многочлен  $f(x) - g(x)$ . Оскільки многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  за умовою тотожно рівні, то многочлен  $f(x) - g(x)$  тотожно дорівнює  $0$ . Отже, усі його коефіцієнти дорівнюють нулю.  
Але  $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots$ .  
Тоді  $a_0 - b_0 = 0$ ,  $a_1 - b_1 = 0$ ,  $a_2 - b_2 = 0$ ,  $\dots$ . Звідси  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $\dots$ . Як бачимо, якщо припустити, що в якогось із двох заданих многочленів степінь вищий, ніж у другого многочлена (наприклад,  $n$  більше  $m$ ), то коефіцієнти різниці дорівнюватимуть нулю. Тому, починаючи з  $(m + 1)$ -го номера, усі коефіцієнти  $a_i$  також дорівнюватимуть нулю. Отже, многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  дійсно мають однаковий степінь і відповідно рівні коефіцієнти при однакових степенях. ○

Теорема 3 є основою так званого *методу невизначених коефіцієнтів*. Покажемо його застосування на такому прикладі.

**Приклад** Доведіть, що  $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$  є повним квадратом.

► Заданий многочлен є многочленом четвертого степеня, тому він може бути повним квадратом тільки многочлена другого степеня. Многочлен другого степеня має вигляд  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

Одержуємо тотожність:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (ax^2 + bx + c)^2. \quad (5)$$

Розкриваючи дужки в лівій і правій частинах цієї тотожності та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$ , одержуємо систему рівностей. Цей етап зручно оформляти в такому вигляді:

$x^4$	$1 = a^2$
$x^3$	$2 + 4 + 6 + 8 = 2ab$
$x^2$	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = b^2 + 2ac$
$x^1$	$2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2bc$
$x^0$	$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 16 = c^2$

З першої рівності одержуємо  $a = 1$  або  $a = -1$ .

При  $a = 1$  із другої рівності маємо  $b = 10$ , а з третьої —  $c = 20$ . Як бачимо, при цих значеннях  $a$ ,  $b$  і  $c$  останні дві рівності також виконуються. Отже, тотожність (5) виконується при  $a = 1$ ,  $b = 10$ ,  $c = 20$  (аналогічно можна також одержати  $a = -1$ ,  $b = -10$ ,  $c = -20$ ).

Таким чином,  $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (x^2 + 10x + 20)^2$ . ◀

## Вправи

- Знаючи, що многочлени  $f(x)$  і  $g(x)$  тотожно рівні, знайдіть значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ :
  - $f(x) = 2x^2 - (3 - a)x + b$ ,  $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$ ;
  - $f(x) = (a + 1)x^3 + 2$ ,  $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c - 1)x + d$ .
- Знайдіть такі числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , щоб задана рівність  $(x^2 - 1)a + b(x - 2) + c(x + 2) = 2$  виконувалася при будь-яких значеннях  $x$ .
- Доведіть тотожність:
  - $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$ ;
  - $1 + x^4 = (1 + x\sqrt{2} + x^2)(1 - x\sqrt{2} + x^2)$ .
- Доведіть, що заданий вираз є повним квадратом:
  - $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$ ;
  - $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$ .

5. Знайдіть такі  $a$  і  $b$ , щоб при будь-яких значеннях  $x$  виконувалася рівність

$$3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b).$$

6. Запишіть алгебраїчний дріб  $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$  як суму двох алгебраїчних

дрібів виду  $\frac{a}{3x-1}$  і  $\frac{b}{5x+2}$ .

## 7.2. Дії над многочленами. Ділення многочлена на многочлен з остачею

Додавання і множення многочленів від однієї змінної виконують за допомогою відомих правил додавання і множення многочленів. У результаті виконання дій додавання або множення над многочленами від однієї змінної завжди одержують многочлен від тієї самої змінної.

З означення добутку двох многочленів випливає, що *старший член добутку двох многочленів дорівнює добутку старших членів множників, а вільний член добутку дорівнює добутку вільних членів множників. Звідси одержуємо, що степінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів множників.*

При додаванні многочленів одного степеня одержують многочлен цього самого степеня, хоча іноді можна одержати многочлен меншого степеня.

Наприклад,  $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$ .

При додаванні многочленів різних степенів завжди одержуємо многочлен, степінь якого дорівнює більшому степеню доданку.

Наприклад,  $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$ .

Ділення многочлена на многочлен означається аналогічно діленню цілих чисел. Нагадаємо, що ціле число  $a$  ділиться на ціле число  $b$  ( $b \neq 0$ ), якщо існує таке ціле число  $q$ , що  $a = b \cdot q$ .

**Означення.** Многочлен  $A(x)$  ділиться на многочлен  $B(x)$  (де  $B(x)$  — ненульовий многочлен), якщо існує такий многочлен  $Q(x)$ , що

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

Як і для цілих чисел, операція ділення многочлена на многочлен виконується не завжди, тому в множині многочленів вводять операцію *ділення з остачею*. Кажуть, що

**многочлен  $A(x)$  ділиться на многочлен  $B(x)$  (де  $B(x)$  — ненульовий многочлен) з остачею, якщо існує така пара многочленів  $Q(x)$  і  $R(x)$ , що  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ , причому степінь остачі  $R(x)$  менший за степінь дільника  $B(x)$ . (Зазначимо, що в цьому випадку многочлен  $Q(x)$  називається *неповною часткою*.)**

Наприклад, оскільки  $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)x + 2$ , то при діленні многочлена  $x^3 - 5x + 2$  на многочлен  $x^2 - 5$  одержуємо неповну частку  $x$  і остачу 2.

Іноді ділення многочлена на многочлен, як і ділення багатозначних чисел, зручно виконувати «куточком», користуючись таким алгоритмом.

**Приклад** Розділимо многочлен  $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$  на многочлен  $B(x) = x^2 - 2x + 3$ .

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2} & x^2 - 3x - 8 \\
 -3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\
 \underline{-3x^3 + 6x^2 - 9x} & \\
 -8x^2 + 17x - 20 & \\
 \underline{-8x^2 + 16x - 24} & \\
 x + 4 & \triangleleft
 \end{array}$$

Доведемо, що одержаний результат дійсно є результатом ділення  $A(x)$  на  $B(x)$  з остачею.

● Якщо позначити результат виконання першого кроку алгоритму через  $f_1(x)$ , другого кроку — через  $f_2(x)$ , третього — через  $f_3(x)$ , то операцію ділення, яку виконали вище, можна записати у вигляді системи рівностей:

$$f_1(x) = A(x) - x^2 \cdot B(x); \quad (1)$$

$$f_2(x) = f_1(x) - (-3x) \cdot B(x); \quad (2)$$

$$f_3(x) = f_2(x) - (-8) \cdot B(x). \quad (3)$$

Додамо почленно рівності (1), (2), (3) та отримаємо

$$A(x) = (x^2 - 3x - 8)B(x) + f_3(x). \quad (4)$$

Ураховуючи, що степінь  $f_3(x) = x + 4$  менший за степінь дільника  $B(x) = x^2 - 2x + 3$ , позначимо  $f_3(x) = R(x)$  (остача), а  $x^2 - 3x - 8 = Q(x)$  (неповна частка). Тоді з рівності (4) маємо:  $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ , тобто  $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x - 8) + x + 4$ , а це й означає, що ми розділили  $A(x)$  на  $B(x)$  з остачею.

Очевидно, що наведене обґрунтування можна провести для будь-якої пари многочленів  $A(x)$  і  $B(x)$  у випадку їх ділення стовпчиком. Тому описаний вище алгоритм дозволяє для довільних діленого  $A(x)$  і дільника  $B(x)$  (де  $B(x)$  — не нульовий многочлен) знайти неповну частку  $Q(x)$  та остачу  $R(x)$ .

Зазначимо, що у випадку, коли степінь діленого  $A(x)$  менший за степінь дільника  $B(x)$ , вважають, що неповна частка  $Q(x) = 0$ , а остача  $R(x) = A(x)$ .

## Вправи

- Виконайте ділення многочлена на многочлен:
  - $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$  на  $x - 2$ ;                      2)  $x^{10} + 1$  на  $x^2 + 1$ ;
  - $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$  на  $x^2 + 2x + 3$ .
- Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:
  - $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$  на  $x^2 + x + 2$ ;
  - $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$  на  $x^2 - x - 2$ .
- При яких значеннях  $a$  і  $b$  многочлен  $A(x)$  ділиться без остачі на многочлен  $B(x)$ ?
  - $A(x) = x^3 + ax + b$ ,  $B(x) = x^2 + 5x + 7$ ;
  - $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$ ,  $B(x) = x^2 - 4$ ;
  - $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b$ ,  $B(x) = x^2 - x + 2$ .
- Знайдіть неповну частку і остачу при діленні многочлена  $A(x)$  на многочлен  $B(x)$  методом невизначених коефіцієнтів:
  - $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ,  $B(x) = x^2 - 1$ ;
  - $A(x) = x^3 - 19x - 30$ ,  $B(x) = x^2 + 1$ .

### 7.3. Теорема Безу. Корені многочлена. Формули Вієта

Розглянемо ділення многочлена  $f(x)$  на двочлен  $(x - a)$ . Оскільки степінь дільника дорівнює 1, то степінь остачі, яку ми одержимо, повинен бути меншим за 1, тобто в цьому випадку остачею буде деяке число  $R$ . Таким чином, якщо розділити многочлен  $f(x)$  на двочлен  $(x - a)$ , то одержимо

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Ця рівність виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні  $x$ . При  $x = a$  маємо:  $f(a) = R$ . Одержаний результат називають теоремою Безу<sup>1</sup>.

**Теорема 1 (теорема Безу).** *Остача від ділення многочлена  $f(x)$  на двочлен  $(x - a)$  дорівнює  $f(a)$  (тобто значенню многочлена при  $x = a$ ).*

**Приклад 1** Доведіть, що  $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$  ділиться без остачі на  $x - 1$ .

► Підставивши в  $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$  замість  $x$  значення 1, одержуємо:  $f(1) = 0$ . Отже, остача від ділення  $f(x)$  на  $(x - 1)$  дорівнює 0, тобто  $f(x)$  ділиться на  $(x - 1)$  без остачі. ◁

**Означення.** Число  $\alpha$  називається коренем многочлена  $f(x)$ , якщо  $f(\alpha) = 0$ .

<sup>1</sup> Безу Етьєн (1730–1783) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток теорії алгебраїчних рівнянь.



Якщо многочлен  $f(x)$  ділиться на  $(x - \alpha)$ , то  $\alpha$  — корінь цього многочлена.

- Дійсно, якщо  $f(x)$  ділиться на  $(x - \alpha)$ , то  $f(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$  і тому  $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) = 0$ . Отже,  $\alpha$  — корінь многочлена  $f(x)$ . ○

Справедливе і зворотне твердження. Воно є наслідком теореми Безу.

**Теорема 2.** Якщо число  $\alpha$  є коренем многочлена  $f(x)$ , то цей многочлен ділиться на двочлен  $(x - \alpha)$  без остачі.

- За теоремою Безу остача від ділення  $f(x)$  на  $(x - \alpha)$  дорівнює  $f(\alpha)$ . Але за умовою  $\alpha$  — корінь  $f(x)$ , отже,  $f(\alpha) = 0$ . ○

Узагальненням теореми 2 є таке твердження.

**Теорема 3.** Якщо многочлен  $f(x)$  має попарно різні корені  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , то він ділиться без остачі на добуток  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ .

- Для доведення використовуємо метод математичної індукції.

При  $n = 1$  твердження доведено в теоремі 2.

Припустимо, що твердження справедливе при  $n = k$ . Тобто, якщо  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  — попарно різні корені многочлена  $f(x)$ , то він ділиться на добуток  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)$ . Тоді

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k) \cdot Q(x). \quad (1)$$

Доведемо, що твердження теореми справедливе й при  $n = k + 1$ . Нехай  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$  — попарно різні корені многочлена  $f(x)$ . Оскільки  $\alpha_{k+1}$  — корінь  $f(x)$ , то  $f(\alpha_{k+1}) = 0$ . Беручи до уваги рівність (1), яка виконується згідно з припущенням індукції, одержуємо:

$$f(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot Q(\alpha_{k+1}) = 0.$$

За умовою всі корені  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$  різні, тому жодне із чисел  $\alpha_{k+1} - \alpha_1, \alpha_{k+1} - \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1} - \alpha_k$  не дорівнює нулю. Тоді  $Q(\alpha_{k+1}) = 0$ . Отже,  $\alpha_{k+1}$  — корінь многочлена  $Q(x)$ . За теоремою 2 многочлен  $Q(x)$  ділиться на  $(x - \alpha_{k+1})$ , тобто  $Q(x) = (x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x)$  і з рівності (1) маємо

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x).$$

Це означає, що  $f(x)$  ділиться на добуток

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}),$$

тобто теорема доведена й при  $n = k + 1$ .

Отже, теорема справедлива для будь-якого натурального  $n$ . ○

**Наслідок.** Многочлен степеня  $n$  має не більше  $n$  різних коренів.

- Припустимо, що многочлен  $n$ -го степеня має  $(n + 1)$  різних коренів:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ . Тоді  $f(x)$  ділиться на добуток  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{n+1})$  — многочлен степеня  $(n + 1)$ , але це неможливо. Тому многочлен  $n$ -го степеня не може мати більше ніж  $n$  коренів. ○

Нехай тепер многочлен  $n$ -го степеня  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  ( $a_n \neq 0$ ) має  $n$  різних коренів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток  $(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ . Цей добуток є многочленом того самого  $n$ -го степеня. Отже, у результаті ділення можна одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (2) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що  $b = a_n$ , тобто

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \quad (3)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$ , що стоять в тотожності (3) зліва і справа, одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його коренями, які називають **формулами Вієта**:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \alpha_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \alpha_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n}; \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Наприклад, при  $n = 2$  маємо:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad \alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},$$

а при  $n = 3$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= -\frac{a_2}{a_3}; \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 &= \frac{a_1}{a_3}; \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Виконання таких рівностей є необхідною і достатньою умовою того, щоб числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  були коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0).$$

Формули (3) і (4) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена  $f(x)$  різні. Введемо *поняття кратного кореня многочлена*.

**Якщо многочлен  $f(x)$  ділиться без остачі на  $(x - \alpha)^k$ , але не ділиться без остачі на  $(x - \alpha)^{k+1}$ , то кажуть, що число  $\alpha$  є корінь кратності  $k$  многочлена  $f(x)$ .**

Наприклад, якщо добуток  $(x + 2)^3(x - 1)^2(x + 3)$  записати у вигляді многочлена, то для цього многочлена число  $(-2)$  є коренем кратності 3, число 1 є коренем кратності 2, а число  $(-3)$  є коренем кратності 1.

Використовуючи формули Вієта у випадку кратних коренів, необхідно кожен корінь записати таке число разів, яке дорівнює його кратності.

**Приклад 2** Перевірте справедливість формул Вієта для многочлена  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ .

►  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)(x + 2)^2$ . Тому  $f(x)$  має корені:  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -2$  (оскільки  $-2$  — корінь кратності 2).

Перевіримо справедливість формул (5).

У нашому випадку:  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_1 = -4$ ,  $a_0 = -8$ . Тоді

$$2 + (-2) + (-2) = -\frac{2}{1}; \quad 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) = \frac{-4}{1}; \quad 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -\frac{8}{1}.$$

Як бачимо, усі рівності виконуються, тому формули Вієта є справедливими для даного многочлена. ◀

**Приклад 3** Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння  $x^2 - 8x + 4 = 0$ .

► Позначимо корені рівняння  $x^2 - 8x + 4 = 0$  через  $x_1$  і  $x_2$ . Тоді коренями шуканого рівняння повинні бути числа  $\alpha_1 = x_1^2$  і  $\alpha_2 = x_2^2$ . Отже, це рівняння має вигляд  $x^2 + px + q = 0$ ,

$$\text{де } p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -((x_1x_2)^2 - 2x_1x_2), \quad q = \alpha_1\alpha_2 = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2.$$

За формулами Вієта маємо:  $x_1 + x_2 = 8$  і  $x_1x_2 = 4$ . Звідси знаходимо, що

$$q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16, \quad \text{а } p = -((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2) = -(8^2 - 2 \cdot 4) = -56.$$

Таким чином, шукане рівняння має вигляд  $x^2 - 56x + 16 = 0$ . ◀

## Вправи

1. Знайдіть остачу від ділення многочлена  $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$  на  $x + 2$ .
2. Знайдіть коефіцієнт  $a$ , знаючи, що остача від ділення многочлена  $x^3 - ax^2 + 5x - 3$  на  $x - 1$  дорівнює 6.

3. Многочлен  $f(x)$  при діленні на  $x - 1$  має остачу 4, а при діленні на  $x - 3$  — остачу 6. Знайдіть остачу від ділення многочлена  $f(x)$  на  $x^2 - 4x + 3$ .
4. При яких значеннях  $a$  і  $b$  многочлен  $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$  ділиться без остачі на  $x + 2$ , а при діленні на  $x - 1$  має остачу, яка дорівнює 3?
5. Остача від ділення многочлена  $f(x)$  на  $3x^2 - 5x + 2$  дорівнює  $7x + 1$ . Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на двочлени  $x - 1$  і  $3x - 2$ .
6. Запишіть формули Вієта при  $n = 4$ .
7. Складіть кубічний многочлен, який має корені 5,  $-2$ , 1 і коефіцієнт при старшому члені  $-2$ . Розв'яжіть задачу двома способами.
8. При яких значеннях  $a$  сума квадратів коренів тричлена  $x^2 - (a + 2)x + 3a$  дорівнює 12?
9. Яку кратність має корінь 2 для многочлена  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ ?
10. Складіть кубічний многочлен, який має корінь 3 кратності 2 і корінь  $(-1)$ , а коефіцієнт при старшому члені 2.
11. Знайдіть такі  $a$  і  $b$ , щоб число 3 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена  $f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$ .
12. Складіть квадратне рівняння, корені якого протилежні кореням рівняння  $x^2 - 5x + 1 = 0$ .
13. Складіть квадратне рівняння, корені якого обернені до коренів рівняння  $2x^2 - 5x + 1 = 0$ .
14. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння  $x^2 + 6x + 3 = 0$ .

### 7.4. Схема Горнера

Ділити многочлен  $f(x)$  на двочлен  $(x - a)$  іноді зручно за допомогою спеціальної схеми, яку називають *схемою Горнера*.

- Нехай многочлен  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  ( $a_0 \neq 0$ ) потрібно розділити на двочлен  $(x - a)$ . У результаті ділення многочлена  $n$ -го степеня на многочлен першого степеня одержимо деякий многочлен  $Q(x)$   $(n - 1)$ -го степеня (тобто  $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ , де  $b_0 \neq 0$ ) і остачу  $R$ . Тоді  $f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$ , тобто

$$\begin{aligned}
 & a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\
 & = (x - a) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.
 \end{aligned}$$

Оскільки ліва і права частини тотожно рівні, то перемножимо многочлени, які стоять справа, і прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях  $x$ :

$x^n$	$a_0 = b_0$
$x^{n-1}$	$a_1 = b_1 - ab_0$
$x^{n-2}$	$a_2 = b_2 - ab_1$
.....	.....
$x^1$	$a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}$
$x^0$	$a_n = R - ab_{n-1}$

Знайдемо із цих рівностей коефіцієнти  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  і остачу  $R$ :

$$b_0 = a_0, b_1 = ab_0 + a_1, b_2 = ab_1 + a_2, \dots, b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}, R = ab_{n-1} + a_n.$$

Як бачимо, перший коефіцієнт неповної частки дорівнює першому коефіцієнту діленого. Решту коефіцієнтів неповної частки і остачу знаходять таким чином: для того щоб знайти коефіцієнт  $b_{k+1}$  неповної частки, достатньо попередньо знайдений коефіцієнт  $b_k$  помножити на  $a$  і додати  $k$ -й коефіцієнт діленого. Цю процедуру доцільно оформляти у вигляді спеціальної схеми-таблиці, яка називається *схемою Горнера*.

	$a_0 \oplus$	$a_1 \oplus$	$a_2 \oplus$	$\dots$	$a_{n-1} \oplus$	$a_n$
$a \otimes$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1}$	$R$ остача

**Приклад 1** Розділіть за схемою Горнера многочлен  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$  на двочлен  $x - 2$ .

▶ Запишемо спочатку всі коефіцієнти многочлена  $f(x)$  (якщо в многочлені пропущено степінь 2, то відповідний коефіцієнт вважаємо рівним 0), а потім знайдемо коефіцієнти неповної частки і остачу за вказаною схемою:

	3	-2	0	-4	1
2 $\otimes$	3 $\oplus$	4 $\oplus$	8 $\oplus$	12 $\oplus$	25 остача

Отже,  $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$ . ◀

**Приклад 2** Перевірте, чи є  $x = -3$  коренем многочлена

$$f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42.$$

▶ За теоремою Безу остача від ділення многочлена  $f(x)$  на  $x - a$  дорівнює  $f(a)$ , тому знайдемо за допомогою схеми Горнера остачу від ділення  $f(x)$  на  $x - (-3) = x + 3$ .

	2	6	4	-2	-42
-3	2	0	4	-14	0 (остача = $f(-3)$ )

Оскільки  $f(-3) = 0$ , то  $x = -3$  — корінь многочлена  $f(x)$ . ◀

## Вправи

- Використовуючи схему Горнера, знайдіть неповну частку та остачу від ділення многочлена  $A(x)$  на двочлен  $B(x)$ :
  - $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ;  $B(x) = x + 1$ ;
  - $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$ ;  $B(x) = x - 5$ ;
  - $A(x) = x^3 - 15x^2 + 10x + 24$ ;  $B(x) = x + 3$ .

2. Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи ділиться многочлен  $f(x)$  на двочлен  $q(x)$ :
  - 1)  $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$ ;  $q(x) = x + 2$ ;
  - 2)  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$ ;  $q(x) = x - 2$ .
3. Розділіть многочлен  $A(x)$  на двочлен  $B(x)$ :
  - 1)  $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$ ;  $B(x) = x - 7$ ;
  - 2)  $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$ ;  $B(x) = 2x - 1$ .

### 7.5. Знаходження раціональних коренів многочлена з цілими коефіцієнтами

**Теорема 4.** *Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  має раціональний корінь  $x = \frac{p}{q}$  ( $q \neq 0$ ), то  $p$  є дільником вільного члена ( $a_0$ ), а  $q$  — дільником коефіцієнта при старшому члені  $a_n$ .*

- Якщо  $\frac{p}{q}$  є коренем многочлена  $f(x)$ , то  $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ . Підставляємо  $\frac{p}{q}$  замість  $x$  у  $f(x)$  і з останньої рівності маємо

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \quad (1)$$

Помножимо обидві частини рівності (1) на  $q^n$  ( $q \neq 0$ ). Одержуємо

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \quad (2)$$

У рівності (2) всі доданки, окрім останнього, діляться на  $p$ . Тому  $a_0 q^n = -(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1})$  ділиться на  $p$ .

Але коли ми записуємо раціональне число у вигляді  $\frac{p}{q}$ , то цей дріб

вважається нескоротним, тобто  $p$  і  $q$  не мають спільних дільників. Добуток  $a_0 q^n$  може ділитися на  $p$  (коли  $p$  і  $q$  — взаємно прості числа) тільки тоді, коли  $a_0$  ділиться на  $p$ . Тобто  $p$  — дільник вільного члена  $a_0$ .

Аналогічно всі доданки рівності (2), крім першого, діляться на  $q$ . Тоді  $a_n p^n = -(a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)$  ділиться на  $q$ . Оскільки  $p$  і  $q$  взаємно прості числа, то  $a_n$  ділиться на  $q$ , тобто  $q$  — дільник коефіцієнта при старшому члені. ○

Відзначимо два наслідки із цієї теореми. Якщо взяти  $q = 1$ , то коренем многочлена буде ціле число  $p$  — дільник  $a_0$ . Отже, має місце такий наслідок.

**Наслідок 1.** *Будь-який цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена.*

Якщо в заданому многочлені  $f(x)$   $a_n = 1$ , то дільниками  $a_n$  можуть бути тільки числа  $\pm 1$ , тобто в цьому випадку  $q = \pm 1$ , і має місце:

**Наслідок 2.** *Якщо коефіцієнт при старшому члені рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього рівняння (якщо вони існують) — цілі числа.*

**Приклад 1** Знайдіть раціональні корені многочлена  $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ .

▶ Нехай нескоротний дріб  $\frac{p}{q}$  є коренем многочлена. Тоді  $p$  необхідно шукати серед дільників вільного члена, тобто серед чисел  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ , а  $q$  — серед дільників старшого коефіцієнта:  $\pm 1, \pm 2$ . Таким чином, раціональні корені многочлена потрібно шукати серед чисел  $\pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Перевіряти, чи є дане число коренем многочлена, доцільно за допомогою схеми Горнера. При  $x = \frac{1}{2}$  маємо таблицю.

	2	-1	12	-6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

Крім того, за схемою Горнера можна записати, що

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 12).$$

Многочлен  $2x^2 + 12$  не має дійсних коренів (а тим більше раціональних), тому заданий многочлен має єдиний раціональний корінь  $x = \frac{1}{2}$ . ◀

**Приклад 2** Розкладіть многочлен  $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$  на множники.

▶ Шукаємо цілі корені многочлена серед дільників вільного члена:  $\pm 1, \pm 2$ . Підходить 1. Ділимо  $P(x)$  на  $x - 1$  за допомогою схеми Горнера.

	2	3	-2	-1	-2
1	2	5	3	2	0

Тоді  $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$ .

Шукаємо цілі корені кубічного многочлена  $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$  серед

дільників його вільного члена:  $\pm 1, \pm 2$ . Підходить  $(-2)$ . Ділимо на  $x + 2$ .

	2	5	3	2
-2	2	1	1	0

Маємо  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$ .

Квадратний тричлен  $2x^2 + x + 1$  не має дійсних коренів і на лінійні множники не розкладається.

**Відповідь:**  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$ . ◀

Зазначимо, що в множині дійсних чисел не завжди можна знайти всі корені многочлена (наприклад, уже квадратний тричлен  $x^2 + x + 1$  не має дійсних коренів). Таким чином, многочлен  $n$ -го степеня не завжди можна розкласти в добуток лінійних множників. Але многочлен непарного степеня завжди можна розкласти в добуток лінійних і квадратних множників, а многочлен парного степеня — у добуток квадратних тричленів.

Наприклад, многочлен четвертого степеня розкладається в добуток двох квадратних тричленів. Для того щоб знайти коефіцієнти цього розкладу, іноді можна використовувати *метод невизначених коефіцієнтів*.

**Приклад 3** Розкладіть на множники многочлен  $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6$ .

▶ Знайти раціональні корені не вдається — многочлен не має раціональних (цілих) коренів.

Спробуємо знайти розклад цього многочлена в добуток двох квадратних тричленів. Оскільки старший коефіцієнт многочлена дорівнює 1, то й у квадратних тричленах візьмемо старші коефіцієнти рівними 1. Тобто шукатимемо розклад нашого многочлена у вигляді:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \quad (3)$$

де  $a, b, c$  і  $d$  — якісь невизначені (поки що) коефіцієнти.

Многочлени, що стоять у лівій і правій частинах цієї рівності, тожто рівні, тому коефіцієнти при однакових степенях  $x$  у них однакові. Розкриємо дужки в правій частині рівності і прирівняємо відповідні коефіцієнти. Це зручно записати так:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd.$$

Одержуємо систему:

$$\left. \begin{array}{l} x^4 \quad 1 = 1, \\ x^3 \quad 1 = a + c, \\ x^2 \quad 3 = ac + b + d, \\ x^1 \quad 1 = bc + ad, \\ x^0 \quad 6 = bd. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Спроба розв'язати цю систему методом підстановки приводить до рівняння 4-го степеня, тому спробуємо розв'язати систему (4) у цілих числах. З останньої рівності системи (4) одержуємо, що  $b$  і  $d$  можуть бути тільки дільниками числа 6. Усі можливі варіанти запишемо в таблицю.

$b$	1	-1	2	-2
$d$	6	-6	3	-3

Коефіцієнти  $b$  і  $d$  у рівності (3) рівноправні, тому ми не розглядаємо випадки  $b = 6$  і  $d = 1$  або  $b = -6$  і  $d = -1$  і т. д.

Для кожної пари значень  $b$  і  $d$  з третьої рівності системи (4) знайдемо  $ac$ :  $ac = 3 - (b + d)$ , а з другої рівності  $a + c = 1$ .



Знаючи  $a + c$  і  $ac$ , за теоремою, оберненою до теореми Вієта, знаходимо  $a$  і  $c$  як корені квадратного рівняння. Коли буде знайдено всі числа  $a, b, c, d$ , то із четвертої рівності  $bc + ad = 1$  системи (4) можна вибрати ті числа, які є розв'язками системи (4). Зручно ці міркування оформити у вигляді таблиці:

$b$	1	-1	2	-2	
$d$	6	-6	3	-3	
$a + c = 1$	1	1	1	1	
$ac = 3 - (b + d)$	-4	10	-2	8	
$a$	неціле	не існує	2	-1	не існує
$c$	неціле	не існує	-1	2	не існує
$bc + ad = 1$	—	—	$bc + ad = 4$ $4 \neq 1$	$bc + ad = 1$ $1 = 1$	—

Як бачимо, системі (4) задовольняє набір цілих чисел  $a = -1, b = 2, c = 2, d = 3$ . Тоді рівність (3) має вигляд

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \quad (5)$$

Оскільки квадратні тричлени  $x^2 - x + 2$  і  $x^2 + 2x + 3$  не мають не тільки раціональних, але й дійсних коренів, то рівність (5) дає остаточно відповідь. ◀

## Вправи

- Знайдіть цілі корені многочлена:
  - $x^3 - 5x + 4$ ;
  - $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ ;
  - $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$ ;
  - $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$ .
- Знайдіть раціональні корені рівняння:
  - $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ ;
  - $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$ ;
  - $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ ;
  - $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$ .
- Розкладіть многочлен на множники:
  - $2x^3 - x^2 - 5x - 2$ ;
  - $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$ ;
  - $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$ ;
  - $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$ .
- Знайдіть дійсні корені рівняння:
  - $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$ ;
  - $x^3 - 7x - 6 = 0$ ;
  - $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ ;
  - $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ .
- \* Розкладіть многочлен на множники методом невизначених коефіцієнтів:
  - $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$ ;
  - $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$ .
- \* Розкладіть многочлен на множники, заздалегідь записавши його за допомогою методу невизначених коефіцієнтів у вигляді  $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$ :
  - $x^4 + 4x - 1$ ;
  - $x^4 - 4x^3 - 1$ ;
  - $x^4 + 4a^3x - a^4$ .

§ 8

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАК МОДУЛЯ

Таблиця 15

<div style="border: 1px solid black; border-radius: 15px; padding: 5px; display: inline-block;">                 1. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля             </div>		
<p style="text-align: center;"><b>за означенням</b></p> $ a  = \begin{cases} a, & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при } a = 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$	<p style="text-align: center;"><b>за геометричним змістом</b></p> <p><math> a </math> — відстань на числовій прямій від точки 0 до точки <math>a</math>.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math> f(x)  = a</math>.</li> <li>2. <math> f(x)  =  g(x) </math>.</li> <li>3. <math> f(x)  &gt; a</math>.</li> <li>4. <math> f(x)  &lt; a</math>.</li> </ol>	<p style="text-align: center;"><b>за загальною схемою</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Знайти ОДЗ.</li> <li>2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій.</li> <li>3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.</li> <li>4. Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).</li> </ol>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">                 з використанням спеціальних співвідношень             </div>		
2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$ )		
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math> f(x)  = a \Leftrightarrow f(x) = a</math> або <math>f(x) = -a</math>.</li> <li>2. <math> f(x)  =  g(x)  \Leftrightarrow f(x) = g(x)</math> або <math>f(x) = -g(x)</math>.</li> <li>3. <math> f(x)  &gt; a \Leftrightarrow f(x) &lt; -a</math> або <math>f(x) &gt; a</math>.</li> <li>4. <math> f(x)  &lt; a \Leftrightarrow -a &lt; f(x) &lt; a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) &gt; -a, \\ f(x) &lt; a. \end{cases}</math></li> </ol> <p style="text-align: center;">Узагальнення</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math> f(x)  = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x). \end{cases}</math></li> <li>6. <math> f(x)  &gt; g(x) \Leftrightarrow f(x) &lt; -g(x)</math> або <math>f(x) &gt; g(x)</math>.</li> <li>7. <math> f(x)  &lt; g(x) \Leftrightarrow -g(x) &lt; f(x) &lt; g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) &gt; -g(x), \\ f(x) &lt; g(x). \end{cases}</math></li> </ol>		

## Продовження табл. 15

## 3. Використання спеціальних співвідношень

1.  $|u| = u \Leftrightarrow u \geq 0.$

2.  $|u| = -u \Leftrightarrow u \leq 0.$

3.  $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2.$

4.  $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2.$  Тоді  $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0;$

знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.

5.  $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$

6.  $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0, \\ v \leq 0. \end{cases}$

7.  $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geq 0.$

8.  $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leq 0.$

9.  $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leq x \leq b,$  де  $a < b.$

## Приклади й обґрунтування

Розв'язувати будь-яке рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можна одним з трьох основних способів: за означенням модуля, виходячи з геометричного змісту модуля або за загальною схемою. Деякі рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можуть бути розв'язані також з використанням спеціальних співвідношень (табл. 15).

Залежно від обраного способу одержуємо різні записи розв'язання.

**Приклад** Розв'яжіть рівняння  $|2x - 4| = 6.$

І спосіб (за означенням модуля)

## Розв'язання

1) Якщо  $2x - 4 \geq 0,$  (1)

то одержуємо рівняння

$$2x - 4 = 6.$$

Тоді  $x = 5,$  що задовольняє умові (1).

2) Якщо  $2x - 4 < 0,$  (2)

то одержуємо рівняння

$$-(2x - 4) = 6.$$

Тоді  $x = -1,$  що задовольняє та кож умові (2).

Відповідь: 5; -1. ◀

## Коментар

Ураховуючи означення модуля, розглянемо два випадки:

$$2x - 4 \geq 0 \text{ і } 2x - 4 < 0.$$

За означенням *модулем додатного (невід'ємного) числа є саме це число, а модулем від'ємного числа є протилежне йому число.* Тому при  $2x - 4 \geq 0 \quad |2x - 4| = 2x - 4,$  а при  $2x - 4 < 0 \quad |2x - 4| = -(2x - 4).$

У кожному випадку розв'язуємо одержане рівняння і з'ясуємо, чи задовольняє кожен із знайдених коренів умові, за якої ми його знаходили.

## II спосіб (використовуючи геометричний зміст модуля)

## Розв'язання

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & 2x - 4 = 6 \quad \text{або} \quad 2x - 4 = -6, \\ & 2x = 10 \quad \text{або} \quad 2x = -2, \\ & x = 5 \quad \text{або} \quad x = -1. \end{aligned}$$

Відповідь: 5; -1.  $\triangleleft$

## Коментар

З геометричної точки зору  $|2x - 4|$  — це відстань від точки 0 до точки  $2x - 4$ . За умовою рівняння вона дорівнює 6, але відстань 6 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 6), так і ліворуч (одержуємо число -6). Отже, рівність  $|2x - 4| = 6$  можлива тоді і тільки тоді, коли  $2x - 4 = 6$  або  $2x - 4 = -6$ .

Зауваження. При застосуванні геометричного змісту модуля знак модуля розкривається неявно, тобто не доводиться використовувати означення в явному вигляді.

Загальна схема розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля, — це фактично трохи змінений метод інтервалів. Пояснимо зміст цієї схеми на прикладі рівняння, що містить два модулі, виду

$$|f(x)| + |g(x)| = a \quad (a > 0).$$

- Щоб розв'язати це рівняння, необхідно розкрити знаки модулів, а для цього потрібно знати, де функції  $f(x)$  і  $g(x)$  будуть додатними, а де — від'ємними. Тобто фактично ми повинні розв'язати нерівності

$$f(x) \geq 0, \quad (1)$$

$$g(x) \geq 0. \quad (2)$$

Кожну із цих нерівностей ми вміємо розв'язувати методом інтервалів. Перебудуємо прийом розв'язування нерівностей методом інтервалів таким чином, щоб він давав можливість одночасно розв'язувати кожную з останніх нерівностей. Як відомо, розв'язування нерівності (1) методом інтервалів починається із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції  $f(x)$ ), а розв'язування нерівності (2) — із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції  $g(x)$ ). Щоб почати одночасно розв'язувати обидві нерівності, необхідно знайти спільну область визначення для функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , тобто **знайти ОДЗ заданого рівняння** (це *перший з орієнтирів* потрібної схеми). Щоб продовжити розв'язування нерівностей  $f(x) \geq 0$  та  $g(x) \geq 0$  методом інтервалів, необхідно знайти нулі функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ , тобто **знайти нулі всіх підмодульних функцій** (це *другий орієнтир*).

Якщо далі використовувати схему методу інтервалів одночасно для двох нерівностей, то необхідно **на ОДЗ позначити нулі підмодульних функцій і розбити ОДЗ на проміжки** (це *третій орієнтир*).

У кожному з одержаних проміжків знаки функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  не змінюються. Отже, ми можемо **знайти знаки підмодульних функцій на кожному проміжку** (у будь-якій точці цього проміжку), **розкрити знаки модулів і знайти розв'язок заданого рівняння в кожному з цих проміжків** (це *четвертий орієнтир* загальної схеми). ◀

Можливість застосування наведеної схеми до розв'язування нерівностей, що містять знак модуля, обґрунтовують аналогічно.

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $\left| \frac{x}{x-1} \right| + |x-2| = 2$ .

► 1. ОДЗ:  $x \neq 1$ .

2. Нулі підмодульних функцій:  $\frac{x}{x-1} = 0$

( $x = 0$ ) та  $x - 2 = 0$  ( $x = 2$ ).

3. Нулі 0 і 2 розбивають ОДЗ на чотири проміжки, у яких підмодульні функції мають знаки<sup>1</sup>, показані на рисунку 67.

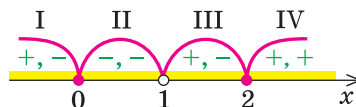


Рис. 67

4. Знаходимо розв'язки заданого рівняння в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій однакові на проміжках I і III, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

Проміжки I і III:  $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ . Ураховуючи знаки підмодульних функцій на цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що в цих

проміжках задане рівняння рівносильне рівнянню  $\frac{x}{x-1} - (x-2) = 2$ .

Звідси  $x = 0$  або  $x = 2$ . До розглянутих проміжків одержані значення не входять, отже, у цих проміжках коренів немає.

Проміжок II:  $x \in [0; 1)$ . (Слід звернути увагу на те, щоб не пропустити значення  $x = 0$ , яке входить до ОДЗ.) У цьому проміжку одержуємо рівняння  $-\frac{x}{x-1} - (x-2) = 2$ .

Звідси  $x = 0$  — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

Проміжок IV:  $x \in [2; +\infty)$  (і в цьому проміжку потрібно не забути значення  $x = 2$ ). Одержуємо рівняння  $\frac{x}{x-1} + x - 2 = 2$ . Звідси  $x = 2$  — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв'язок заданого рівняння на всій ОДЗ.

**Відповідь:** 0; 2. ◀

<sup>1</sup> На рисунку 67 у кожному з проміжків перший знак — це знак функції  $\frac{x}{x-1}$ , а другий — знак функції  $x - 2$ . Виконуючи рисунок, зручно спочатку позначити на числовій прямій ОДЗ, а потім на ОДЗ — нулі підмодульних функцій.

Проілюструємо також одержання і використання спеціальних співвідношень, наведених у таблиці 15.

Обґрунтуємо, наприклад, співвідношення 5:  $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$

- Запишемо задану рівність у вигляді  $u + v = |u| + |v|$  і проаналізуємо її, спираючись на відомі із 6 класу правила дій над числами з однаковими і з різними знаками. Щоб додати два числа  $u$  і  $v$ , ми додали їх модулі, отже, ці числа мають однакові знаки. Якби обидва ці числа були від'ємними, то їх сума була б теж від'ємною, але  $u + v = |u| + |v| \geq 0$ . Тоді одержуємо, що числа  $u$  і  $v$  — обидва невід'ємні. Навпаки, якщо  $\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \end{cases}$  то виконується рівність  $u + v = |u| + |v|$ . Отже, рівняння  $|u| + |v| = u + v$  рівносильне системі нерівностей  $\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$  ○

**Приклад 2\*** Розв'яжіть рівняння  $|x - 5| + |2x + 5| = 3x$ .

#### Розв'язання

▶ Оскільки  $3x = (x - 5) + (2x + 5)$ , то задане рівняння має вигляд  $|u| + |v| = u + v$ , але ця рівність може виконуватися тоді і тільки тоді, коли числа  $u$  і  $v$  — обидва невід'ємні. Отже, задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0, \\ 2x + 5 \geq 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x \geq -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Отже,  $x \geq 5$ .

Відповідь:  $[5; +\infty)$ . ◀

#### Коментар

Якщо позначити  $x - 5 = u$  і  $2x + 5 = v$ , то  $u + v = 3x$  і задане рівняння має вигляд  $|u| + |v| = u + v$ , а за співвідношенням 5 таке рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що задане рівняння можна розв'язувати і за загальною схемою, але тоді розв'язання буде більш громіздким.

При розв'язуванні *нерівностей*, що містять знак модуля, міркування щодо розкриття знаків модулів повністю аналогічні міркуванням, які використовувалися при розв'язуванні рівнянь, що містять знак модуля.

**Приклад 3** Розв'яжіть нерівність  $|2x - 5| \leq 7$ .

#### Розв'язання

▶ За геометричним змістом модуля задана нерівність рівносильна нерівності

$$-7 \leq 2x - 5 \leq 7. \quad (1)$$

#### Коментар

Нерівність виду  $|f(x)| \leq a$  (де  $a > 0$ ) зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Зокрема, задана нерівність —

Тоді  $-2 \leq 2x \leq 12$ , отже,  
 $-1 \leq x \leq 6$ .

Відповідь:  $[-1; 6]$ . ◀

це нерівність виду  $|t| \leq 7$ . Але модуль числа — це відстань на координатній прямій від точки, що зображує дане число, до точки 0. Тобто заданій нерівності задовольняють усі точки, які розташовані в проміжку  $[-7; 7]$ , отже,  $-7 \leq t \leq 7$ . Якщо виникають ускладнення з розв'язуванням подвійної нерівності (1), то її замінюють на рівносильну систему  $\begin{cases} 2x-5 \geq -7, \\ 2x-5 \leq 7. \end{cases}$

#### Приклад 4 Розв'яжіть нерівність

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geq 1. \quad (1)$$

- ▶ 1. ОДЗ:  $|x-2|-1 \neq 0$ . Тоді  $|x-2| \neq 1$ , тобто  $x-2 \neq \pm 1$ , отже:  $x \neq 3$  або  $x \neq 1$ .
2. Нулі підмодульних функцій:  $x-3=0$  ( $x=3$  — не входить до ОДЗ) та  $x-2=0$  ( $x=2$ ).
3. Нуль 2 розбиває ОДЗ на чотири проміжки, на яких підмодульні функції мають знаки, показані на рисунку 68 (на кожному з проміжків перший знак — це знак функції  $x-3$ , а другий — знак функції  $x-2$ ).
4. Знаходимо розв'язки заданої нерівності в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій є однаковими на проміжках I і II, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

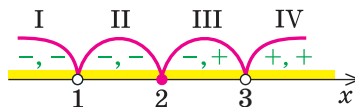


Рис. 68

Проміжки I і II:  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ . Ураховуючи знаки підмодульних функцій у цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що при  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$  задана нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geq 1. \text{ Тоді } \frac{3-x}{1-x} \geq 1, \text{ тобто } \frac{2}{1-x} \geq 0. \text{ Звідси } x < 1. \text{ До проміжків, які ми розглянули, входять усі значення } x < 1, \text{ отже, у цьому випадку розв'язком буде } x < 1.$$

Проміжок III:  $x \in [2; 3)$ . На цьому проміжку одержуємо нерівність

$$\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geq 1, \text{ тобто } \frac{-(x-3)}{x-3} \geq 1. \text{ Але при будь-якому значенні } x \text{ із проміжку III остання нерівність перетворюється на хибну нерівність } (-1 \geq 1). \text{ Отже, у проміжку III нерівність (1) розв'язків не має.}$$

Проміжок IV:  $x \in (3; +\infty)$ . У цьому проміжку одержуємо нерівність  $\frac{x-3}{x-2-1} \geq 1$ , тобто  $\frac{x-3}{x-3} \geq 1$ . Як бачимо, при будь-якому  $x$  із проміжку IV нерівність (1) перетворюється на правильну числову нерівність ( $1 \geq 1$ ). Отже, розв'язком нерівності (1) у проміжку IV є будь-яке число із цього проміжку ( $x > 3$ ).

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв'язок заданої нерівності на всій ОДЗ:  $x < 1$  або  $x > 3$ .

*Відповідь:*  $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ .  $\triangleleft$

Зазначимо, що для розв'язування деяких нерівностей, що містять знак модуля, зручно використовувати також спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 15.

**Приклад 5\*** Розв'яжіть нерівність  $\frac{(|x-1| - |x+3|)(|2x| - |x+6|)}{|1-x| - |x+2|} < 0$ .

► Оскільки  $|a| \geq 0$  і функція  $y = t^2$  монотонно зростає на множині невід'ємних чисел, то всі різниці модулів у нерівності можна замінити на різниці їх квадратів (тобто скористатися співвідношенням 4:  $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$ ). Тоді одержуємо нерівність, рівносильну заданій:

$$\frac{((x-1)^2 - (x+3)^2)((2x)^2 - (x+6)^2)}{(1-x)^2 - (x+2)^2} < 0.$$

Тепер, розкладаючи на множники всі різниці квадратів, маємо:

$$\frac{(-4)(2x+2)(x-6)(3x+6)}{(-1-2x)3} < 0.$$

Далі методом інтервалів одержуємо  $-2 < x < -1$  або  $-\frac{1}{2} < x < 6$  (рис. 69).

*Відповідь:*  $-2 < x < -1$  або  $-\frac{1}{2} < x < 6$ .  $\triangleleft$

Загальна схема, запропонована в таблиці 15, може бути використана не тільки при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей, що містять знак модуля, але й при виконанні перетворень виразів, що містять знак модуля.

Наприклад, для побудови графіка функції  $f(x) = |x+1| + |x-1|$  зручно спочатку за загальною схемою розкрити знаки модулів, а вже потім будувати графік функції  $f(x)$ .

Оформлення розв'язання подібного прикладу може бути таким.

**Приклад 6** Побудуйте графік функції  $f(x) = |x+1| + |x-1|$ .

- 1. Область визначення функції: всі  $x \in \mathbf{R}$ .
- 2. Нулі підмодульних функцій:  $x = -1$  і  $x = 1$ .
- 3. Позначаємо нулі на області визначення і розбиваємо область визначення на проміжки (на рисунку 70 також указано знаки підмодульних функцій у кожному з проміжків).



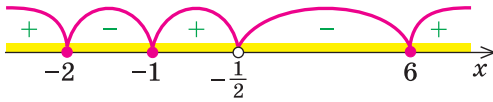


Рис. 69

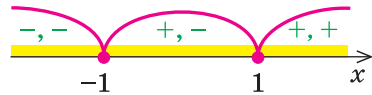


Рис. 70

4. Тоді

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1) - (x-1), & \text{якщо } x \leq -1, \\ x+1 - (x-1), & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ x+1 + x-1, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x \leq -1, \\ 2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

Будуємо графік цієї функції (рис. 71).

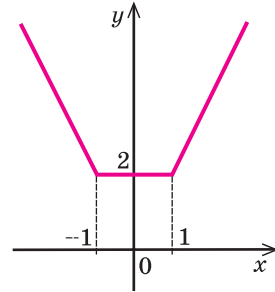


Рис. 71

### Запитання для контролю

1. Поясніть, якими способами можна розв'язувати рівняння та нерівності, що містять знак модуля. Проілюструйте ці способи на прикладах.
2. Обґрунтуйте спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 15. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля.
3. Обґрунтуйте узагальнення використання геометричного змісту модуля, наведені в таблиці 15. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять знак модуля.

### Вправи

Розв'яжіть рівняння і нерівності, що містять знак модуля (1–15).

- 1)  $|3x - 5| = 7$ ;    2)  $|8 - 4x| = 6$ ;    3)  $|x^2 - 5x| = 6$ .
- 1)  $|2x - 3| > 5$ ;    2)  $|3 - 5x| < 7$ ;    3\*)  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| > 2$ ;    4)  $\left| \frac{2x-3}{x-5} \right| < 1$ .
- 1)  $|x - 2| - 2x - 1 = 0$ ;    2)  $x^2 + 3x + |x + 3| = 0$ .
- 1)  $|x - 1| + |x - 3| = 2$ ;    2)  $|x + 1| + |x - 5| = 20$ ;  
3)  $|x + 5| + |x - 8| = 13$ .
- 1)  $|x + 3| < x - 2$ ;    2)  $|x + 1| + |x - 2| \leq 2x - 1$ ;  
3)  $|x + 3| + |x - 1| < |6 - 3x|$ .
- 1)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + |x - 2| = 1$ ;    2)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x| = x + 5$ .
- 1)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2} = 8$ ;    2)  $\sqrt{16 - 8x + x^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 5$ .

8. 1)  $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$ ;                      2)  $\frac{4}{|x+1|-2} = |x+1|$ .
9. 1)  $||x - 1| - 2| = 1$ ;                      2)  $||2x - 4| - 5| = 3$ .
10. 1)  $|x^2 - 4x| < 5$ ;                      2)  $|x^2 - x - 6| > 4$ .
11. 1)  $3|x - 1| + x^2 - 7 > 0$ ;                      2)  $|x - 6| \geq x^2 - 5x + 9$ .
12. 1)  $\frac{|x+3|+x}{x+2} > 1$ ;                      2)  $\frac{1}{|x|-3} < \frac{1}{2}$ .
13. 1)  $||x - 1| - 5| \leq 2$ ;                      2)  $|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| > 4$ .
14. 1)  $|x - 2x^2| > 2x^2 - x$ ;                      2)  $|x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20$ .
15. 1)  $\frac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|$ ;                      2)  $\frac{4}{|x+1|-2} \geq |x-1|$ .
16. Побудуйте графік функції:
- 1)  $y = |2x - 4| + |2x + 6|$ ;                      2)  $y = |x - 5| + |3x + 6|$ .

## § 9 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ

### 9.1. Розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами

Якщо крім змінної та числових коефіцієнтів до запису рівняння чи нерівності входять також буквені коефіцієнти — параметри, то при розв'язуванні можна користуватися таким орієнтиром.

*Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якийсь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.*

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході розв'язування часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання та чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записях громіздких розв'язань) не загубити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки. Зауважимо, що відповідь треба записати для всіх можливих значень параметра.

**Приклад 1** Розв'яжіть нерівність зі змінною  $x$ :  $3ax + 2 \geq x + 5a$ .

*Коментар*

Задана нерівність є лінійною відносно змінної  $x$ , тому використаємо відомий алгоритм розв'язування лінійної нерівності:

1) переносимо члени зі змінною  $x$  в одну частину, а без  $x$  — у другу:

$$3ax - x \geq 5a - 2;$$

2) виносимо в лівій частині за дужки спільний множник  $x$  (тобто приводимо нерівність до вигляду  $Ax \geq B$ ):  $(3a - 1)x \geq 5a - 2$ .

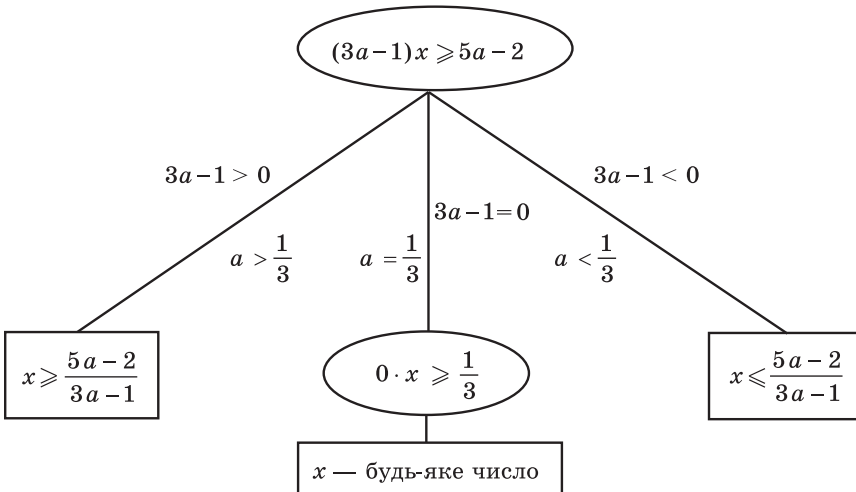
Для знаходження розв'язків останньої нерівності ми б хотіли поділити обидві її частини на  $(3a - 1)$ . Але якщо обидві частини нерівності поділити на додатне число, то знак нерівності не зміниться, а якщо на від'ємне, то знак нерівності необхідно змінити на протилежний. Крім того, слід урахувати, що на нуль ділити не можна. Отже, починаючи з цього моменту потрібно розглянути три випадки:  $3a - 1 > 0$ ,  $3a - 1 < 0$ ,  $3a - 1 = 0$ .

Наведені вище міркування можна наочно записати так:

$$3ax + 2 \geq x + 5a$$

*Розв'язання*

$$\blacktriangleright 3ax - x \geq 5a - 2$$



*Відповідь:* 1) якщо  $a > \frac{1}{3}$ , то  $x \geq \frac{5a-2}{3a-1}$ ; 2) якщо  $a < \frac{1}{3}$ , то  $x \leq \frac{5a-2}{3a-1}$ ;

3) якщо  $a = \frac{1}{3}$ , то  $x$  — будь-яке число.  $\triangleleft$

При розв'язуванні більш складних рівнянь чи нерівностей слід пам'ятати, що рівняння та нерівності з параметрами найчастіше роз-

в'язують за допомогою рівносильних перетворень, а всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на області допустимих значень (ОДЗ) заданого рівняння чи нерівності (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння чи нерівності). Тому, перш ніж записати відповідь, *потрібно обов'язково врахувати ОДЗ заданого рівняння чи нерівності*.

**Приклад 2** Розв'яжіть рівняння  $\frac{x}{x-3} = 1 + \frac{a}{x}$ , де  $x$  — змінна.

*Коментар*

Здані дробові вирази існують тоді і тільки тоді, коли знаменники заданих дробів не дорівнюють нулю, отже, ОДЗ рівняння:  $x \neq 3$ ,  $x \neq 0$ .

Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз  $x(x-3)$  — спільний знаменник дробів — і одержимо ціле рівняння, яке за умови  $x(x-3) \neq 0$  (тобто на ОДЗ заданого рівняння) рівносильне заданому:  $x^2 = x(x-3) + a(x-3)$ . З цього рівняння одержуємо  $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$ , тобто  $ax - 3x = 3a$ . Тоді  $(a-3)x = 3a$ .

Для того щоб знайти значення змінної  $x$ , хотілося б поділити обидві частини останнього рівняння на  $(a-3)$ , але при  $a=3$  довелося б ділити на 0, що неможливо. Отже, починаючи з цього моменту, потрібно розглянути два випадки.

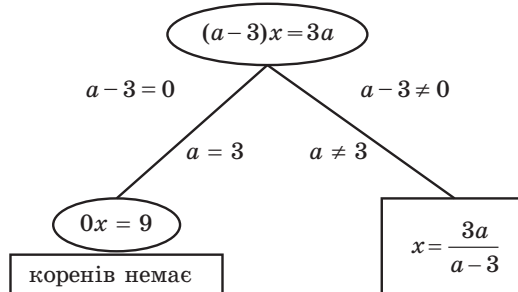
Розв'язання відповідно до наведених вище міркувань можна наочно записати у вигляді схеми.

$$\frac{x}{x-3} = 1 + \frac{a}{x}$$

*Розв'язання*

► ОДЗ:  $x \neq 3$ ,  $x \neq 0$ .

$$x^2 = x(x-3) + a(x-3), \quad x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a, \quad ax - 3x = 3a,$$



З'ясуємо, при яких значеннях  $a$  знайдені корені не входять до ОДЗ рівняння, тобто при яких значеннях  $a$  одержуємо  $x=3$  та  $x=0$ .

$$\frac{3a}{a-3} = 3, \quad \text{тоді } 3a = 3(a-3), \quad 3a = 3a - 9 \text{ — розв'язків немає. Отже,}$$

при всіх значеннях  $a$  корінь  $\frac{3a}{a-3}$  не дорівнює 3.

$\frac{3a}{a-3} = 0$ , тоді  $a = 0$ . Отже, при  $a = 0$  маємо  $x = 0$  — сторонній корінь (не входить до ОДЗ), тобто при  $a = 0$  задане рівняння не має коренів.

*Відповідь:* 1) при  $a = 3$  і  $a = 0$  коренів немає;

2) при  $a \neq 3$ ,  $a \neq 0$   $x = \frac{3a}{a-3}$ . ◁

**Приклад 3** Розв'яжіть рівняння  $\frac{ax-1}{x-a} = \frac{4}{x}$  відносно змінної  $x$ .

*Коментар*

Будемо виконувати рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ (знаменники дробів не дорівнюють нулю). Якщо далі обидві частини рівняння помножити на добуток виразів, що стоять у знаменниках дробів (і який не дорівнює нулю на ОДЗ рівняння), то одержимо рівняння  $ax^2 - 5x + 4a = 0$ , рівносильне заданому (на ОДЗ заданого). Але останнє рівняння буде квадратним тільки при  $a \neq 0$ , тому для його розв'язування слід розглянути два випадки ( $a = 0$  і  $a \neq 0$ ).

Якщо  $a \neq 0$ , то для дослідження одержаного квадратного рівняння потрібно розглянути ще три випадки:  $D = 0$ ,  $D < 0$ ,  $D > 0$  і в кожному з них перевірити, чи входять знайдені корені до ОДЗ, чи ні. При  $D = 0$  зручно використати, що значення кореня відповідного квадратного рівняння збігається з абсцисою вершини параболи  $y = ax^2 - 5x + 4a$ , тобто  $x = x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2a}$ . Розглядаючи випадок  $D > 0$ , слід пам'ятати також про попереднє обмеження:  $a \neq 0$ .

Оскільки корені рівняння (1) записуються достатньо громіздкими формулами (див. розв'язання), то замість підстановки одержаних коренів в обмеження ОДЗ підставимо «заборонені» значення  $x$  у рівняння (1) і з'ясуємо, при яких значеннях параметра  $a$  ми отримаємо значення  $x$ , які не входять до ОДЗ, а потім перевіримо отримані значення параметра.

*Розв'язання*

► ОДЗ:  $x \neq 0$ ,  $x \neq a$ . На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:  $ax^2 - x = 4x - 4a$ ,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \quad (1)$$

1. Якщо  $a = 0$ , то з рівняння (1) одержуємо  $x = 0$  — не входить до ОДЗ, отже, при  $a = 0$  коренів немає.
2. Якщо  $a \neq 0$ , то рівняння (1) — квадратне. Його дискримінант  $D = 25 - 16a^2$ . Розглянемо три випадки:

1)  $D = 0$ , тобто  $25 - 16a^2 = 0$ ,  $a = \pm \frac{5}{4}$ . Тоді рівняння (1) має одне значення кореня  $x = \frac{5}{2a}$ .

Якщо  $a = \frac{5}{4}$ , то корінь  $x = 2$  рівняння (1) входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

Якщо  $a = -\frac{5}{4}$ , то корінь  $x = -2$  рівняння (1) теж входить до ОДЗ і є коренем заданого рівняння.

2)  $D < 0$ , тобто  $25 - 16a^2 < 0$ , отже,  $a < -\frac{5}{4}$  або  $a > \frac{5}{4}$ . Тоді рівняння (1) не має коренів.

3)  $D > 0$ , тобто  $25 - 16a^2 > 0$ , отже,  $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$ , але  $a \neq 0$ . Тоді рівняння (1) має два корені

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a^2}}{2a}. \quad (2)$$

З'ясуємо, при яких значеннях  $a$  знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто при яких значеннях  $a$  одержуємо  $x = 0$  і  $x = a$ .

Підставляючи в рівняння (1)  $x = 0$ , одержуємо  $a = 0$ , але при  $a = 0$  задане рівняння не має коренів.

Підставляючи в рівняння (1)  $x = a$ , одержуємо  $a^3 - 5a + 4a = 0$ , тобто  $a^3 - a = 0$ ,  $a(a^2 - 1) = 0$ . Тоді  $a = 0$  (задане рівняння не має коренів), або  $a = \pm 1$ . Перевіримо ці значення  $a$ .

При  $a = 1$  ОДЗ записується так:  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ . Із формули коренів (2) маємо  $x_1 = 4$  (входить до ОДЗ) і  $x_2 = 1$  (не входить до ОДЗ). Отже, при  $a = 1$  задане рівняння має тільки один корінь  $x = 4$ .

При  $a = -1$  ОДЗ записується так:  $x \neq 0$ ,  $x \neq -1$ , а із формули коренів (2) отримаємо:  $x_1 = -4$  (входить до ОДЗ) і  $x_2 = -1$  (не входить до ОДЗ). Отже, при  $a = -1$  задане рівняння має тільки один корінь  $x = -4$ .

Таким чином, формулу коренів (2) можна використовувати, якщо  $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$ , тільки при  $a \neq 0$  і  $a \neq \pm 1$ .

Відповідь: 1) якщо  $a = \frac{5}{4}$ , то  $x = 2$ ;

2) якщо  $a = -\frac{5}{4}$ , то  $x = -2$ ;

3) якщо  $a = 1$ , то  $x = 4$ ;

4) якщо  $a = -1$ , то  $x = -4$ ;

5) якщо  $a \in \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$ , то  $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16a^2}}{2a}$ ;

6) якщо  $a \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$  або  $a = 0$ , то коренів немає.  $\triangleleft$

Зауваження. Щоб полегшити запис відповіді в цьому та аналогічних прикладах, можна користуватися таким способом. *Перед записом*

відповіді в складних або громіздких випадках зобразимо вісь параметра ( $a$ ) і відмітимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування. Під віссю параметра (лівіше від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім розв'язку «коренів немає») і напроти кожної відповіді відмітимо, при яких значеннях параметра цю відповідь можна використовувати (рис. 82). Після цього відповідь записують для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра. Зокрема, у розглянутому прикладі перед записом відповіді зручно зобразити на чернетці таку схему (рис. 72).

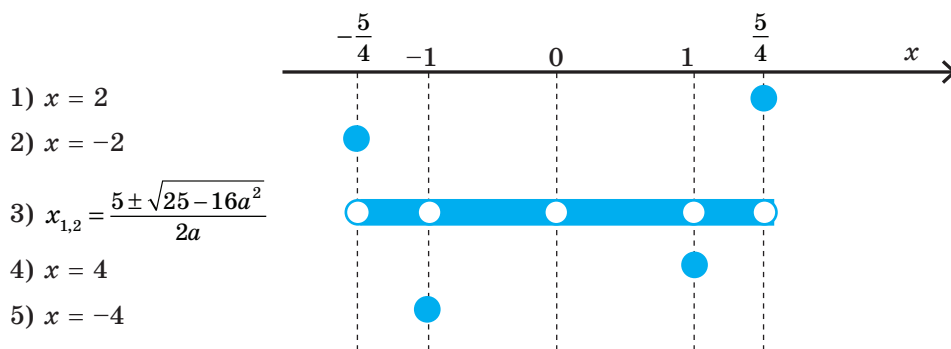


Рис. 72

## 9.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Деякі дослідницькі задачі з параметрами вдається розв'язати за такою схемою: 1) розв'язати задане рівняння чи нерівність; 2) дослідити одержаний розв'язок.

**Приклад 1** Знайдіть усі значення  $a$ , при яких рівняння  $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$  має єдиний корінь.

### Розв'язання

- ОДЗ:  $x \neq -7$ . На ОДЗ одержуємо рівносильне рівняння
- $$(x+a)(x-5a) = 0.$$
- Тоді  $x+a = 0$  або  $x-5a = 0$ .  
Одержуємо  $x = -a$  або  $x = 5a$ .  
Урахуємо ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли  $x = -7$ :
- $$-a = -7 \text{ при } a = 7,$$
- $$5a = -7 \text{ при } a = -\frac{7}{5}.$$

### Коментар

Оскільки дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то на ОДЗ ( $x+7 \neq 0$ ) задане рівняння рівносильне рівнянню  $(x+a)(x-5a) = 0$ . Далі враховуємо, що добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю (а другий має зміст).

Тоді при  $a = 7$  одержуємо:  
 $x = -a = -7$  — сторонній корінь;  
 $x = 5a = 35$  — єдиний корінь.

При  $a = -\frac{7}{5}$  одержуємо:  
 $x = 5a = -7$  — сторонній корінь;  
 $x = -a = \frac{7}{5}$  — єдиний корінь.

Також задане рівняння матиме єдиний корінь, якщо  $-a = 5a$ , тобто при  $a = 0$  (тоді  $x = -a = 0$  та  $x = 5a = 0 \neq -7$ ).

*Відповідь:*  $a = 7$ ,  $a = -\frac{7}{5}$ ,  $a = 0$ .  $\triangleleft$

Після цього з'ясуємо, при яких значеннях  $a$  знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто  $x = -7$ : прирівнюємо корені до  $-7$  і знаходимо відповідні значення  $a$ .

При знайдених значеннях  $a$  один із двох одержаних коренів буде стороннім ( $x = -7$ ) і рівняння матиме єдиний корінь (одне значення кореня). Крім того, задане рівняння матиме єдиний корінь ще й у тому випадку, коли два одержані корені ( $x = -a$  та  $x = 5a$ ) збігатимуться (і входять до ОДЗ).

**Дослідження кількості розв'язків рівнянь та їх систем.** При розв'язуванні деяких завдань із параметрами можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Достатньо простим є відповідне дослідження в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді  $f(x) = a$ , оскільки графік функції  $y = a$  — це пряма, паралельна осі  $Ox$  (яка перетинає вісь  $Oy$  у точці  $a$ ). Відзначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння  $f(x) = a$ , потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, а отже, і кількість коренів у них буде однаковою. Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння  $f(x) = a$ , достатньо визначити, скільки точок перетину має графік функції  $y = f(x)$  з прямою  $y = a$  при різних значеннях параметра  $a$ . (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

**Приклад 2** Скільки коренів має рівняння  $|x^2 - 4|x|| = a$  залежно від значення параметра  $a$ ?

#### Розв'язання

- Побудуємо графіки функцій  $y = |x^2 - 4|x||$  та  $y = a$  (рис. 73). Аналізуючи взаємне розміщення одержаних графіків, отримуємо *відповідь*:

#### Коментар

Оскільки в цьому завданні мова йде про кількість розв'язків рівняння, то для аналізу заданої ситуації спробуємо використати графічну ілюстрацію розв'язування.



- 1) при  $a < 0$  рівняння коренів не має;
- 2) при  $a = 0$  рівняння має 3 корені;
- 3) при  $0 < a < 4$  рівняння має 6 коренів;
- 4) при  $a = 4$  рівняння має 4 корені;
- 5) при  $a > 4$  рівняння має 2 корені.

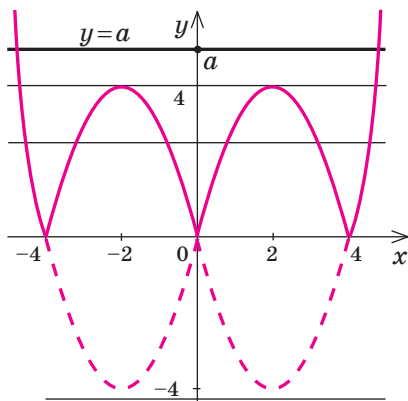


Рис. 73

1. Будуємо графік функції  $y = |x^2 - 4|x||$  (ураховуючи, що  $x^2 = |x|^2$ , побудова може відбуватися, наприклад, за такими етапами:  $x^2 - 4x \rightarrow |x|^2 - 4|x| \rightarrow |x^2 - 4|x||$ ).
2. Будуємо графік функції  $y = a$ .
3. Аналізуємо взаємне розміщення одержаних графіків і записуємо відповідь (кількість коренів рівняння  $f(x) = a$  дорівнює кількості точок перетину графіка функції  $y = f(x)$  з прямою  $y = a$ ).

Зазначимо, що значну кількість дослідницьких завдань не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими). Тому часто доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, давати відповідь на запитання задачі.

Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, можна використовувати такий орієнтир.

**Якщо в рівнянні  $f(x) = 0$  функція  $f(x)$  є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем  $\alpha$  ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння  $(-\alpha)$ .**

**Приклад 3** Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння

$$x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

має єдиний корінь.

#### Розв'язання

Функція  $f(x) = x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4$  є парною ( $D(f) = \mathbf{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ ).

Якщо  $x = \alpha$  — корінь рівняння (1), то  $x = -\alpha$  теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь

#### Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо  $x = \alpha$  — корінь рівняння  $f(x) = 0$ ,

у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли  $\alpha = -\alpha$ , тобто  $\alpha = 0$ . Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки  $x = 0$ . Якщо  $x = 0$ , то з рівняння (1) одержуємо  $a^2 - 4 = 0$ , тоді  $a = 2$  або  $a = -2$ .

При  $a = 2$  рівняння (1) перетворюється на рівняння  $x^4 - 2|x|^3 = 0$ . Тоді  $|x|^4 - 2|x|^3 = 0$ ,  $|x|^3 \cdot (|x| - 2) = 0$ . Одержуємо  $|x|^3 = 0$  (тоді  $|x| = 0$ , тобто  $x = 0$ ) або  $|x| - 2 = 0$  (тоді  $|x| = 2$ , тобто  $x = \pm 2$ ). Отже, при  $a = 2$  рівняння (1) має три корені, тобто умова задачі не виконується.

При  $a = -2$  рівняння (1) перетворюється на рівняння  $x^4 + 2|x|^3 = 0$ . Тоді  $|x|^4 + 2|x|^3 = 0$ ,  $|x|^3 \cdot (|x| + 2) = 0$ . Оскільки  $|x| + 2 \neq 0$ , то одержуємо  $|x|^3 = 0$ . Тоді  $|x| = 0$ , тобто  $x = 0$  — єдиний корінь. Отже,  $a = -2$  задовольняє умові задачі.

Відповідь:  $a = -2$ . ◀

то  $f(\alpha) = 0$  — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції  $f(x)$ , маємо  $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$ . Отже,  $x = -\alpha$  — теж корінь рівняння  $f(x) = 0$ . Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені  $\alpha$  і  $-\alpha$  збігаються. Тоді  $x = \alpha = -\alpha = 0$ .

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра  $a$ , при яких  $x = 0$  є коренем рівняння (1). (Це значення  $a = 2$  і  $a = -2$ .)

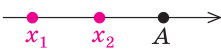

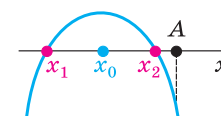
Оскільки значення  $a = 2$  і  $a = -2$  ми одержали з умови, що  $x = 0$  — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях  $a$  задане рівняння матиме єдиний корінь.

При розв'язуванні одержаних рівнянь доцільно використати, що  $x^4 = |x|^4$ .


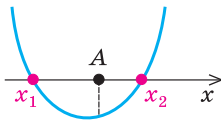
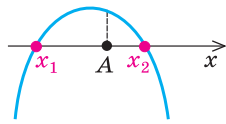
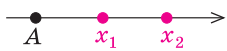
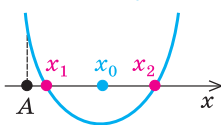
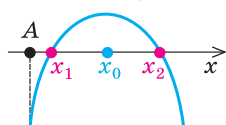

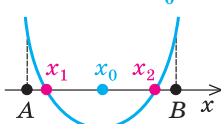
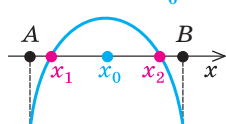

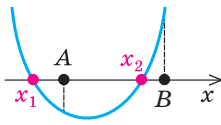
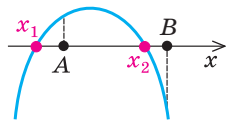

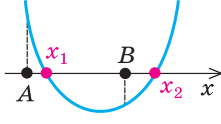
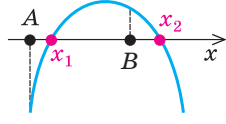

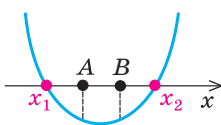
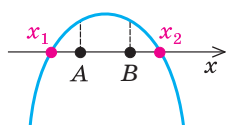
### 9.3. Використання умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( $a \neq 0$ ) відносно заданих чисел $A$ і $B$

Розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена. Основні з цих умов наведено в таблиці 16 (у таблиці використано традиційні позначення:  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $D = b^2 - 4ac$ ).

Таблиця 16

Розміщення коренів	Необхідні і достатні умови розміщення коренів		
	при $a > 0$	при $a < 0$	у загальному випадку ( $a \neq 0$ )
1. $x_1 < A$ $x_2 < A$ 	$f(A) > 0$ $D \geq 0; x_0 < A$ 	$f(A) < 0$ $D \geq 0; x_0 < A$ 	$\left\{ \begin{array}{l} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < A \end{array} \right.$

Продовження табл. 16

Розміщення коренів	Необхідні і достатні умови розміщення коренів		
	при $a > 0$	при $a < 0$	у загальному випадку ( $a \neq 0$ )
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
3. $x_1 > A$ $x_2 > A$ 	$f(A) > 0$ $D \geq 0; x_0 > A$ 	$f(A) < 0$ $D \geq 0; x_0 > A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 > A \end{cases}$
4. $A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) > 0; f(B) > 0$ $D \geq 0; A < x_0 < B$ 	$f(A) < 0; f(B) < 0$ $D \geq 0; A < x_0 < B$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \\ D \geq 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$
5. $x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0; f(B) > 0$ 	$f(A) > 0; f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
6. $A < x_1 < B$ $x_2 > B$ 	$f(A) > 0; f(B) < 0$ 	$f(A) < 0; f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
7. $x_1 < A$ $x_2 > B$ 	$f(A) < 0; f(B) < 0$ 	$f(A) > 0; f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

### Пояснення й обґрунтування

Для обґрунтування зазначених умов достатньо скористатися тим, що графік функції  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) — суцільна (нерозривна<sup>1</sup>) лінія. Якщо така функція на кінцях якогось проміжку набуває значень з різними знаками (тобто відповідні точки графіка розташовані в різних півплощинах відносно осі  $Ox$ ), то всередині цього проміжку є принаймні одна точка, у якій функція дорівнює нулю (рис. 74).

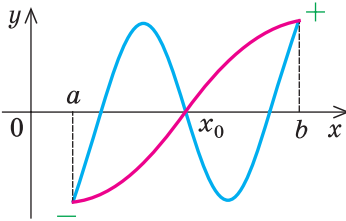


Рис. 74

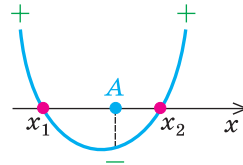


Рис. 75

Наприклад, для того щоб два різні корені квадратного тричлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ) були розміщені по різні боки від заданого числа  $A$ , достатньо зафіксувати тільки одну умову:  $f(A) < 0$  (рис. 75).

- Дійсно, графік квадратичної функції  $f(x) = ax^2 + bx + c$  при  $a > 0$  — парабола, вітки якої напрямлено вгору. Тоді у випадку, коли аргумент  $x$  прямує до  $+\infty$  або до  $-\infty$  (це позначають зазвичай так:  $x \rightarrow +\infty$  або  $x \rightarrow -\infty$ ), функція  $f(x)$  прямує до  $+\infty$  ( $f(x) \rightarrow +\infty$ ), отже,  $f(x) > 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  або при  $x \rightarrow -\infty$ . Якщо виконується умова  $f(A) < 0$ , то зі зміною значення аргументу  $x$  від  $A$  до  $+\infty$  квадратична функція  $f(x)$  змінює свій знак з «-» на «+», отже,  $f(x)$  має принаймні один корінь  $x_2 > A$ .

Так само зі зміною значення аргументу  $x$  від  $-\infty$  до  $A$  квадратична функція  $f(x)$  змінює свій знак з «+» на «-», отже,  $f(x)$  має принаймні один корінь  $x_1 < A$ . Але квадратний тричлен  $f(x)$  не може мати більше двох коренів, отже, при  $a > 0$  умова  $f(A) < 0$  необхідна і достатня для того, щоб два різні корені квадратного тричлена розміщувалися по різні боки від заданого числа  $A$ .

Аналогічні міркування при  $a < 0$  показують, що для виконання цієї самої вимоги необхідно і достатньо, щоб  $f(A) > 0$ . Ці дві умови можна об'єднати в одну:  $a \cdot f(A) < 0$ .

$$\text{Дійсно, } a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases} \text{ Отже,}$$

<sup>1</sup> Відповідну властивість буде обґрунтовано більш строго в 11 класі під час розгляду так званих неперервних функцій.

**квадратний тричлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) має два різні корені, що знаходяться по різні боки від заданого числа  $A$ , тоді і тільки тоді, коли виконується умова  $a \cdot f(A) < 0$ .**

Аналогічно можна обґрунтувати й інші умови, наведені в таблиці 16.

Зауважимо, що наведені умови не обов'язково запам'ятовувати: для їхнього запису можна користуватися графіком квадратичної функції (зображеним для потрібного розміщення коренів) і таким орієнтиром.

Для того щоб корені квадратного тричлена  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) були розміщені заданим чином відносно даних чисел  $A$  і  $B$ , необхідно і достатньо виконання системи умов, яка включає:

- 1) знак коефіцієнта при старшому члені;
- 2) знаки значень  $f(A)$  і  $f(B)$ ;
- 3) знак дискримінанта  $D$ ;
- 4) положення абсциси вершини параболу  $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$  відносно даних чисел  $A$  і  $B$ .

Зазначимо, що для випадків, у яких хоча б одне з даних чисел розміщено між коренями квадратного тричлена (див. другий, п'ятий, шостий і сьомий рядки табл. 16), достатньо, щоб виконувалися перші дві умови цього орієнтира, а для інших випадків доводиться розглядати всі чотири умови. Зауважимо також, що, записуючи кожен з указаних умов, слід розглядати, чи виконуватиметься вимога задачі в тому випадку, якщо в цій умові записати знак нестрогої нерівності.

**Приклад 1** Знайдіть усі значення параметра  $a$ , для яких рівняння  $ax^2 - x + 3a = 0$  має один корінь більший за 2, а другий — менший від 1.

#### Коментар

Оскільки задане рівняння має два різних корені, то воно квадратне (тобто  $a \neq 0$ ). Тоді  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12a^2}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 12a^2}}{2a}$  і, щоб отримати відповідь на запитання задачі, достатньо розв'язати сукупність із двох систем ірраціональних нерівностей:  $\begin{cases} x_1 > 2, \\ x_2 < 1 \end{cases}$  або  $\begin{cases} x_1 < 1, \\ x_2 > 2. \end{cases}$  Але такий шлях розв'язування достатньо громіздкий.

Спробуємо скористатися умовами розміщення коренів квадратного тричлена. Для цього можна безпосередньо використати відповідні умови, зафіксовані в таблиці 16, або отримати їх за допомогою запропонованого орієнтира. Зокрема, позначимо  $f(x) = ax^2 - x + 3a$  і зобразимо

графік квадратичної функції  $f(x)$  (параболу) в таких положеннях, які задовольняють умові задачі (рис. 76, а і б).

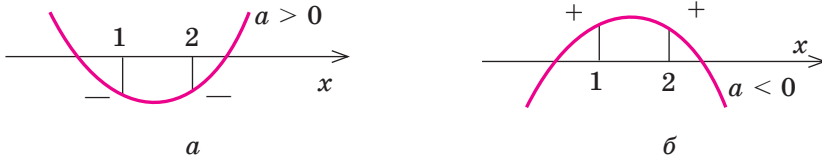


Рис. 76

Для того щоб корені квадратного тричлена розміщувалися по різні боки від чисел 1 і 2, необхідно і достатньо, щоб виконувалася сукупність умов:

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} a < 0, \\ f(1) > 0, \\ f(2) > 0. \end{cases} \text{ Помічаємо, що в кожній системі знаки } a$$

і  $f(1)$  та  $a$  і  $f(2)$  протилежні, тому цю сукупність систем можна замінити рівносильною системою  $\begin{cases} a f(1) < 0, \\ a f(2) < 0. \end{cases}$  З цього випливає такий план розв'язування.

*Розв'язання*

► Оскільки задане рівняння має два різних корені, то воно є квадратним (тобто  $a \neq 0$ ). Позначимо  $f(x) = ax^2 - x + 3a$ . Як відомо, корені квадратного тричлена можуть розміщуватися по різні боки від чисел 1 і 2 тоді і тільки тоді, коли виконується система умов:

$$\begin{cases} a f(1) < 0, \\ a f(2) < 0. \end{cases}$$

Одержуємо систему  $\begin{cases} a(4a-1) < 0, & (1) \\ a(7a-2) < 0. & (2) \end{cases}$

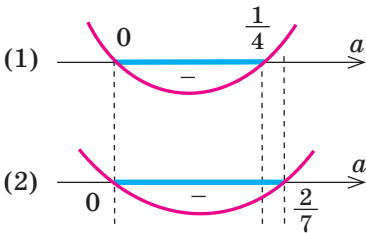


Рис. 77

Розв'язуємо нерівності (1) і (2) і знаходимо спільний розв'язок системи (рис. 77).

*Відповідь:* задане рівняння має один корінь більший за 2, а другий — менший від 1 при  $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$ . ◀

## Вправи

Розв'яжіть рівняння та нерівності зі змінною  $x$  (1–3).

- 1)  $5ax - a = ax + a$ ;                      2)  $4 - ax = 2x + 7a$ ;  
3)  $ax + 7a \leq ax + 8a$ ;                      4)  $2a - 6x > 2ax + 11$ .
- 1)  $|x - 2| + |x + 1| = ax + 3$ ;            2)  $|x - a| + |x| = 2$ ;  
3)  $|a - x| + |x + a + 1| = 1$ .
- 1)  $ax + 1 = \frac{9a + 3}{x}$ ;    2)  $2ax - 1 = \frac{4a - 1}{x - 1}$ ;            3)  $\frac{ax + 1}{x + a} = \frac{2}{x}$ .
- Знайдіть усі значення  $a$ , при яких задане рівняння має єдиний корінь: 1)  $\frac{(x - a)(x - 2a)}{x - 4} = 0$ ;    2)  $\frac{(x + 2a)(x - 6a)}{x + 12} = 0$ .
- Знайдіть усі значення  $a$ , при яких задане рівняння має єдиний корінь: 1)  $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$ ;    2)  $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$ .
- Для кожного значення параметра  $b$  знайдіть число коренів рівняння  $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$ .
- Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $|x^2 - 2ax| = 1$  має рівно три різних корені.
- Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $|x^2 + 2x + a| = 2$  має чотири різних корені.
- Знайдіть найбільше значення параметра  $k$ , при якому обидва корені рівняння  $x^2 + (2k + 6)x + 4k + 12 = 0$  більші від  $-1$ .
- Знайдіть усі значення параметра  $m$ , для яких рівняння  $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 4m = 0$  має один корінь більший за 3, а другий — менший від 2.

## ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

- Визначте суму розв'язків рівняння:  
1)  $|x + 5| = 7$ ;                                      2)  $|2x - 1| = 5$ ;  
3)  $|x + 7| = 2$ ;                                      4)  $|4x - 8| + |2 - x| = 4$ ;  
5)  $2|x - 3| - |3 - x| = 5$ ;                      6)  $5|x + 4| - 2|4 - x| = 4$ .
- Визначте  $x + y$ , якщо:  
1)  $|x - y| + |4 - x| = 0$ ;                      2)  $|2x - y| + 2|2 - x| = 0$ .
- Визначте  $xy$ , якщо:  
1)  $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$ ;    2)  $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$ .
- Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:  
1)  $|x - 1| \leq 2$ ;    2)  $|x + 2| \leq 4$ ;    3)  $|x - 3| \leq 6$ ;    4)  $|x + 4| < 5$ .
- Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності в проміжку  $[-5; 5]$ :  
1)  $|x + 2| \geq 3$ ;    2)  $|x - 1| \geq 4$ ;    3)  $|x - 2| \geq 3$ ;    4)  $|2x - 1| \geq 3$ .
- Визначте найбільший цілий розв'язок нерівності:  
1)  $|3x - 1| < 2x + 2$ ;    2)  $|2 - 3x| - x \leq 8$ ;    3)  $|7 - 3x| - 2x \leq 2$ .

7. Визначте найменший цілий розв'язок нерівності:  
 1)  $|1 - 2x| - x \leq 10$ ; 2)  $|3x - 2| + 2x \leq 8$ ; 3)  $|4x - 4| + 4x \geq 5$ .
8. Визначте найменший розв'язок нерівності:  
 1)  $|3x + 1| \leq x + 7$ ; 2)  $|2x + 3| \leq x + 12$ ; 3)  $|4x + 3| \leq x + 21$ .
9. Знайдіть найбільше значення параметра  $a$ , при якому рівняння має розв'язок:  
 1)  $|2x - 1| = 1 - 4a$ ; 2)  $|3x + 2| = 3 - 4a$ .
10. Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому рівняння має розв'язок:  
 1)  $|2x - 1| = 4a + 1$ ; 2)  $|3x + 3| = 5a - 7$ .
11. Знайдіть найбільше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння має розв'язок:  
 1)  $2|x - 3| - a|3 - x| = 5$ ; 2)  $3|x - 2| + a|2 - x| = -4$ .
12. Знайдіть найменше ціле значення параметра  $a$ , при якому рівняння має розв'язок:  
 1)  $8|x - 3| + a|3 - x| = 5$ ; 2)  $3|x - 2| - a|2 - x| = -6$ .
13. Визначте значення параметра  $m$ , при якому рівняння має точно чотири розв'язки:  
 1)  $|x(|x - 5|) = m$ ; 2)  $|(x + 1)(|x + 1| - 3)| = m$ ;  
 3)  $|2(5 - |x|x)| = m$ .
14. При якому найменшому цілому значенні параметра  $m$  рівняння  $x^2 - |16x - 48| = m$  має чотири розв'язки?
15. При якому значенні параметра  $m$  рівняння  $x^2 - |14x - 28| = m$  має один розв'язок?
16. Укажіть, скільки всього дійсних коренів має рівняння  $x^3 - 3|x| = 0$ .
17. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких задана система рівнянь має єдиний розв'язок.
- 1)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ x \cdot y = 0; \end{cases}$   
 3)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x - 7)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 4, \\ |y| = 1 - |x - 12|. \end{cases}$

Розв'яжіть завдання (18–29), використовуючи складання рівнянь, нерівностей або їх систем.

18. Робітник повинен був за планом виготовити за декілька днів 72 деталі. Оскільки щодня він виготовляв на 2 деталі менше плану, то закінчив роботу через 3 дні після запланованого терміну. Скільки деталей в день повинен був виготовляти робітник за планом?
19. Три однакові комбайни, працюючи разом, зібрали врожай з першого поля, а потім два з них зібрали врожай з другого поля (іншої



площі). Уся робота зайняла 12 годин. Якби три комбайни виконали половину всієї роботи, а потім частину, що залишилася, виконав один з них, то робота зайняла б 20 годин. За який час два комбайни можуть зібрати врожай з першого поля?

20. Продуктивність першого верстата на 25 % більша за продуктивність другого верстата. На другому верстаті виготовлено деталей на 4 % більше, ніж на першому. На скільки відсотків час, витрачений робітником на виготовлення деталей на другому верстаті, більший за час, потрібний для цієї роботи на першому верстаті?
21. Перша труба наповнює басейн водою у два рази швидше, ніж друга. Якщо половину басейну наповнити через першу трубу, а частину, що залишилася, через другу, то для наповнення басейну буде потрібно 6 годин. За скільки годин можна наповнити басейн водою тільки через першу трубу?
22. Два велосипедисти виїжджають одночасно назустріч один одному з пунктів А і В, відстань між якими 30 км, і зустрічаються за годину. Не зупиняючись, вони продовжують шлях з тією самою швидкістю, і перший прибуває в пункт В на 1,5 години раніше, ніж другий у пункт А. Визначте швидкість першого велосипедиста.
23. Протягом 7 год 20 хв катер пройшов угору по річці 35 км і повернувся назад. Швидкість течії дорівнює 4 км за годину. З якою швидкістю катер ішов за течією?
24. Змішали 30 % -вий розчин соляної кислоти з 10 % -вим і одержали 600 г 15 % -вого розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?
25. Є два сплави, що складаються з цинку, міді та олова. Відомо, що перший сплав містить 40 % олова, а другий — 26 % міді. Процентний вміст цинку в першому і в другому сплавах однаковий. Сплавивши 150 кг першого сплаву і 250 кг другого, одержали новий сплав, у якому виявилось 30 % цинку. Визначте, скільки кілограмів олова міститься в новому сплаві.
26. Знайдіть таке двозначне число, у якому число одиниць на два більше від числа десятків, а добуток шуканого числа на суму його цифр дорівнює 144.
27. Біля дому посаджено берези та липи, причому загальна їх кількість більша за 14. Якщо кількість лип збільшити вдвічі, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше. Якщо збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількості лип, то лип все одно буде більше. Скільки беріз і скільки лип було посаджено?
28. Групу людей намагалися вишикувати в колону по 8 чоловік у ряд, але один ряд виявився неповним. Коли ту ж групу людей вишикували по 7 чоловік у ряд, то всі ряди виявилися повними, а число рядів виявилось на 2 більшим. Якби тих же людей вишикували по

5 чоловік в ряд, то рядів було б ще на 7 більше, причому один ряд був би неповним. Скільки людей було в групі?

29. У магазині продаються гвоздики і троянди. Гвоздика коштує 1 грн. 50 коп., троянда — 2 грн. На купівлю гвоздик і троянд можна витратити не більше 30 грн. 50 коп., при цьому число гвоздик не повинне відрізнятись від числа троянд більше ніж на 6. Необхідно купити максимально можливу сумарну кількість квітів, при цьому гвоздик потрібно купити якомога менше. Скільки гвоздик і скільки троянд можна купити за вказаних умов?

## ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Нагадаємо, що алгебра — розділ математики, присвячений вивченню буквених виразів і рівнянь. Довгий час алгебра була частиною науки про число — арифметики. Значну кількість задач, які виникають у процесі практичної діяльності людини, розв'язують однаковими способами. Використовуючи замість чисел букви, математики навчилися розв'язувати такі задачі в загальному вигляді. Цим шляхом і утворилася математична наука — алгебра.

Історично зачатки алгебри були відомі вавилонянам, єгиптянам і грекам задовго до нашої ери. Зберігся єгипетський папірус Ахмеса (XVII ст. до н. е.) з розв'язуванням алгебраїчних задач. Учені Вавилонна (більше 4000 років тому) вміли знаходити наближене значення квадратного кореня з будь-якого натурального числа, а також розв'язувати квадратні рівняння. Це було пов'язано з розв'язуванням задач про знаходження площ земельних ділянок і з розвитком астрономії. Проте у вавилонян ще не було поняття від'ємного числа, і тому корінь квадратного рівняння міг бути тільки додатним.

Діофант, грецький математик, який жив у III ст. в Александрії, написав трактат «Арифметика», у якому він уже розв'язував лінійні та інші рівняння. У Середні віки особливо активно алгебра розвивалася в арабських країнах і Середній Азії.

Завдання, пов'язані з квадратними рівняннями, можна знайти і в працях індійських математиків V ст. Квадратні рівняння класифікував у трактаті «Алгебра» аль-Хорезмі. Він же навів і способи їх розв'язання.

Упродовж багатьох століть розвиток алгебри сильно гальмувався, тому що математикам довго не вдавалося ввести у свої дослідження доречні позначення. Тому виклад математичних робіт виглядав громіздко. Тільки починаючи із XVI ст. поступово до математики почали вводити сучасні позначення. Символи  $a^2$ ,  $a^3$ ,  $a^4$  тощо вперше застосував фран-

цузький учений Рене Декарт (1596–1650). Символ  $a^n$  для довільного числа  $n$  запропонував англійський учений Ісак Ньютон (1643–1727).

Завдяки дослідженням французького математика Франсуа Вієта (1540–1603) рівняння другого ступеня, третього і четвертого ступенів уперше стали розглядати в буквених позначеннях. Він увів буквені позначення для невідомих величин і коефіцієнтів рівнянь. Особливо цінував відкриті ним формули, названі згодом формулами Вієта. Проте Вієт визнавав тільки додатні корені. Лише в XVII ст., після робіт Р. Декарта, І. Ньютона й інших математиків, розв'язування квадратних та інших рівнянь набуло сучасного вигляду.

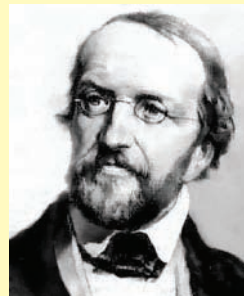
Ідея залежності величин теж бере початок від старогрецької науки. Але греки розглядали лише величини, що мають «геометричну» природу, і не ставили питання про загальне вивчення різних залежностей. Графічне зображення залежностей між величинами широко використовували Г. Галілей (1564–1642), П. Ферма (1601–1665) і Р. Декарт, який увів поняття змінної величини. Розвиток механіки і техніки привів до необхідності введення загального поняття функції, що зробив німецький філософ і математик Г. Лейбніц (1646–1716). Великі класи функцій вивчав у ході своїх досліджень І. Ньютон.

У 1718 р. учень Лейбніца, І. Бернуллі (1667–1748), дав означення функції, позбавлене геометричних образів. Наступний крок у розвитку поняття функції зробив його учень, член Петербурзької академії наук Л. Ейлер (1707–1783).

Після робіт ряду математиків (Ж. Фур'є (1768–1830), М. І. Лобачевський, П. Діріхле та ін.) було дано таке означення: «Змінна величина у називається функцією змінної величини  $x$ , якщо кожному значенню величини  $x$  відповідає єдине значення величини  $y$ ». На сучасному етапі до слів «кожному значенню величини  $x$ » додають «що належить деякій множині», а замість змінних величин говорять про еле-



М. І. Лобачевський  
(1792–1856)



П. Діріхле  
(1805–1859)

менти цих множин. Цей підхід дозволяє розглядати з єдиної точки зору як числові функції, так і, наприклад, геометричні перетворення тощо.

Несумірність сторони квадрата та його діагоналі була відкрита в V ст. до н. е. в Стародавній Греції. Це відкриття показало, що для вимірювання геометричних величин недостатньо раціональних чисел. Тому грецькі математики відмовилися від вираження геометричних величин числами і стали розвивати геометричну алгебру (тому і зараз кажуть «квадрат числа», «куб числа» тощо). Грецький математик Евдокс (IV ст. до н. е.) розробив теорію відношень геометричних величин, що замінювала для старогрецьких математиків сучасну теорію дійсних чисел. В основу теорії Евдокса покладено ідею про нескінченну подільність відрізків та інших фігур.

Р. Декарт увів довільно вибраний одиничний відрізок, що дозволило йому виразити всі дії над числами через дії над відрізками. По суті, він уже працював з додатними дійсними числами. Лише в другій половині XIX ст. теорія дійсних чисел була зведена до теорії натуральних чисел.

**Про поняття дійсного числа.** Перші уявлення про числа формувалися поступово під впливом практики. З давніх часів числа застосовувались під час лічби і вимірювання величин.

Відповідь на запитання «Скільки елементів містить дана скінченна множина?» завжди виражається або натуральним числом, або числом «нуль». Отже, множина

$$\{0; 1; 2; \dots\}$$

всіх невід'ємних чисел обслуговує всі потреби лічби.

Інакше з вимірюванням величин. Відстань між двома пунктами може дорівнювати 3,5 кілометра, площа кімнати — 16,45 квадратних метра тощо.

Історично додатні дійсні числа з'явилися як відношення довжин відрізків.

З відкриттям несумірності діагоналі одиничного квадрата з його стороною стало зрозумілим, що відношення довжин відрізків не завжди можна виразити не тільки натуральним, а й раціональним числом. Щоб числове значення кожного відрізка при фіксованій одиниці виміру було визначене, потрібно було ввести нові числа — ірраціональні.

Усі практичні вимірювання величин мають лише наближений характер. Їх результат з потрібною точністю можна виразити за допомогою раціональних дробів або скінченних десяткових дробів. Наприклад, вимірюючи діагоналі квадрата із стороною 1 м з точністю до 1 см, ми виявимо, що її довжина наближено дорівнює 1,41 м. Вимірюючи з точністю до 1 мм, дістанемо, що ця довжина наближено дорівнює 1,414 м.

Проте в математиці часто відхиляються від наближеного характеру практичних вимірювань. Послідовний теоретичний підхід до вимірювання довжин відрізків приводить до необхідності розглядання нескінченних десяткових дробів. (Саме такими дробами є числа  $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ ,  $\pi = 3,14159265\dots$ .)

Відношення довжини будь-якого відрізка до довжини відрізка, прийнятого за одиницю виміру, завжди можна виразити числом, поданим у вигляді нескінченного десяткового дробу.

Повна теорія дійсних чисел достатньо складна і не входить у програму середньої школи. Її зазвичай розглядають у курсах математичного аналізу. Проте з одним із способів її побудови ми ознайомимося в загальних рисах.

### 1. Покладають:

а) кожному дійсному числу відповідає (як його запис) нескінченний десятковий дріб:

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots;$$

б) кожний нескінченний десятковий дріб є записом дійсного числа. Але при цьому природно вважати десятковий дріб, що закінчується нескінченною послідовністю дев'яток, лише другим записом числа, поданим десятковим дробом, що закінчується нескінченною послідовністю нулів:  $0,9999\dots = 1,0000\dots$ ;  $12,765999\dots = 12,766000\dots$ . Тільки вилучивши з розгляду десяткові дроби з дев'яткою в періоді, дістаємо взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною нескінченних десяткових дробів.

Число  $a_0$  — це ціла частина додатного числа  $x$ ,

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots \text{ — дробова частина числа } x.$$

Число  $x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$  називають *десятковим наближенням  $x$  з точністю до  $10^{-n}$  з недостатчею*, а число  $x'_n = x_n + 10^{-n}$  називають *десятковим наближенням з точністю до  $10^{-n}$  з надлишком* для числа

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots .$$

Якщо число  $x$  від'ємне, тобто

$$x = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots, \text{ то вважають}$$

$$x'_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \text{ і } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

- Вводять *правило порівняння* двох дійсних чисел. За означенням число  $x$  менше від числа  $y$ , коли принаймні для одного  $n$  виконується нерівність  $x_n < y_n$ , де  $x_n$  і  $y_n$  — десяткові наближення з точністю до  $10^{-n}$  з недостатчею для чисел  $x$  і  $y$ . (Ми скористалися тим, що правило порівняння скінченних десяткових дробів уже відоме.)
- Означають *арифметичні дії* над дійсними числами (при цьому також користуються тим, що ці дії вже означені для скінченних десяткових дробів).

Сумою двох дійсних чисел  $x$  і  $y$  (позначають:  $x + y$ ) називають таке дійсне число  $z$ , що для будь-якого  $n$  виконуються нерівності

$$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

У курсах математичного аналізу доводиться, що таке число існує і воно єдине.

Аналогічно *добутком* двох невід'ємних чисел  $x$  і  $y$  називають таке число  $z$  (позначають  $xy$ ), що при будь-якому  $n$  виконуються нерівності

$$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

Таке число існує, і воно єдине.

Нагадаємо, що приклади виконання означених таким чином дій додавання і множення дійсних чисел було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Для дійсних чисел різних знаків, скориставшись тим, що добуток невід'ємних чисел  $|x|$  і  $|y|$  уже означений, покладають  $xy = -|x| \cdot |y|$ , а для чисел однакових знаків  $xy = |x| \cdot |y|$  (зазвичай модулем кожного з чисел  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  і  $-a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  називають число  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ).

Віднімання означається як дія, обернена до додавання: *різницею*  $x - y$  чисел  $x$  і  $y$  називається таке число  $z$ , що  $y + z = x$ . Ділення означають як дію, обернену до множення: *часткою*  $x : y$  називається таке число  $z$ , що  $yz = x$ .

- Показують, що нерівності та арифметичні операції, означені вище, зберігають основні властивості, притаманні їм у множині раціональних чисел.

Теорія дійсного числа була побудована відразу в декількох формах німецькими математиками Р. Дедекіндом (1831–1916), К. Вейєрштрассом (1815–1897) і Г. Кантором (1845–1918).



# Розділ 2

## СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

### ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 10. Корінь  $n$ -го степеня та його властивості. Функція  $y = \sqrt[n]{x}$  та її графік
- § 11. Ірраціональні рівняння
- § 12. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція, її властивості та графік

### ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 13. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь
- § 14. Ірраціональні нерівності
- § 15. Розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами

В основній частині цього розділу ви ознайомитеся з узагальненням поняття квадратного кореня — коренем  $n$ -го степеня та його властивостями, навчитеся розв'язувати ірраціональні рівняння та будувати графіки степеневих функцій і функції  $y = \sqrt[n]{x}$  та використовувати їх властивості до розв'язування різноманітних задач.

У додатковій частині розділу ви зможете ознайомитися з методами розв'язування більш складних завдань з теми, які пропонують у завданнях зовнішнього незалежного оцінювання чи державної підсумкової атестації з математики (це, у першу чергу, методи розв'язування ірраціональних нерівностей, застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь та методи розв'язування ірраціональних рівнянь і нерівностей з параметрами).

**§ 10**

**КОРІНЬ  $n$ -ГО СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ.  
ФУНКЦІЯ  $y = \sqrt[n]{x}$  ТА ЇЇ ГРАФІК**

Таблиця 17

1. Означення		
Квадратний корінь	Корінь $n$ -го степеня	
<p><i>Квадратним коренем із числа <math>a</math> називається таке число <math>b</math>, квадрат якого дорівнює <math>a</math>.</i></p> <p>Якщо <math>a = b^2</math>, то <math>b</math> — квадратний корінь із числа <math>a</math>.</p> <p><i>Арифметичний корінь — невід’ємне значення кореня.</i></p> <p>При <math>a \geq 0</math>: <math>\sqrt{a}</math>, <math>\sqrt[n]{a}</math> — позначення арифметичного значення кореня.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math>(\sqrt{a})^2 = a</math></div>	<p><i>Коренем <math>n</math>-го степеня з числа <math>a</math> називається таке число <math>b</math>, <math>n</math>-й степінь якого дорівнює <math>a</math>.</i></p> <p>Якщо <math>a = b^n</math> (<math>n \in \mathbb{N}</math>, <math>n \neq 1</math>), то <math>b</math> — корінь <math>n</math>-го степеня з числа <math>a</math>.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math>(\sqrt[n]{a})^n = a</math></div>	
2. Область допустимих значень (ОДЗ)		
Квадратний корінь	Корінь $n$ -го степеня	
$\sqrt{a}$ існує тільки при $a \geq 0$	$\sqrt[2k]{a}$ існує тільки при $a \geq 0$ ( $k \in \mathbb{N}$ ); $\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях $a$	
Запис розв’язків рівняння $x^n = a$ ( $n \in \mathbb{N}$ )		
$n = 2k + 1$ — непарне ( $k \in \mathbb{N}$ )	$n = 2k$ — парне ( $k \in \mathbb{N}$ )	
<p>При будь-яких значеннях <math>a</math> рівняння <math>x^{2k+1} = a</math> має єдиний корінь <math>x = \sqrt[2k+1]{a}</math></p>	<p>При <math>a &lt; 0</math> рівняння <math>x^{2k} = a</math> не має коренів</p> <p>При <math>a \geq 0</math> всі корені рівняння <math>x^{2k} = a</math> можна записати так: <math>x = \pm \sqrt[2k]{a}</math></p>	
Приклади		
Рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$	Рівняння $x^8 = -7$ не має коренів	Рівняння $x^8 = 7$ має корені $x = \pm \sqrt[8]{7}$
3. Властивості кореня $n$ -го степеня		
$n = 2k + 1$ — непарне число	$n = 2k$ — парне число	
<p>1) <math>\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}</math></p> <p>2) <math>\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a</math></p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"><math>\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} =  a </math></div>	



Продовження табл. 17

Для довільних значень  $n$  і  $k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ )

3) При  $a \geq 0$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

4) При  $a \geq 0$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

5) При  $a \geq 0, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Наслідки

При  $a \geq 0, b \geq 0$   $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$  — виведення множника з-під знака кореня.

При  $a \geq 0, b \geq 0$   $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$  — виведення множника під знак кореня.

6) При  $a \geq 0, b > 0$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

7) При  $a \geq 0$   $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$  — основна властивість кореня

Значення кореня з степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натуральне число.

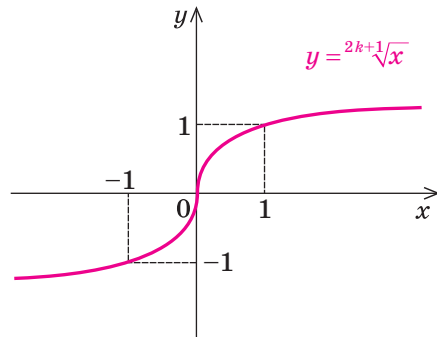
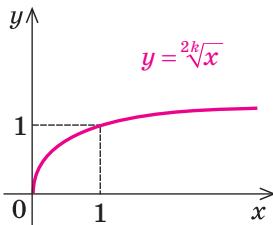
8) При  $a \geq 0, b \geq 0$ , якщо  $a > b$ , то  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

#### 4. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік

Графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ )

$n$  — парне ( $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ )

$n$  — непарне ( $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ )



Властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$	
$n$ — парне ( $n = 2k, k \in \mathbf{N}$ )	$n$ — непарне ( $n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}$ )
1. Область визначення: $x \geq 0$ , тобто $D(\sqrt[2k]{x}) = [0; +\infty)$ .	1. Область визначення: $x \in \mathbf{R}$ ( $x$ — будь-яке дійсне число), тобто $D(\sqrt[2k+1]{x}) = \mathbf{R}$ .
2. Область значень: $y \geq 0$ , тобто $E(\sqrt[2k]{x}) = [0; +\infty)$ .	2. Область значень: $y \in \mathbf{R}$ ( $y$ — будь-яке дійсне число), тобто $E(\sqrt[2k+1]{x}) = \mathbf{R}$ .
3. Найбільшого значення функція $y = \sqrt[2k]{x}$ не має; найменше значення — $y = 0$ (при $x = 0$ ).	3. Найбільшого і найменшого значень функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$ не має.
4. Функція ні парна, ні непарна.	4. Функція <b>непарна</b> : $\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}$ , отже, графік функції симетричний відносно початку координат.
5. Точки перетину з осями координат: $Oy \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} Ox \begin{cases} y=0, \\ x=0. \end{cases}$ <b>Графік проходить через початок координат.</b>	
6. Проміжки зростання і спадання: на всій області визначення функція зростає.	
7. Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y > 0$	7. Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y > 0$ , при $x < 0$ значення $y < 0$

### Пояснення й обґрунтування

1. **Означення кореня  $n$ -го степеня.** Поняття кореня квадратного з числа  $a$  вам відомо: це таке число, квадрат якого дорівнює  $a$ . Аналогічно означають і корінь  $n$ -го степеня з числа  $a$ , де  $n$  — довільне натуральне число, більше за 1.

**Коренем  $n$ -го степеня з числа  $a$  називається таке число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $a$ .**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, оскільки  $3^3 = 27$ ; корінь третього степеня з числа  $-27$  дорівнює  $-3$ , оскільки  $(-3)^3 = -27$ . Числа 2 і  $-2$  є коренями четвертого степеня з 16, оскільки  $2^4 = 16$  і  $(-2)^4 = 16$ .

При  $n = 2$  та при  $n = 3$  корені  $n$ -го степеня називають також відповідно квадратним та кубічним коренями.

Як і для квадратного кореня, для кореня  $n$ -го степеня вводять поняття арифметичного кореня.

**Арифметичним коренем  $n$ -го степеня з числа  $a$  називається невід'ємне число,  $n$ -й степінь якого дорівнює  $a$ .**

При  $a \geq 0$  для арифметичного значення кореня  $n$ -го степеня з числа  $a$  існує спеціальне позначення<sup>1</sup>:  $\sqrt[n]{a}$ ; число  $n$  називають *показником кореня*, а саме число  $a$  — *підкореневим виразом*. Знак  $\sqrt[n]{\phantom{a}}$  і вираз  $\sqrt[n]{a}$  називають також *радикалом*.

Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, записують так:  $\sqrt[3]{27} = 3$ ; те, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює 2, записують так:  $\sqrt[4]{16} = 2$ . Але для запису того, що корінь четвертого степеня із 16 дорівнює  $-2$ , позначення немає.

При  $a < 0$  значення кореня  $n$ -го степеня з числа  $a$  існує тільки при непарних значеннях  $n$  (оскільки не існує такого дійсного числа, парний степінь якого буде від'ємним числом). У цьому випадку корінь непарного степеня  $n$  із числа  $a$  теж позначають  $\sqrt[n]{a}$ . Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа  $-27$  дорівнює  $-3$ , записують так:  $\sqrt[3]{-27} = -3$ . Оскільки  $-3$  — від'ємне число, то  $\sqrt[3]{-27}$  не є арифметичним значенням кореня. Але корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичне значення кореня за допомогою формули

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}.$$

- Щоб довести наведену формулу, зауважимо, що за означенням кореня  $n$ -го степеня ця рівність буде правильною, якщо  $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$ . Дійсно,  $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot (\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$ , а це й означає, що  $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ . ○

Наприклад,  $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$ ;  $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$ .

Зазначимо також, що *значення  $\sqrt[2k+1]{a}$  має той самий знак, що й число  $a$* , оскільки при піднесенні до непарного степеня знак числа не змінюється.

Також за означенням кореня  $n$ -го степеня можна записати, що в тому випадку, коли існує значення  $\sqrt[n]{a}$ , виконується рівність

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{і, зокрема, при } a \geq 0 \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

<sup>1</sup> Усі властивості виразів виду  $\sqrt[n]{a}$  наведено для випадку  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . При  $n = 1$  домовимося вважати, що  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[1]{a} = a$ .

**2. Область допустимих значень виразів із коренями  $n$ -го степеня. Розв'язки рівняння  $x^n = a$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Зазначимо, що**

**■ значення  $\sqrt[n]{a}$  — кореня непарного степеня з числа  $a$  — існує при будь-яких значеннях  $a$ .**

- Обґрунтуємо це, наприклад, для кореня третього степеня. Позначимо  $\sqrt[3]{a} = x$ . Тоді за означенням кореня  $n$ -го степеня  $x^3 = a$  і значення  $\sqrt[3]{a}$  буде існувати, якщо рівняння  $x^3 = a$  матиме розв'язок. Зобразивши графіки функцій  $y = x^3$  і  $y = a$  (рис. 78), бачимо, що при будь-яких значеннях  $a$  пряма  $y = a$  перетинає графік функції  $y = x^3$  в одній точці. Отже, при будь-якому значенні  $a$  існує єдине значення  $\sqrt[3]{a}$  (оскільки функція  $y = x^3$  зростає і набуває всіх значень від  $-\infty$  до  $+\infty$ ). ○

Аналогічне обґрунтування можна навести і для інших коренів непарного степеня (див. графіки і властивості функцій виду  $y = x^{2k+1}$  у § 12).

Наведені міркування дозволяють записати розв'язки рівняння  $x^n = a$  для непарних значень  $n = 2k + 1$ : **при будь-яких значеннях  $a$  рівняння  $x^{2k+1} = a$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) має єдиний корінь  $x = \sqrt[2k+1]{a}$ .**

Наприклад, рівняння  $x^5 = 3$  має єдиний корінь  $x = \sqrt[5]{3}$ , а рівняння  $x^7 = -11$  має єдиний корінь  $x = \sqrt[7]{-11}$  (ураховуючи, що  $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$ , корінь для рівняння  $x^7 = -11$  можна записати так:  $x = -\sqrt[7]{11}$ ).

**■ Значення  $\sqrt[2k]{a}$  — кореня парного степеня з числа  $a$  — існує тільки при  $a \geq 0$ .**

Дійсно, у тому випадку, коли  $\sqrt[2k]{a} = x$ , за означенням кореня  $n$ -го степеня  $a = x^{2k}$ . Отже,  $a \geq 0$ .

Для квадратного кореня це можна також обґрунтувати, використавши відомий графік функції  $y = x^2$ .

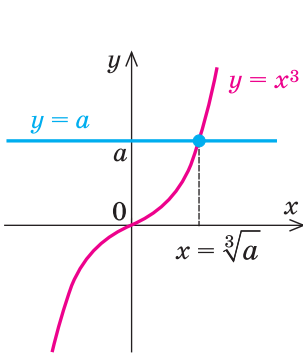


Рис. 78

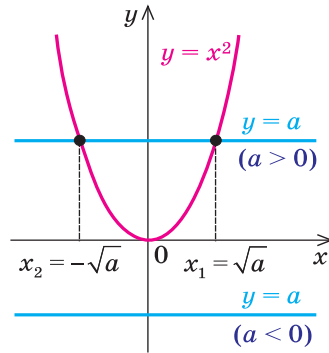


Рис. 79

- Нехай  $\sqrt{a} = x$ , тоді за означенням квадратного кореня  $x^2 = a$  і значення  $\sqrt{a}$  буде існувати, якщо рівняння  $x^2 = a$  матиме розв'язок. Зобразивши графіки функцій  $y = x^2$  і  $y = a$  (рис. 79), бачимо, що пряма  $y = a$  перетинає графік функції  $y = x^2$  тільки при  $a \geq 0$  (причому при  $a > 0$  — у двох точках:  $x_1 = \sqrt{a}$  і  $x_2 = -\sqrt{a}$ , а при  $a = 0$  — тільки в одній точці  $x = 0$ ). Отже, при будь-яких значеннях  $a \geq 0$  існує значення  $\sqrt{a}$ , оскільки функція  $y = x^2$  набуває всіх значень із проміжку  $[0; +\infty)$ . ○

Розглянемо розв'язки рівняння  $x^n = a$  для парних значень  $n = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Рівняння  $x^2 = a$  при  $a < 0$  не має коренів, оскільки квадрат будь-якого числа не може бути від'ємним (на рисунку 79 пряма  $y = a$  при  $a < 0$  не перетинає графік функції  $y = x^2$ ). Так само **рівняння  $x^{2k} = a$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) при  $a < 0$  не має коренів** (оскільки парний степінь будь-якого числа не може бути від'ємним).

При  $a = 0$  **рівняння  $x^{2k} = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) має єдиний корінь  $x = 0$**  (оскільки парний степінь будь-якого відмінного від нуля числа — число додатне, тобто не рівне нулю, а  $0^{2k} = 0$ ).

При  $a > 0$  за означенням кореня  $2k$ -го степеня  $(\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ . Отже,  $x = \sqrt[2k]{a}$  — корінь рівняння  $x^{2k} = a$ . Але  $(-\sqrt[2k]{a})^{2k} = (\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ , тому  $x = -\sqrt[2k]{a}$  — теж корінь рівняння  $x^{2k} = a$ . Інших коренів це рівняння не має, оскільки властивості функції  $y = x^{2k}$  аналогічні властивостям функції  $y = x^2$ : при  $x \geq 0$  функція зростає, отже, значення  $a$  вона може набувати тільки при одному значенні аргументу ( $x = \sqrt[2k]{a}$ ). Аналогічно при  $x \leq 0$  функція  $y = x^{2k}$  спадає, тому значення  $a$  вона може набувати тільки при одному значенні аргументу ( $x = -\sqrt[2k]{a}$ ). Таким чином, **рівняння  $x^{2k} = a$  при  $a > 0$  має тільки два корені:  $x = \pm \sqrt[2k]{a}$** .

Наприклад, рівняння  $x^{10} = -1$  не має коренів, а рівняння  $x^6 = 5$  має корені  $x = \pm \sqrt[6]{5}$ .

**3. Властивості кореня  $n$ -го степеня можна обґрунтувати, спираючись на означення кореня  $n$ -го степеня.**

- 1) Формула  $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$  була обґрунтована в пункті 1 пояснень.

Обґрунтуємо інші формули, наведені в таблиці 17.

- Нагадаємо, що за означенням кореня  $n$ -го степеня для доведення рівності  $\sqrt[n]{A} = B$  (при  $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ) достатньо перевірити рівність  $B^n = A$ .

- 2) Вираз  $\sqrt[n]{a^n}$  розглянемо окремо при  $n = 2k + 1$  (непарне) і при  $n = 2k$  (парне).

Якщо  $n$  — непарне, то враховуємо те, що вираз  $\sqrt[n]{a^n}$  існує при будь-яких значеннях  $a$  і що знак  $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$  збігається зі знаком  $a$ . Тоді за означенням кореня  $n$ -го степеня одержуємо

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a.$$

Якщо  $n$  — парне, то враховуємо те, що вираз  $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$  позначає арифметичне значення кореня  $n$ -го степеня (отже,  $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geq 0$ ) і що  $|a|^{2k} = a^{2k}$ . Тоді

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

- 3) Формулу

$$\sqrt[k]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{при } a \geq 0$$

обґрунтуємо, розглядаючи її справа наліво. Оскільки

$$\left(\sqrt[k]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[k]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a, \quad \text{то за означенням } \sqrt[n]{a} = \sqrt[k]{\sqrt[k]{a}}.$$

- 4) Справедливість формули

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \quad \text{при } a \geq 0$$

впливає з рівності  $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$ .

- 5) Для обґрунтування формули

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad \text{при } a \geq 0, b \geq 0$$

використовуємо рівність  $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$ .

- 6) Для обґрунтування формули

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{при } a \geq 0, b > 0$$

використовуємо рівність  $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$ .

- 7) Властивість кореня

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \quad \text{при } a \geq 0$$

впливає з рівності  $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$ . ○

Наприклад,  $\sqrt[6]{8} = \sqrt[2^3]{2^3} = \sqrt{2}$  (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 3).

За допомогою формули  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ ) можна одержати важливі наслідки: формули винесення множника з-під знака кореня або внесення множника під знак кореня.

Дійсно, при  $a \geq 0, b \geq 0$   $\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b}$ . Розглядаючи одержану формулу зліва направо, маємо формулу винесення невід'ємного множника з-під знака кореня:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b},$$

а справа наліво — формулу внесення невід'ємного множника під знак кореня:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

Наприклад,  $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{32 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2 \sqrt[5]{3}$ .

- 8) Зазначимо ще одну властивість коренів  $n$ -го степеня: для будь-яких невід'ємних чисел  $a$  і  $b$

$$\text{якщо } a > b, \text{ то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

- Доведемо це методом від супротивного. Припустимо, що  $\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b}$ . Тоді при піднесенні обох частин останньої нерівності з невід'ємними членами до  $n$ -го степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність  $a \leq b$ . Це суперечить умові  $a > b$ . Отже, наше припущення неправильне і  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ . ○

Наприклад, урахувавши, що  $21 > 16$ , одержуємо  $\sqrt[4]{21} > \sqrt[4]{16}$ . Оскільки  $\sqrt[4]{16} = 2$ , маємо, що  $\sqrt[4]{21} > 2$ .

Узагальнення властивостей кореня  $n$ -го степеня<sup>1</sup>

Основна частина формул, які виражають властивості коренів  $n$ -го степеня, обґрунтована для невід'ємних значень підкореневих виразів. Але інколи доводиться виконувати перетворення виразів з коренями  $n$ -го степеня і в тому випадку, коли таких обмежень немає, наприклад добувати корінь квадратний (або в загальному випадку корінь парного степеня) з добутку  $ab$  від'ємних чисел ( $a < 0, b < 0$ ). Тоді  $ab > 0$  і  $\sqrt[2k]{ab}$  існує, проте формулою

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \quad (1)$$

скористатися не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень  $a$  і  $b$ . Але у випадку  $ab > 0$  маємо:  $ab = |ab| = |a| \cdot |b|$  і тепер  $|a| > 0$  та  $|b| > 0$ . Отже, для добування кореня з добутку  $|a| \cdot |b|$  можна використати формулу (1).

<sup>1</sup> Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Тоді при  $a < 0$ ,  $b < 0$  можемо записати:

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a| \cdot |b|} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}.$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , оскільки в цьому випадку  $|a| = a$  і  $|b| = b$ . Отже,

$$\text{при } ab \geq 0 \quad \sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}.$$

Аналогічно можна узагальнити властивість 6.

$$\text{При } \frac{a}{b} \geq 0 \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}$$

Слід зазначити, що в тих випадках, коли обґрунтування основних формул можна повторити і для від'ємних значень  $a$  і  $b$ , такими формулами можна користуватися для будь-яких  $a$  і  $b$  (з ОДЗ лівої частини формули).

Наприклад, для коренів непарного степеня для будь-яких значень  $a$  і  $b$

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}. \quad (2)$$

Дійсно, ліва і права частини цієї формули існують при будь-яких значеннях  $a$  та  $b$  і виконується рівність

$$\left(\sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab.$$

Тоді за означенням кореня  $(2k + 1)$ -го степеня виконується і рівність (2).

Наприклад,  $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{b} = a^5 \sqrt[3]{b}$  при будь-яких значеннях  $a$  і  $b$ .

Але деякими формулами не вдається скористатися для довільних значень  $a$  і  $b$ . Наприклад, якщо ми за основною властивістю кореня запишемо, що  $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$  (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 2), то одержана рівність не є тотожністю, оскільки при  $a = -1$  (ліва і права частини цієї рівності означені при всіх значеннях  $a$ ) маємо  $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$ , тобто  $1 = -1$  — неправильну рівність.

Таким чином, при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на парне натуральне число потрібно узагальнити основну властивість кореня. Для цього достатньо помітити, що  $a^2 = |a|^2$ , і тепер основа степеня підкореневого виразу  $|a| \geq 0$ , а отже, можна використати основну формулу (властивість 7):  $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}$ .

У загальному випадку, якщо при використанні основної властивості кореня доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число, то в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем, тобто



$$\sqrt[2kn]{a^{2km}} = \sqrt[n]{|a|^m}.$$

Аналогічно можна обґрунтувати й інші приклади використання основних властивостей коренів при довільних значеннях  $a$  і  $b$  (з ОДЗ лівої частини формули), які наведено в таблиці 18.

Таблиця 18

Основні формули для кореня $n$ -го степеня (тільки для невід'ємних значень $a$ і $b$ , тобто $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$ )	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких $a$ і $b$ з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$	<i>можна</i>	<i>тільки для невід'ємних <math>a</math></i>
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	<i>можна</i>	$\sqrt[2k]{a^{2k}} =  a $
3. Корінь із кореня $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	<i>можна</i>	<i>можна</i>
4. Корінь із добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ ----- і добуток коренів $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	<i>можна</i>	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{ a }\sqrt[2k]{ b }$
		<i>можна</i>
5. Корінь із частки $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ( $b \neq 0$ ) ----- і частка коренів $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	<i>можна</i>	$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{ a }}{\sqrt[2k]{ b }}$
		<i>можна</i>
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ і навпаки ----- $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід <i>непарний</i> → <i>непарний</i> )	Перехід <i>парний</i> → <i>парний</i> <i>можна</i> ----- Перехід <i>непарний</i> → <i>парний</i> $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m \geq 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} & \text{при } a^m < 0 \end{cases}$ ----- $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{ a^m }$

Основні формули для кореня $n$ -го степеня (тільки для невід'ємних значень $a$ і $b$ , тобто $\left. \begin{matrix} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{matrix} \right\}$ )	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких $a$ і $b$ з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дано узагальнену формулу)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}$	<i>можна</i>	$\sqrt[n]{a^n b} =  a  \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	<i>можна</i>	$a \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & \text{при } a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, & \text{при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geq 0$

Зауваження. Під терміном «перехід», який використано в таблиці 18, слід розуміти перехід у відповідній формулі від кореня  $n$ -го степеня до кореня  $m$ -го степеня.

Якщо  $n$  і  $m$  обидва парні, то такий перехід коротко охарактеризовано як «перехід парний  $\rightarrow$  парний» (типу  $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a^4}$ ).

Якщо  $n$  і  $m$  обидва непарні, то в таблиці записано, що виконано «перехід непарний  $\rightarrow$  непарний» (типу  $\sqrt[15]{a^9} = \sqrt[5]{a^3}$ ).

Якщо  $n$  — непарне число, а  $m$  — парне число, то в таблиці говориться, що виконано «перехід непарний  $\rightarrow$  парний» (типу  $\sqrt[5]{(-2)^3} = -\sqrt[10]{(-2)^6}$ ).

Таким чином, якщо за умовою завдання на перетворення виразів із коренями  $n$ -го степеня (іраціональних виразів) відомо, що всі букви (які входять до запису заданого виразу) невід'ємні, то для перетворення цього виразу можна користуватися основними формулами, а якщо такої умови немає, то необхідно аналізувати ОДЗ заданого виразу і тільки після цього вирішувати, якими формулами користуватися — основними чи узагальненими.

**4. Функція  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ) та її графік.** Характеризуючи властивості функцій, найчастіше виділяють такі їх характеристики: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) точки перетину з осями координат; 5) проміжки знакосталості; 6) проміжки зростання і спадання<sup>1</sup>; 7) найбільше і найменше значення функції.

<sup>1</sup> Проміжки зростання і спадання функції інколи називають проміжками монотонності функції.

Розглянемо властивості функції  $y = \sqrt[n]{x}$ . Оскільки деякі властивості коренів непарного степеня не збігаються з властивостями коренів парного степеня, то для відповідних випадків ці корені будемо розглядати окремо.

Якщо  $n$  — непарне ( $n = 2k + 1$ ,  $k \in N$ ):

1. *Область визначення.* При непарних значеннях  $n$  ( $n = 2k + 1$ ,  $k \in N$ ) корінь непарного степеня з числа  $x$  існує при будь-яких значеннях  $x$ , тому область визначення функції  $y = \sqrt[2k+1]{x}$  є всі дійсні числа:

$$D(\sqrt[2k+1]{x}) = \mathbf{R}.$$

2. При непарних значеннях  $n$  функція *непарна*, оскільки  $\sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x}$ , отже, *графік функції  $y = \sqrt[2k+1]{x}$  симетричний відносно початку координат.*

3. Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = 0$ , то *графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  завжди проходить через початок координат* (інших точок перетину з осями координат немає: при  $y = 0$  з рівняння  $\sqrt[n]{x} = 0$  знову одержуємо тільки  $x = 0$ ).

4. *На всій області визначення функція  $y = \sqrt[n]{x}$  зростає.* Справді, для невід'ємних значень  $x_1$  і  $x_2$  за властивістю 8, якщо  $x_1 > x_2$ , то  $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$ , а це означає, що функція зростає при невід'ємних значеннях  $x$ . Отже, при парному значенні  $n$  функція дійсно зростає на всій області визначення. Для непарного значення  $n$  достатньо врахувати, що графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  симетричний відносно початку координат, і, відображуючи графік зростаючої при  $x \geq 0$  функції, знову одержати графік зростаючої функції (див. нижче).

5. Для того щоб знайти *область значень* функції  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in N$ ,  $n \geq 2$ ), складемо рівняння

$$\sqrt[n]{x} = a.$$

Якщо  $n$  — парне ( $n = 2k$ ,  $k \in N$ ):

1. *Область визначення.* При парних значеннях  $n$  ( $n = 2k$ ,  $k \in N$ ) корінь парного степеня з числа  $x$  існує тільки при  $x \geq 0$ , тому область визначення функції  $y = \sqrt[2k]{x}$  є множина невід'ємних чисел:

$$D(\sqrt[2k]{x}) = [0; +\infty).$$

2. При парних значеннях  $n$  функція *ні парна, ні непарна* (тому що її область визначення несиметрична відносно початку координат).

Якщо  $n$  — непарне, то вираз  $\sqrt[n]{x}$  набуває як невід'ємних, так і від'ємних значень, і рівняння  $\sqrt[n]{x} = a$  при будь-якому  $a$  за означенням кореня  $n$ -го степеня має корінь  $x = a^n$ . Отже, для непарних  $n$  множина значень складається з усіх дійсних чисел:  $E(\sqrt[n]{x}) = \mathbf{R}$ . Тому найменшого і найбільшого значень функція  $y = \sqrt[n]{x}$  не має.

**6. Проміжки знакосталості:**

при  $x > 0$  значення  $y > 0$  (оскільки в цьому випадку  $y = \sqrt[n]{x}$  — арифметичне значення кореня), а при  $x < 0$  значення  $y < 0$  (оскільки корінь непарного степеня з від'ємного числа є числом від'ємним).

Якщо  $n$  — парне, то вираз  $\sqrt[n]{x}$  позначає арифметичне значення кореня ( $\sqrt[n]{x} \geq 0$ ), тому рівняння  $\sqrt[n]{x} = a$  має корінь тільки при  $a \geq 0$ . Тоді для всіх  $a \geq 0$  маємо  $x = a^n$ . Отже, для парних  $n$  множина значень складається з усіх невід'ємних чисел:  $E(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty)$ .

Тому найбільшого значення функція  $y = \sqrt[n]{x}$  не має, а найменшого —  $y = 0$  — набуває при  $x = 0$ .

**6. Проміжки знакосталості:**

при  $x > 0$  значення  $y > 0$  (оскільки  $y = \sqrt[n]{x}$  — арифметичне значення кореня).

Значимо також, що при  $x = 1$  маємо  $y = 1$ , отже, графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  завжди проходить через точку  $(1; 1)$ .

Наведене дослідження дозволяє побудувати графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  для непарних (рис. 80) і парних (рис. 81) значень  $n$ .

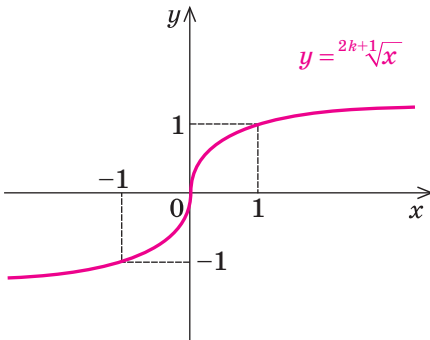


Рис. 80

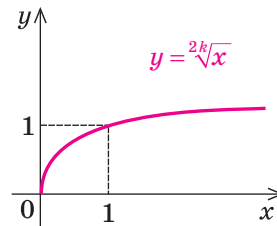


Рис. 81

На рисунку 82 в одній і тій самій системі координат зображено графіки функцій  $y = \sqrt[3]{x}$  та  $y = \sqrt[5]{x}$  і для порівняння графік функції  $y = x$ .

Зауважимо, що графік функції  $y = \sqrt[n]{x}$  можна побудувати, використовуючи графік функції  $y = x^n$ . Наприклад, функцію  $y = \sqrt[3]{x}$  можна розглядати як обернену до функції  $y = x^3$ , а отже, побудувати її графік (рис. 83) як криву, симетричну кубічній параболі  $y = x^3$  відносно прямої  $y = x$ . Аналогічно в пункті 2.4, використовуючи праву вітку параболи  $y = x^2$ , було побудовано графік функції  $y = \sqrt{x}$  (рис. 50, с. 65).

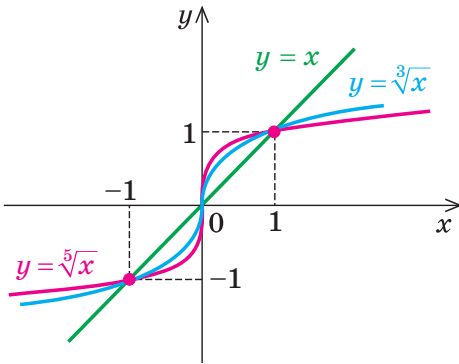


Рис. 82

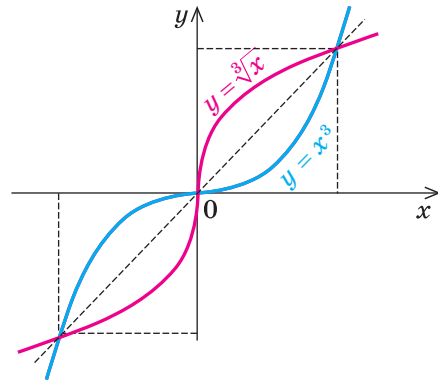


Рис. 83

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Знайдіть значення виразу:

- 1)  $\sqrt[4]{625}$ ;      2)  $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ ;      3)  $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$ .

#### Розв'язання

- 1) ►  $\sqrt[4]{625} = 5$ , оскільки  $5^4 = 625$ . ◀  
 2) ►  $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$ , оскільки  $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$ ; ◀  
 3) ►  $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3}$ , оскільки  $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$ . ◀

#### Коментар

Використаємо означення кореня  $n$ -го степеня. Запис  $\sqrt[n]{a} = b$  означає, що  $b^n = a$ .

**Приклад 2** Знайдіть значення виразу:

- 1)  $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$ ;      2)  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ .

#### Коментар

Використаємо властивості кореня  $n$ -го степеня і врахуємо, що кожену формулу, яка виражає ці властивості, можна застосувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання 1

скористаємося формулою  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ , а для розв'язування завдання 2 — цією самою формулою, але записаною справа наліво, тобто:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (\text{при } a \geq 0, b \geq 0).$$

*Розв'язання*

1)  $\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 15; <$

2)  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2 \cdot 8} = \sqrt[4]{16} = 2. <$

**Приклад 3** Порівняйте числа:

1)  $\sqrt[4]{50}$  і  $\sqrt{7}$ ; 2)  $\sqrt[4]{3}$  і  $\sqrt[3]{3}$ .

*Розв'язання*

*Коментар*

1)  $\sqrt{7} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt[4]{49}$ . Оскільки  $50 > 49$ ,

то  $\sqrt[4]{50} > \sqrt[4]{49}$ , тобто  $\sqrt[4]{50} > \sqrt{7}; <$

2)  $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$ ,  $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ .

Оскільки  $27 < 81$ , то  $\sqrt[12]{27} < \sqrt[12]{81}$ ,

тобто  $\sqrt[4]{3} < \sqrt[3]{3}. <$

Для порівняння заданих чисел у кожному завданні достатньо привести всі корені до одного показника кореня і врахувати, що для будь-яких невід'ємних чисел  $a$  і  $b$ , якщо  $a > b$ , то  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ .

**Приклад 4** Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня  $n$ -го степеня:

1)  $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$ ;      2)  $\frac{4}{\sqrt{5+1}}$ ;      3\*)  $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$ .

*Коментар*

У завданні 1 урахуємо, що  $\sqrt[5]{3^5} = 3$ , отже, після множення чисельника і знаменника заданого дробу на  $\sqrt[5]{3^4}$  знаменник можна буде записати без знака радикала. У завданні 2 достатньо чисельник і знаменник заданого дробу домножити на різницю  $\sqrt{5} - 1 \neq 0$  (щоб одержати в знаменнику формулу різниці квадратів).

Але виконання аналогічного перетворення в завданні 3 пов'язане з певними проблемами. ОДЗ виразу  $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$  є  $a \geq 0$  (і всі тотожні перетво-

рення потрібно виконувати для всіх значень  $a \geq 0$ ). Ми хочемо домножити чисельник і знаменник заданого дробу на вираз  $\sqrt{a} - 1$ . За основною властивістю дробу це можна зробити тільки для випадку, коли  $\sqrt{a} - 1 \neq 0$ , тобто тільки при  $a \neq 1$ . Але  $a = 1$  входить до ОДЗ початкового виразу, і тому вибраний нами спосіб розв'язування приведе до звуження ОДЗ початкового виразу. Дійсно, якщо записати, що

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1},$$

то ця рівність не є тотожністю, оскільки не виконується для  $a = 1$  з ОДЗ початкового виразу. У цьому разі, щоб не припуститися помилок, можна користуватися таким орієнтиром: якщо для тотожних перетворень (чи для розв'язування рівнянь і нерівностей) доводиться використовувати перетворення (чи формули), які призводять до звуження ОДЗ початкового виразу, то значення, на які звужується ОДЗ заданого виразу, слід розглянути окремо.

### Розв'язання

$$1) \blacktriangleright \frac{1}{\sqrt[5]{3}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{3} \cdot \triangleleft$$

$$2) \blacktriangleright \frac{4}{\sqrt{5}+1} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{4(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}-1. \triangleleft$$

$$3) \blacktriangleright \text{Позначимо } A = \frac{1}{\sqrt{a+1}}. \text{ Тоді при } a = 1 \text{ одержуємо } A = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{При } a \neq 1 \ (a \geq 0) \text{ маємо } A = \frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}.$$

Відповідь: при  $a = 1$   $A = \frac{1}{2}$ , при  $a \neq 1$  ( $a \geq 0$ )  $A = \frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$   
(тобто відповідь не можна записати однозначно).  $\triangleleft$

**Приклад 5** Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}; \quad 2) \frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} \text{ при } a > 0 \text{ і } b > 0; \quad 3^*) \frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}.$$

### Розв'язання

1) I спосіб

$$\blacktriangleright \frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{(\sqrt[6]{a})^2 - (\sqrt[6]{b})^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}. \triangleleft$$

II спосіб

$\blacktriangleright$  Позначимо  $\sqrt[6]{a} = x$ ,  $\sqrt[6]{b} = y$ , де  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . Тоді  $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2 = x^2$

і  $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2 = y^2$ . Отже,

$$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y = \sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}. \triangleleft$$

### Коментар

У завданні 1 ОДЗ заданого виразу:  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b} \neq 0$ . Для невід'ємних значень  $a$  і  $b$  ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як зліва направо, так і справа наліво).

При  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  можна записати:  $\sqrt[3]{a} = (\sqrt[6]{a})^2$  і  $\sqrt[3]{b} = (\sqrt[6]{b})^2$ . Тоді чисельник заданого дроби можна розкласти як різницю квадратів. Для того щоб виділити в чисельнику різницю квадратів, можна також виконати заміну  $\sqrt[6]{a} = x$ ;  $\sqrt[6]{b} = y$ .

$$2) \triangleright \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \triangleleft$$

$$3) \triangleright \text{Позначимо } A = \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}.$$

При  $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$  (і  $b + \sqrt{ab} \neq 0$ ) маємо:

$$A = \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2 + \sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}. \triangleleft$$

При  $\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$  (і  $b + \sqrt{ab} \neq 0$ ) маємо:

$$A = \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{-(-a) + \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b) + \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}} = \frac{-\sqrt{a} + \sqrt{a}\sqrt{b}}{-\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{-\sqrt{a}(\sqrt{b} - 1)}{-\sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)} = \frac{-\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Відповідь:

$$1) \text{ при } a \geq 0 \text{ і } b > 0 \quad A = \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$2) \text{ при } a \leq 0 \text{ і } b < 0 \text{ (з ОДЗ)} \quad A = \sqrt{\frac{a}{b}}. \triangleleft$$

У завданні 2 за даної умови  $a > 0$  і  $b > 0$ , тому ми маємо право скористатися всіма основними формулами перетворення коренів. Тоді

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a = (\sqrt{a})^2, \quad b = (\sqrt{b})^2.$$

У завданні 3 ОДЗ заданого виразу:  $ab \geq 0$ ,  $b + \sqrt{ab} \neq 0$ . Але  $ab \geq 0$

при  $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$  або  $\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$ . При  $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$

ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як у завданні 2).

При  $\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$  доведеться вико-

ристати узагальнену формулу

$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$  і врахувати, що при

$a \leq 0$  одержуємо  $(-a) \geq 0$ . Тоді можна

записати:  $a = -(-a) = -(\sqrt{-a})^2$ .

Аналогічно при  $b \leq 0$  можна записати

$b = -(-b) = -(\sqrt{-b})^2$ . Також слід

врахувати, що при  $a \leq 0$  і  $b \leq 0$  маємо:

$$|a| = -a \quad |b| = -b.$$

Записуючи відповідь, доцільно взяти до уваги, що  $b = 0$  не входить до

ОДЗ заданого виразу.

**Приклад 6\*** Спростіть вираз  $\sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}}$ .

*Коментар*

В умові не сказано про те, що значення  $a$  невід'ємні, тому доведеться спочатку визначити ОДЗ заданого виразу.

Вираз  $\sqrt[3]{a^2}$  існує при будь-яких значеннях  $a$  і є невід'ємним. Вираз  $a^4$  також існує і невід'ємний при будь-яких значеннях  $a$ . Отже, при будь-яких значеннях  $a$  під знаком квадратного кореня буде міститися невід'ємний вираз  $a^4 \sqrt[3]{a^2}$ , тобто заданий вираз існує при будь-



яких значеннях  $a$  (ОДЗ: будь-яке  $a \in \mathbf{R}$ ), і його перетворення потрібно виконати на всій ОДЗ.

Можливими є декілька шляхів перетворення заданого виразу, наприклад: 1) спочатку розглянути корінь квадратний із добутку, а потім скористатися формулою кореня з кореня і основною властивістю кореня; 2) внести вираз  $a^4$  під знак кубічного кореня, а потім теж використати формулу кореня з кореня і основну властивість кореня. На кожному з цих шляхів ураховуємо, що при будь-яких значеннях  $a$  значення  $a^2 \geq 0$  і  $a^4 \geq 0$  (а значить, для цих виразів можна користуватися основними формулами). Використовуючи основну властивість кореня, доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число 2. Тому в результаті основу степеня підкореневого виразу потрібно брати за модулем (оскільки  $a \in \mathbf{R}$ ).

#### Розв'язання

##### I спосіб

$$\blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2 \sqrt[6]{a^2} = a^2 \sqrt[6]{|a|^2} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft$$

##### II спосіб

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} &= \sqrt{\sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} = \sqrt[3]{|a|^6 \cdot |a|} = \\ &= \sqrt[3]{|a|^6} \sqrt[3]{|a|} = |a|^2 \sqrt[3]{|a|} = a^2 \sqrt[3]{|a|}. \triangleleft \end{aligned}$$

### Запитання для контролю

1. Дайте означення кореня  $n$ -го степеня з числа  $a$ . Наведіть приклади.
2. Дайте означення арифметичного кореня  $n$ -го степеня з числа  $a$ . Наведіть приклади.
3. При яких значеннях  $a$  існують вирази  $\sqrt[2k]{a}$  та  $\sqrt[2k+1]{a}$  ( $k \in \mathbf{N}$ )?
4. Запишіть властивості кореня  $n$ -го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
- 5\*. Доведіть властивості кореня  $n$ -го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
- 6\*. Якими властивостями кореня  $n$ -го степеня можна користуватися при довільних значеннях букв (з ОДЗ лівої частини відповідної формули)? Наведіть приклади використання основних формул та їх узагальнень.
7. При яких значеннях  $a$  має корені рівняння:
  - 1)  $x^{2k+1} = a$  ( $k \in \mathbf{N}$ );
  - 2)  $x^{2k} = a$  ( $k \in \mathbf{N}$ ).
8. Запишіть усі розв'язки рівняння:
  - 1)  $x^{2k+1} = a$  ( $k \in \mathbf{N}$ );
  - 2)  $x^{2k} = a$  ( $k \in \mathbf{N}$ ): а) при  $a > 0$ ; б) при  $a < 0$ ; в) при  $a = 0$ .
 Наведіть приклади таких рівнянь і розв'яжіть їх.

9. Побудуйте графік функції  $y = \sqrt[2k]{x}$ , де  $k \in N$ , та сформулюйте її властивості.
10. Побудуйте графік функції  $y = \sqrt[2k+1]{x}$ , де  $k \in N$ , та сформулюйте її властивості.
- 11\*. Обґрунтуйте властивості функції  $y = \sqrt[n]{x}$  ( $n \in N, n \geq 2$ ):  
 1) для непарного значення  $n$ ;                      2) для парного значення  $n$ .

### Вправи

1. Перевірте правильність рівності:

- 1°)  $\sqrt[3]{64} = 4$ ;                      2°)  $\sqrt[9]{-1} = -1$ ;                      3)  $\sqrt[10]{1024} = 2$ ;  
 4°)  $\sqrt[25]{0} = 0$ ;                      5°)  $\sqrt[5]{-32} = -2$ ;                      6°)  $\sqrt[13]{1} = 1$ .

2°. Обчисліть:

- 1)  $\sqrt[3]{-8}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ ;                      3)  $\sqrt[13]{-1}$ ;  
 4)  $\sqrt[5]{32}$ ;                      5)  $\sqrt[3]{125}$ ;                      6)  $\sqrt[4]{81}$ .

Знайдіть значення виразу (3–7).

3. 1°)  $\sqrt[3]{8 \cdot 1000}$ ;                      2°)  $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ ;                      3)  $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$ ;                      4)  $\sqrt[5]{48 \cdot 81}$ .  
 4. 1)  $\sqrt[5]{9 \cdot \sqrt[5]{27}}$ ;                      2)  $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{500}}$ ;                      3)  $\sqrt[7]{8 \cdot \sqrt[7]{-16}}$ ;                      4)  $\sqrt[4]{5 \cdot \sqrt[4]{125}}$ .  
 5. 1)  $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$ ;                      2)  $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$ ;                      3)  $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$ ;                      4)  $\frac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$ .  
 6°. 1)  $\sqrt[3]{7^3 \cdot 11^3}$ ;                      2)  $\sqrt[6]{2^6 \cdot 3^6}$ ;                      3)  $\sqrt[7]{3^7 \cdot 5^7}$ ;                      4)  $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 10^5}$ .  
 7°. 1)  $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^{15}}$ ;                      2)  $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$ ;                      3)  $\sqrt[4]{(0,1)^4 \cdot 3^8}$ ;                      4)  $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30} \cdot 6^{20}}$ .

8. Порівняйте числа:

- 1°)  $\sqrt[9]{0,1}$  і 0;                      2°)  $\sqrt[11]{1,3}$  і 1;                      3)  $\sqrt[4]{23}$  і  $\sqrt{5}$ ;                      4)  $\sqrt[5]{4}$  і  $\sqrt[3]{3}$ .

9°. При яких  $x$  має зміст вираз:

- 1)  $\sqrt[5]{5x+1}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{2x-6}$ ;                      3)  $\sqrt[6]{x+2}$ ;                      4)  $\sqrt[8]{\frac{5}{x}}$ .

10. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня  $n$ -го степеня:

- 1)  $\frac{3}{\sqrt[7]{2}}$ ;                      2)  $\frac{4}{\sqrt[7]{-1}}$ ;                      3\*)  $\frac{1}{\sqrt{a+3}}$ ;                      4\*)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x+1}}}$ .

11. Винесіть множник за знак кореня ( $a > 0, b > 0$ ):

- 1)  $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$ ;                      2)  $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$ ;                      3)  $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$ ;                      4)  $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$ .

12\*. Винесіть множник за знак кореня:

1)  $\sqrt[4]{a^4 b^{14}}$ ;      2)  $\sqrt[7]{a^9 b^8}$ ;      3)  $\sqrt[6]{64 a^{12} b^7}$ ;      4)  $\sqrt[8]{a^{17} b^9}$ .

13. Внесіть множник під знак кореня ( $a > 0, b > 0$ ):

1)  $a\sqrt[3]{7}$ ;      2)  $-b\sqrt[4]{ab}$ ;      3)  $ab\sqrt[7]{5}$ ;      4)  $ab^2\sqrt[6]{\frac{a}{b^{11}}}$ .

14\*. Внесіть множник під знак кореня:

1)  $a\sqrt[4]{7}$ ;      2)  $a^3\sqrt[7]{ab}$ ;      3)  $ab\sqrt[6]{\frac{2b}{a^5}}$ ;      4)  $-b\sqrt[8]{-3b^3}$ .

15. Спростіть вираз:

1)  $\sqrt[8]{a^8}$  при  $a < 0$ ;      2)  $\sqrt[5]{a^5}$  при  $a < 0$ ;  
 3)  $\sqrt[4]{a^4} - \sqrt[3]{a^3}$  при  $a > 0$ ;      4)  $\sqrt[7]{a^7} + \sqrt[6]{a^6}$  при  $a < 0$ .

16\*. Спростіть вираз:

1)  $\sqrt[4]{2ab^3} \cdot \sqrt[4]{16a^3b^5}$ ;      2)  $\sqrt[6]{ab^3c} \cdot \sqrt[6]{a^5b^4c} \cdot \sqrt[6]{b^5c^4}$ ;  
 3)  $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$ ;      4)  $\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{3a^5\sqrt[2]{2a^2}}}$ .

17. Спростіть вираз:

1)  $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}$ ;      2)  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$ ;  
 3\*)  $\frac{\sqrt[3]{ab^2} - 2\sqrt[6]{ab^5} + b}{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt{ab}}$ , де  $a > 0, b > 0, a \neq b$ ;      4\*)  $\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[6]{xy}}$ .

18°. Розв'яжіть рівняння:

1)  $x^3 = 7$ ;      2)  $x^6 = 3$ ;      3)  $x^5 = -5$ ;  
 4)  $x^8 = -13$ ;      5)  $x^4 = 16$ ;      6)  $x^3 = -64$ .

19. Побудуйте графік функції:

1°)  $y = \sqrt[4]{x}$ ;      2°)  $y = \sqrt[5]{x}$ ;      3°)  $y = \sqrt[7]{x}$ ;      4°)  $y = \sqrt[6]{x}$ ;  
 5)  $y = \sqrt[3]{|x|}$ ;      6)  $y = -\sqrt[3]{x}$ ;      7)  $y = \sqrt[4]{-x}$ .

20. Розв'яжіть графічно рівняння:

1)  $\sqrt[3]{x} = 2 - x$ ;      2)  $\sqrt{x} = 6 - x$ ;      3)  $\sqrt[3]{x-2} = 4 - x$ ;      4)  $\sqrt{-x} = x + 2$ .

Перевірте підстановкою, що значення  $x$  дійсно є коренем рівняння.

21\*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 20, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

## § 11 ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Таблиця 19

Поняття ірраціонального рівняння	
Рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня, називають <i>ірраціональними</i> . Для того щоб розв'язати задане ірраціональне рівняння, його найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.	
Розв'язування ірраціональних рівнянь	
1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня	
При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ)	При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюють перевіркою
<p><b>Приклад 1</b></p> <p>Розв'яжіть рівняння <math>\sqrt[3]{x-1} = 2</math>.</p> <p>▶ <math>(\sqrt[3]{x-1})^3 = 2^3</math>,</p> <p><math>x - 1 = 8</math>,</p> <p><math>x = 9</math>.</p> <p>Відповідь: 9. ◀</p>	<p><b>Приклад 2</b></p> <p>Розв'яжіть рівняння <math>\sqrt{2x+3} = x</math>.</p> <p>▶ <math>(\sqrt{2x+3})^2 = x^2</math>,</p> <p><math>x^2 - 2x - 3 = 0</math>, <math>x_1 = -1</math>, <math>x_2 = 3</math>.</p> <p>Перевірка. При <math>x = -1</math> маємо: <math>\sqrt{1} = -1</math> — неправильна рівність, отже, <math>x = -1</math> — сторонній корінь.</p> <p>При <math>x = 3</math> маємо: <math>\sqrt{9} = 3</math> — правильна рівність, отже, <math>x = 3</math> — корінь заданого рівняння.</p> <p>Відповідь: 3. ◀</p>
2. За допомогою заміни змінних	
Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)	
<p><b>Приклад 3</b></p> <p>Розв'яжіть рівняння <math>\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 2</math>.</p> <p>▶ Позначимо <math>\sqrt[3]{x} = t</math>. Тоді <math>\sqrt[3]{x^2} = (\sqrt[3]{x})^2 = t^2</math>.</p> <p>Одержуємо рівняння: <math>t^2 + t = 2</math>, <math>t^2 + t - 2 = 0</math>, <math>t_1 = 1</math>, <math>t_2 = -2</math>.</p> <p>Виконуємо обернену заміну: <math>\sqrt[3]{x} = 1</math>, тоді <math>x = 1</math> або <math>\sqrt[3]{x} = -2</math>, звідси <math>x = -8</math>.</p> <p>Відповідь: 1; -8. ◀</p>	

### Пояснення й обґрунтування

Ірраціональними рівняннями називають такі рівняння, у яких змінна міститься під знаком кореня. Наприклад,  $\sqrt{x-2}=5$ ,  $\sqrt[3]{x}+x=2$  — ірраціональні рівняння.

Найчастіше розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на зведенні заданого рівняння за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, цього досягають піднесенням обох частин ірраціонального рівняння до одного й того самого степеня (часто декілька разів).

Слід ураховувати, що

**при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).**

Наприклад, рівняння  $\sqrt[3]{x+7}=3$  (1)

рівносильне рівнянню  $(\sqrt[3]{x+7})^3=3^3$ , (2)

тобто рівнянню  $x+7=27$ . Звідси  $x=20$ .

Для того щоб обґрунтувати рівносильність рівнянь (1) і (2), достатньо звернути увагу на те, що рівності  $A=B$  і  $A^3=B^3$  можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція  $y=t^3$  є зростаючою (на рисунку 84 наведено її графік) і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу  $t$ . Отже, усі корені рівняння (1) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (2), і навпаки, усі корені рівняння (2) будуть коренями рівняння (1). А це й означає, що рівняння (1) і (2) є рівносильними. Аналогічно можна обґрунтувати рівносильність відповідних рівнянь і у випадку піднесення обох частин рівняння до одного й того самого довільного непарного степеня.

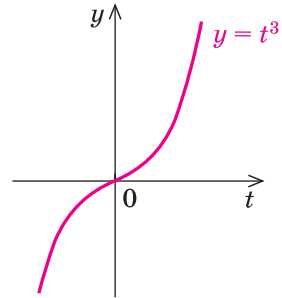


Рис. 84

**Якщо для розв'язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок** — коли всі корені першого рівняння будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, що не задовольняють заданому рівнянню. Такі корені називають *сторонніми* для заданого рівняння. Щоб з'ясувати, чи є одержані числа коренями заданого рівняння, виконують перевірку цих розв'язків.

Наприклад, для розв'язування рівняння

$$\sqrt{x} = 2 - x \quad (3)$$

піднесемо обидві його частини до квадрата і одержимо рівняння

$$(\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2. \quad (4)$$

Ураховуючи, що  $(\sqrt{x})^2 = x$ , маємо  $x = 4 - 4x + x^2$ , тобто  $x^2 - 5x + 4 = 0$ . Звідси  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ .

Виконуємо перевірку. При  $x = 1$  рівняння (3) перетворюється на правильну рівність  $\sqrt{1} = 2 - 1$ ,  $1 = 1$ . Отже,  $x = 1$  є коренем рівняння (3).

При  $x = 4$  одержуємо неправильну рівність  $\sqrt{4} = 2 - 4$ ;  $2 \neq -2$ . Отже,  $x = 4$  — сторонній корінь рівняння (3). Тобто до відповіді потрібно записати тільки  $x = 1$ .

Поява стороннього кореня пов'язана з тим, що рівність  $A^2 = B^2$  можна одержати при піднесенні до квадрата обох частин рівності  $A = B$  або рівності  $A = -B$ . Отже, виконання рівності  $A^2 = B^2$  ще не гарантує виконання рівності  $A = B$ . Іншими словами, корені рівняння (4) не обов'язково є коренями рівняння (3) (проте кожен корінь рівняння (3) є коренем рівняння (4), оскільки при виконанні рівності  $A = B$  обов'язково виконується і рівність  $A^2 = B^2$ ).

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4$ .

#### Розв'язання

#### Коментар

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & \sqrt{5x-1} = 4 - \sqrt{x+3}, \\ & (\sqrt{5x-1})^2 = (4 - \sqrt{x+3})^2, \\ & 5x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3, \\ & 8\sqrt{x+3} = 20 - 4x; \quad 2\sqrt{x+3} = 5 - x, \\ & (2\sqrt{x+3})^2 = (5 - x)^2, \\ & 4(x + 3) = 25 - 10x + x^2, \\ & x^2 - 14x + 13 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 13. \end{aligned}$$

*Перевірка.*  $x = 1$  — корінь  $(\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4, 4 = 4)$ ;  $x = 13$  — сторонній корінь  $(\sqrt{16} + \sqrt{64} \neq 4)$ .

*Відповідь:* 1. ◀

Ізолюємо один корінь і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — таким чином ми позбудемося одного кореня.

Потім знову ізолюємо корінь і знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — унаслідок одержимо квадратне рівняння.

Оскільки при піднесенні до квадрата можна одержати сторонні корені, то в кінці виконаємо перевірку отриманих розв'язків.

**Приклад 2** Розв'яжіть рівняння  $\frac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2$ .

*Розв'язання*

- Нехай  $\sqrt{6-x} = t$ , де  $t > 0$ .  
 Одержуємо  $\frac{8}{t} - t = 2$ .  
 Тоді  $t^2 + 2t - 8 = 0$ .  
 Звідси  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = -4$ .  
 $t_1 = 2$  — задовольняє умові  $t > 0$ ;  
 $t_2 = -4$  — не задовольняє умові  $t > 0$ .

Обернена заміна дає:

$$\begin{aligned}\sqrt{6-x} &= 2, \\ 6-x &= 4, \\ x &= 2.\end{aligned}$$

Відповідь: 2. ◀

*Коментар*

Якщо в задане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді ( $\sqrt{6-x}$ ), то зручно цей вираз із змінною позначити однією буквою — новою змінною ( $\sqrt{6-x} = t$ ).

Якщо зафіксувати обмеження  $t > 0$  (арифметичне значення  $\sqrt{6-x} \geq 0$  і в знаменнику не може стояти 0), то в результаті заміни і зведення одержаного рівняння до квадратного виконуватимуться рівносильні перетворення заданого рівняння.

Можна було б не фіксувати обмеження  $t > 0$ , але тоді в результаті перетворень отримаємо рівняння-наслідки й одержані розв'язки слід перевірити.

**Приклад 3\*** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ .

*Розв'язання*

- Нехай  $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = u, \\ \sqrt{x+1} = v. \end{cases}$  Тоді  $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$   
 Одержуємо систему  $\begin{cases} u+v=3, \\ u^3-v^2=-3. \end{cases}$

З першого рівняння знаходимо  $v = 3 - u$  і підставляємо в друге рівняння.

$$\begin{aligned}u^3 - (3-u)^2 &= -3, \\ u^3 - (9-6u+u^2) &= -3, \\ u^3 - u^2 + 6u - 6 &= 0, \\ u^2(u-1) + 6(u-1) &= 0, \\ (u-1)(u^2+6) &= 0.\end{aligned}$$

Ураховуючи, що  $u^2 + 6 \neq 0$ , одержуємо  $u = 1$ . Тоді  $v = 2$ .

*Коментар*

Деякі ірраціональні рівняння, що містять кілька коренів  $n$ -го степеня, можна звести до систем раціональних рівнянь, замінивши кожен корінь новою змінною.

Після заміни  $\sqrt[3]{x-2} = u$ ,  $\sqrt{x+1} = v$  із заданого рівняння отримуємо тільки одне рівняння  $u + v = 3$ . Для того щоб одержати друге рівняння, запишемо за означенням кореня  $n$ -го степеня  $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$  Віднімемо від першої рівності другу (щоб позбутися змінної  $x$ )

Маємо систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-2}=1, \\ \sqrt{x+1}=2. \end{cases}$$

З першого рівняння  $x = 3$ , що задовольняє і другому рівнянню.

**Відповідь:** 3.  $\triangleleft$

і одержимо ще один зв'язок між  $u$  і  $v$ :  $u^3 - v^2 = -3$ .

Одержану систему рівнянь розв'язуємо методом підстановки.

Слід звернути увагу на те, що, виконуючи обернену заміну, необхідно з'ясувати, чи існує значення  $x$ , яке задовольняє обом співвідношенням заміни.

При розв'язуванні систем рівнянь, що містять ірраціональні рівняння, найчастіше використовують традиційні методи розв'язування систем рівнянь: метод підстановки і метод заміни змінних. При цьому слід урахувувати, що *заміна змінних (разом з оберненою заміною) завжди є рівносильним перетворенням* (звичайно, якщо при вибраній заміні не звужується ОДЗ заданого рівняння чи системи). Але якщо для подальшого розв'язування рівнянь, одержаних у результаті заміни, ми будемо користуватися рівняннями-наслідками, то можемо отримати сторонні розв'язки, і тоді одержані розв'язки доведеться перевіряти.

#### Приклад 4

Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

#### Розв'язання

► Заміна  $\sqrt[4]{x} = u$  і  $\sqrt[4]{y} = v$  дає систему

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^2 - v^2 = 3. \end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи:

$$u = 3 - v.$$

Тоді з другого рівняння одержуємо

$$(3 - v)^2 - v^2 = 3.$$

Звідси  $v = 1$ , тоді  $u = 2$ .

Обернена заміна дає:

$$\sqrt[4]{y} = 1, \text{ отже, } y = 1;$$

$$\sqrt[4]{x} = 2, \text{ отже, } x = 16.$$

**Відповідь:** (16; 1).  $\triangleleft$

#### Коментар

Якщо позначити  $\sqrt[4]{x} = u$  і  $\sqrt[4]{y} = v$ , то  $\sqrt{x} = u^2$  і  $\sqrt{y} = v^2$ . Тоді задана система буде рівносильна алгебраїчній системі, яку легко розв'язати, а після оберненої заміни одержати систему найпростіших ірраціональних рівнянь.

Ураховуючи, що заміна та обернена заміна приводили до рівносильних систем, одержуємо розв'язки заданої системи, що збігаються з розв'язками системи

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} = 2, \\ \sqrt[4]{y} = 1, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} x = 16, \\ y = 1. \end{cases}$$



### Запитання для контролю

- Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведіть приклади застосування відповідних методів.
- Поясніть, чому для розв'язування рівнянь
 
$$\sqrt[5]{x^2} + 3\sqrt[5]{x} - 4 = 0, \quad \sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0$$
 зручно використати заміну змінної. Укажіть заміну для кожного рівняння.
- Обґрунтуйте, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержують рівняння, рівносильне заданому.
- Поясніть, чому при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені. Як відсіюють сторонні корені?

### Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–6).

- 1)  $\sqrt{x-2} = 1$ ;      2)  $\sqrt{x-1} = -3$ ;      3)  $\sqrt[3]{x-1} = -3$ ;  
4)  $\sqrt[3]{x^2+125} = 5$ ;      5)  $\sqrt[4]{2x-9} = 3$ .
- 1)  $\sqrt{x+1} = x-5$ ; 2)  $\sqrt{3x-2} + x = 4$ ; 3)  $\sqrt[3]{x-x^3} = -x$ ; 4)  $\sqrt[3]{x^3+x} - x = 0$ .
- 1)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} = 3$ ;      2)  $\sqrt{2x-20} + \sqrt{x+15} = 5$ ;  
3)  $\sqrt{x-3} = 1 + \sqrt{x-4}$ ;      4)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} = 2$ .
- 1)  $\sqrt[3]{x^3-2x+6} = x$ ;      2)  $\sqrt[3]{x-x^3+5} = -x$ ;  
3)  $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}} = 2$ ;      4)  $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}} = 2$ .
- 1)  $\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} = 4$ ;      2)  $\sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x-2} = 3$ ;  
3)  $3\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[8]{x+1} = 4$ ;      4)  $\sqrt{x^2-1} + \sqrt[4]{x^2-1} = 2$ .
- 1)  $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ ;      2)  $\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{2x+1} = 2$ .

Розв'яжіть систему рівнянь (7–8).

- 1)  $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7, \\ 3\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5; \end{cases}$   
3)  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$       4)  $\begin{cases} 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 4. \end{cases}$
- 1)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$   
3)  $\begin{cases} \sqrt{x+3y+6} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 1; \end{cases}$       4)  $\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$

## § 12

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ.  
СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

## 12.1. Узагальнення поняття степеня

Таблиця 20

1. Степінь з натуральним і цілим показниками	
$a^1 = a$	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N} (n \geq 2)$
$a^0 = 1 \quad a \neq 0$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, n \in \mathbf{N}$
2. Степінь з дробовим показником	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a \geq 0$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0, n \in \mathbf{N} (n \geq 2), m \in \mathbf{Z}$
3. Властивості степенів	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

## Пояснення й обґрунтування

1. Вам відомі поняття степенів з натуральним і цілим показниками. Нагадаємо їх означення та властивості.

Якщо  $n$  — натуральне число, більше за 1, то для будь-якого дійсного числа  $a$   $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ , тобто  $a^n$  дорівнює добутку  $n$  співмножників, кожен з яких дорівнює  $a$ .

При  $n = 1$  вважають, що  $a^1 = a$ .

Якщо  $a \neq 0$ , то  $a^0 = 1$  і  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , де  $n$  — натуральне число.

Наприклад,  $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$ ,  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ .

Також вам відомі основні властивості степенів:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Нагадаємо ще одну корисну властивість

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Узагальнимо *поняття* степеня для виразів виду  $3^{\frac{2}{7}}$ ;  $6^{0,2}$ ;  $5^{-\frac{1}{3}}$  і т. п., тобто для степенів з раціональними показниками. Відповідне означення бажано дати так, щоб степені з раціональними показниками мали ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Наприклад, якщо ми хочемо, щоб виконувалася властивість  $(a^p)^q = a^{pq}$ , то повинна виконуватися рівність  $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m$ . Але за означенням кореня  $n$ -го степеня остання рівність означає, що число  $a^{\frac{m}{n}}$  є коренем  $n$ -го степеня з числа  $a^m$ . Це приводить нас до такого означення.

**Степенем числа  $a > 0$  з раціональним показником  $r = \frac{m}{n}$ , де  $m$  — ціле**

**число, а  $n$  — натуральне число ( $n > 1$ ), називається число  $\sqrt[n]{a^m}$ .**

Також за означенням приймемо, що при  $r > 0$

$$\boxed{0^r = 0}.$$

Наприклад, за означенням степеня з раціональним показником:

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} = \sqrt[7]{9}; \quad 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}; \quad 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}; \quad 0^{\frac{2}{5}} = 0.$$

Зауваження. Значення степеня з раціональним показником  $a^{\frac{m}{n}}$  (де  $n > 1$ ) не означають при  $a < 0$ .

Це пояснюють тим, що раціональне число  $r$  можна подати різними способами у вигляді дроби:  $r = \frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$ , де  $k$  — будь-яке натуральне число.

При  $a > 0$ , використовуючи основну властивість кореня і означення степеня з раціональним показником, маємо:  $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$ . Отже, при  $a > 0$  значення  $a^r$  не залежить від форми запису  $r$ .

При  $a < 0$  ця властивість не зберігається. Наприклад, якщо  $r = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ ,

то повинна виконуватися рівність  $a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{6}}$ . Але при  $a = -1$  одержуємо:  $a^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$ ;  $a^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1 \neq -1$ , тобто при від'ємних значеннях  $a$  маємо:  $a^{\frac{1}{3}} \neq a^{\frac{2}{6}}$ . Через це означення степеня  $a^{\frac{m}{n}}$  ( $m$  — ціле,  $n$  — натуральне, не рівне 1) для від'ємних значень  $a$  не вводять.

Покажемо тепер, що для введеного означення степеня з раціональним показником зберігаються всі властивості степенів з цілими показниками (відмінність полягає в тому, що наведені далі властивості є правильними тільки для додатних основ).

Для будь-яких раціональних чисел  $r$  і  $s$  та будь-яких додатних чисел  $a$  і  $b$  виконуються рівності:

- 1)  $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ ;
- 2)  $a^r : a^s = a^{r-s}$ ;
- 3)  $(a^r)^s = a^{rs}$ ;
- 4)  $(ab)^r = a^r b^r$ ;
- 5)  $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ .

Для доведення цих властивостей достатньо скористатися означенням степеня з раціональним показником і доведеними в § 10 властивостями кореня  $n$ -го степеня.

- Нехай  $r = \frac{m}{n}$  і  $s = \frac{p}{q}$ , де  $n$  і  $q$  — натуральні числа (більші за 1),

а  $m$  і  $p$  — цілі.

Тоді при  $a > 0$  і  $b > 0$  маємо:

$$1) a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s};$$

$$2) a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{r-s};$$

$$3) (a^r)^s = (\sqrt[n]{a^m})^s = \sqrt[n]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot s} = a^{rs};$$

$$4) (ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}. \circ$$

*Поняття степеня з ірраціональним показником.* Опишемо в загальних рисах, як можна означити число  $a^\alpha$  для ірраціональних  $\alpha$ , коли  $a > 1$ . Наприклад, пояснимо, як можна розуміти значення  $2^{\sqrt{3}}$ .

Ірраціональне число  $\sqrt{3}$  можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу  $\sqrt{3} = 1,7320508075\dots$ . Розглянемо десяткові наближення числа  $\sqrt{3}$  з недоставкою і надлишком:

$$1 < \sqrt[3]{3} < 2;$$

$$1,7 < \sqrt[3]{3} < 1,8;$$

$$1,73 < \sqrt[3]{3} < 1,74;$$

$$1,732 < \sqrt[3]{3} < 1,733;$$

$$1,7320 < \sqrt[3]{3} < 1,7321;$$

$$1,73205 < \sqrt[3]{3} < 1,73206;$$

$$1,732050 < \sqrt[3]{3} < 1,732051;$$

...

Будемо вважати, що коли  $r < \sqrt[3]{3} < s$  (де  $r$  і  $s$  — раціональні числа), то значення  $2^{\sqrt[3]{3}}$  розміщується між відповідними значеннями  $2^r$  і  $2^s$ , а саме:  $2^r < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^s$ . Знайдемо за допомогою калькулятора наближені значення  $2^r$  і  $2^s$ , вибираючи як  $r$  і  $s$  наближені значення  $\sqrt[3]{3}$  з недостачею і надлишком відповідно. Одержуємо співвідношення:

$$2^1 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^2;$$

$$2^{1,7} \approx 3,2490096 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,8} \approx 3,4822022;$$

$$2^{1,73} \approx 3,3172782 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,74} \approx 3,3403517;$$

$$2^{1,732} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,733} \approx 3,3241834;$$

$$2^{1,7320} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,7321} \approx 3,3221104;$$

$$2^{1,73205} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,73206} \approx 3,3220182;$$

$$2^{1,732050} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt[3]{3}} < 2^{1,732051} \approx 3,3219975.$$

...

Як бачимо, значення  $2^r$  і  $2^s$  наближаються до одного й того самого числа 3,32199... . Це число і вважають степенем  $2^{\sqrt[3]{3}}$ . Отже,  $2^{\sqrt[3]{3}} = 3,32199...$

Значення  $2^{\sqrt[3]{3}}$ , обчислене на калькуляторі, таке:  $2^{\sqrt[3]{3}} \approx 3,321997$ .

Можна довести, що завжди, коли ми вибираємо раціональні числа  $r$ , які з недостачею наближаються до ірраціонального числа  $\alpha$ , і раціональні числа  $s$ , які з надлишком наближаються до цього самого ірраціонального числа  $\alpha$ , для будь-якого  $a > 1$  існує, і притому тільки одне, число  $y$ , більше за всі  $a^r$  і менше за всі  $a^s$ . Це число  $y$  за означенням є  $a^\alpha$ .

Аналогічно означають і степінь з ірраціональним показником  $\alpha$  для  $0 < a < 1$ , тільки у випадку, коли  $r < \alpha < s$  при  $0 < a < 1$ , вважають, що  $a^s < a^\alpha < a^r$ . Крім того, як і для раціональних показників, за означенням вважають, що  $1^\alpha = 1$  для будь-якого  $\alpha$  і  $0^\alpha = 0$  для всіх  $\alpha > 0$ .

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

$$1) \sqrt[3]{7^5}; \quad 2) \sqrt[4]{5^{-3}}; \quad 3) \sqrt[7]{a^2} \text{ при } a \geq 0; \quad 4^*) \sqrt[7]{a^2}.$$

#### Розв'язання

- 1) ▶  $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}; \triangleleft$   
 2) ▶  $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}; \triangleleft$   
 3) ▶ при  $a \geq 0$   $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}; \triangleleft$   
 4) ▶  $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{|a|^2} = |a|^{\frac{2}{7}}. \triangleleft$

#### Коментар

За означенням степеня з раціональним показником для  $a > 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

Для завдання 3 врахуємо, що вираз  $a^{\frac{2}{7}}$  означений також і при  $a = 0$ .

У завданні 4 при  $a < 0$  ми не маємо права користуватися формулою (1). Але якщо врахувати, що  $a^2 = |a|^2$ , то для основи  $|a|$  формулою (1) уже можна скористатися, оскільки  $|a| \geq 0$ .

**Приклад 2** Обчисліть: 1)  $81^{\frac{3}{4}}$ ; 2)  $128^{-\frac{2}{7}}$ ; 3\*)  $(-8)^{\frac{1}{3}}$ .

#### Розв'язання

- 1) ▶  $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27; \triangleleft$   
 2) ▶  $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} =$   
 $= 2^{-2} = \frac{1}{4}; \triangleleft$   
 3\*) ▶  $(-8)^{\frac{1}{3}}$  не існує, оскільки степінь  $a^{\frac{1}{3}}$  означений тільки при  $a \geq 0. \triangleleft$

#### Коментар

Використовуємо означення степеня з раціональним показником:  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , де  $a > 0$ , а при виконанні завдання 3 врахуємо, що вираз  $a^{\frac{m}{n}}$  не означено при  $a < 0$ .

**Приклад 3** Спростіть вираз:

$$1) \frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}; \quad 2^*) \frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}.$$

#### Розв'язання

- 1) ▶  $\frac{a-b}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} =$

#### Коментар

Оскільки задані приклади вже містять вирази  $a^{\frac{1}{2}}$ ,  $b^{\frac{1}{2}}$ ,  $x^{\frac{1}{3}}$ , то  $a \geq 0$ ,

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}; \triangleleft$$

$$2^*) \blacktriangleright \frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3^3}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9\right)}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9} = x^{\frac{1}{3}} + 3. \triangleleft$$

$b \geq 0, x \geq 0$ . Тоді в завданні 1 невід'ємні числа  $a$  і  $b$  можна подати як квадрати:  $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ ,  $b = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$  і використати формулу різниці квадратів:  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , а в завданні 2 подати невід'ємне число  $x$  як куб:  $x = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$  і використати формулу розкладу суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

**Приклад 4** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt[3]{x^2} = 1; \quad 2^*) x^{\frac{2}{3}} = 1.$$

#### Розв'язання

$$1) \blacktriangleright \sqrt[3]{x^2} = 1. \text{ ОДЗ: } x \in \mathbf{R},$$

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Відповідь:  $\pm 1$ .  $\triangleleft$

$$2^*) \blacktriangleright x^{\frac{2}{3}} = 1. \text{ ОДЗ: } x \geq 0,$$

$$x^2 = 1,$$

$$x = \pm 1.$$

Ураховуючи ОДЗ, одержуємо  $x = 1$ .

Відповідь: 1.  $\triangleleft$

#### Коментар

Область допустимих значень рівняння  $\sqrt[3]{x^2} = 1$  — усі дійсні числа, а рівняння  $x^{\frac{2}{3}} = 1$  — тільки  $x \geq 0$ .

При піднесенні обох частин рівняння до куба одержуємо рівняння, рівносильне заданому на його ОДЗ. Отже, першому рівнянню задовольняють усі знайдені корені, а другому — тільки невід'ємні.

(У завданні 1 також ураховано, що  $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = x^2$ , а в завданні 2 — що  $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = x^{\frac{2}{3} \cdot 3} = x^2$ .)

### Заяпитання для контролю

1. Дайте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів.
2. Дайте означення степеня з цілим від'ємним показником та з нульовим показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях  $a$  існують значення виразів  $a^0$  та  $a^{-n}$ , де  $n \in \mathbf{N}$ ?

3. Дайте означення степеня з раціональним показником  $r = \frac{m}{n}$ , де  $m$  — ціле число, а  $n$  — натуральне, не рівне 1. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях  $a$  існують значення виразу  $a^{\frac{m}{n}}$ ? Укажіть область допустимих значень виразів  $a^{\frac{2}{5}}$  і  $a^{-\frac{2}{5}}$ .
4. Запишіть властивості степенів з раціональними показниками. Наведіть приклади використання цих властивостей.
- 5\*. Обґрунтуйте властивості степенів з раціональними показниками.
- 6\*. Поясніть на прикладі, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником.

### Вправи

- 1°. Подайте вираз у вигляді кореня з числа:
  - 1)  $2^{\frac{1}{2}}$ ;      2)  $3^{-\frac{2}{5}}$ ;      3)  $5^{0,25}$ ;      4)  $4^{\frac{3}{7}}$ ;      5)  $2^{1,5}$ ;      6)  $7^{\frac{2}{3}}$ .
2. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:
  - 1°)  $\sqrt[6]{3^5}$ ;      2°)  $\sqrt[5]{4}$ ;      3°)  $\sqrt{7^{-9}}$ ;
  - 4)  $\sqrt[9]{a^{-2}}$  при  $a > 0$ ;      5)  $\sqrt[4]{2b}$  при  $b \geq 0$ ;      6\*)  $\sqrt[11]{c^4}$ .
- 3°. Чи має зміст вираз:
  - 1)  $(-3)^{\frac{1}{2}}$ ;      2)  $(-5)^{-2}$ ;      3)  $4^{\frac{2}{7}}$ ;      4)  $0^{-5}$ ?
4. Знайдіть область допустимих значень виразу:
  - 1)  $x^{\frac{1}{5}}$ ;      2)  $x^{-3}$ ;      3)  $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ ;
  - 4)  $(x+3)^{\frac{3}{7}}$ ;      5)  $(x^2-1)^0$ ;      6)  $x^3-5$ .
5. Знайдіть значення числового виразу:
  - 1)  $243^{0,4}$ ;      2)  $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{\frac{1}{8}}$ ;      3)  $16^{\frac{5}{4}}$ ;      4)  $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$ ;
  - 5)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$ ;      6)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$ ;
  - 7)  $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$ .
6. Розкладіть на множники:
  - 1)  $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$ ;      2)  $a - a^{\frac{1}{2}}$ ;      3)  $3 + 3^{\frac{1}{2}}$ ;      4)  $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ .



7. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a - b}; \quad 2) \frac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p - 25}; \quad 3) \frac{c + c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}; \quad 4) \frac{m + n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}.$$

Спростіть вираз (8–9).

$$8. \quad 1) (1 + c^{\frac{1}{2}})^2 - 2c^{\frac{1}{2}}; \quad 2) (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}};$$

$$3) (x^{\frac{1}{4}} + 1)(x^{\frac{1}{4}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1); \quad 4) (k^{\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}})(k^{\frac{1}{8}} + l^{\frac{1}{8}})(k^{\frac{1}{8}} - l^{\frac{1}{8}}).$$

$$9. \quad 1) \frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}; \quad 2) \frac{a - b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}; \quad 3) \frac{z - 8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}; \quad 4) \frac{a + b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}.$$

10. Розв'яжіть рівняння:

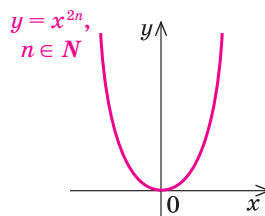
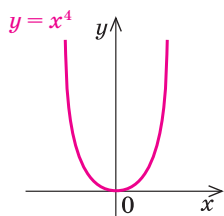
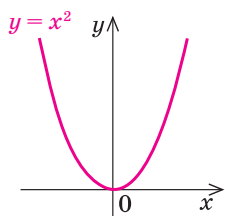
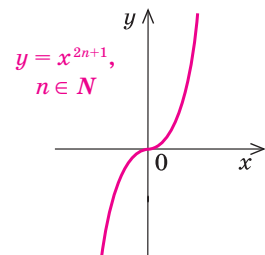
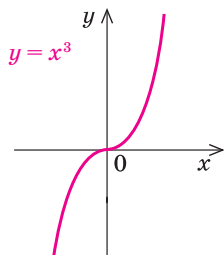
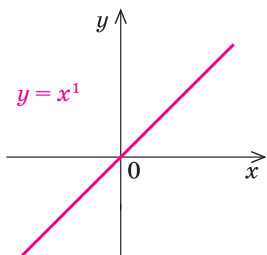
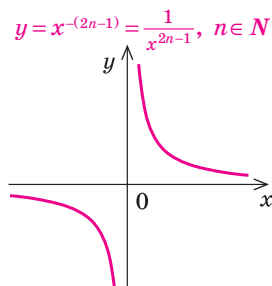
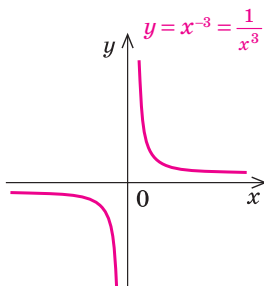
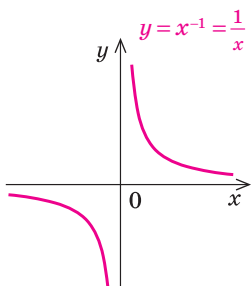
$$1) x^{\frac{3}{5}} = 1; \quad 2) x^{\frac{1}{7}} = 2; \quad 3) x^{\frac{2}{5}} = 2; \quad 4) \sqrt[5]{x^2} = 2.$$

## 12.2. Степенева функція, її властивості та графік

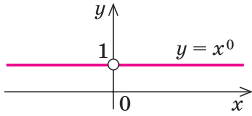
Означення. Функція виду  $y = x^\alpha$ , де  $\alpha$  — будь-яке дійсне число, називається *степеневою функцією*.

Графіки і властивості

Графік

1.  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha$  — парне натуральне число2.  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha$  — непарне натуральне число3.  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha$  — непарне від'ємне число

Таблиця 21

Особливий випадок ( $\alpha = 0$ )			
Якщо $\alpha = 0$ , то $y = x^\alpha = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$ ).			
функції $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$ )			
Властивості			
$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
$(y = x^{2n}, n \in \mathbb{N})$			
$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$	Парна	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ , зростає на проміжку $[0; +\infty)$
$(y = x$ та $y = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N})$			
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Непарна	Зростає
$(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}, n \in \mathbb{N})$			
$x \neq 0$	$y \neq 0$	Непарна	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

Графіки і властивості		
Графік		
4. $y = x^\alpha$ , $\alpha$ — парне від'ємне число		
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}, n \in \mathbb{N}$ 
5. $y = x^\alpha$ ,		
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ ( $\alpha > 0$ , $\alpha$ — неціле) $0 < \alpha < 1$ $\alpha > 1$ 
6. $y = x^\alpha$ ,		
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^\alpha$ ( $\alpha < 0$ , $\alpha$ — неціле) 

Продовження табл. 21

функції $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$ )			
Властивості			
$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
$(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}, n \in \mathbb{N})$			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	Парна	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ , спадає на проміжку $(0; +\infty)$
$\alpha$ — неціле додатне число			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Зростає
$\alpha$ — неціле від'ємне число			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Ні парна, ні непарна	Спадає

### Пояснення й обґрунтування

*Степеневими функціями* називають функції виду  $y = x^\alpha$ , де  $\alpha$  — будь-яке дійсне число.

З окремими видами таких функцій ви вже ознайомилися в курсі алгебри 7–9 класів. Це, наприклад, функції  $y = x^1 = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ . При довільному натуральному  $\alpha$  графіки і властивості функції  $y = x^\alpha$  аналогічні відомим вам графікам і властивостям указаних функцій.

Описуючи властивості степеневих функцій, виділимо ті характеристики функцій, які ми використовували в § 10: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) точки перетину з осями координат; 5) проміжки знакосталості; 6) проміжки зростання і спадання; 7) найбільше та найменше значення функції.

**1. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — парне натуральне число).** Якщо  $\alpha$  — парне натуральне число, то функція  $y = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції  $y = x^2$ .

Дійсно, область визначення функції  $y = x^{2n}$ :  $D(y) = \mathbb{R}$ , оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ .

Функція парна: якщо  $f(x) = x^{2n}$ , то  $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$ . Отже, графік функції  $y = x^{2n}$  симетричний відносно осі  $Oy$ .

Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = 0$ , то графік функції  $y = x^{2n}$  завжди проходить через початок координат.

На проміжку  $[0; +\infty)$  функція зростає.

- Дійсно, для невід'ємних значень при  $x_2 > x_1$  ( $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ) одержуємо  $x_2^{2n} > x_1^{2n}$ , оскільки, як відомо з курсу алгебри 9 класу, при піднесенні обох частин правильної нерівності з невід'ємними членами до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність. ○

На проміжку  $(-\infty; 0]$  функція спадає.

- Дійсно, для недодатних значень  $x_1$  і  $x_2$  ( $x_1 \leq 0$ ,  $x_2 \leq 0$ ), якщо  $x_2 > x_1$ , то  $-x_2 < -x_1$  (і тепер  $-x_1 \geq 0$ ,  $-x_2 \geq 0$ ). Тоді  $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$ , отже,  $x_2^{2n} < x_1^{2n}$ , тобто  $f(x_2) < f(x_1)$ . ○

Для того щоб знайти область значень функції  $y = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , складемо рівняння  $x^{2n} = a$ . Воно має розв'язки для всіх  $a \geq 0$  (тоді  $x = \pm \sqrt[2n]{a}$ ) і тільки при таких значеннях  $a$ . Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції:  $y \geq 0$ , тобто  $E(y) = [0; +\infty)$ .

Таким чином, для всіх дійсних значень  $x$  значення  $y \geq 0$ . Найменше значення функції дорівнює нулю ( $y = 0$  при  $x = 0$ ). Найбільшого значення функція не має.

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^{2n} = 1$ .

Ураховуючи властивості функції  $y = x^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , одержуємо її графік (рис. 85).

**2. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — непарне натуральне число).** Якщо  $\alpha$  — непарне натуральне число ( $\alpha = 2n - 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ), то властивості функції  $y = x^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , аналогічні властивостям функції  $y = x^3$ .

Дійсно, область визначення функції  $y = x^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ :  $D(y) = \mathbf{R}$ , оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ .

Функція *непарна*: якщо  $f(x) = x^{2n-1}$ , то  $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$ . Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = 0$ , то графік функції  $y = x^{2n-1}$  завжди проходить через початок координат.

На всій області визначення функція зростає.

● Дійсно, при  $x_2 > x_1$  одержуємо  $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$ , оскільки при піднесенні обох частин правильної нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність. ○

Для знаходження області значень функції  $y = x^{2n-1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , складемо рівняння  $x^{2n-1} = a$ . Воно має розв'язки для всіх  $a \in \mathbf{R}$  (при  $n = 1$  одержуємо  $x = a$ , а при  $n \neq 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , одержуємо  $x = \sqrt[2n-1]{a}$ ). Отже, область значень заданої функції:  $y \in \mathbf{R}$ , тобто  $E(y) = \mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ .

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має*.

*Проміжки знакосталості*: при  $x > 0$  значення  $y = x^{2n-1} > 0$ ,  
при  $x < 0$  значення  $y = x^{2n-1} < 0$ .

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^{2n-1} = 1$ .

Як відомо з курсу алгебри та геометрії, графіком функції  $y = x^1 = x$  є пряма, яка проходить через початок координат (рис. 86), а при інших непарних натуральних  $\alpha$  функція  $y = x^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , має графік, аналогічний графіку функції  $y = x^3$  (рис. 87).

**3. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — непарне від'ємне число).** Якщо  $\alpha$  — непарне від'ємне число, то функція  $y = x^{-(2n-1)}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції  $y = \frac{1}{x}$ .

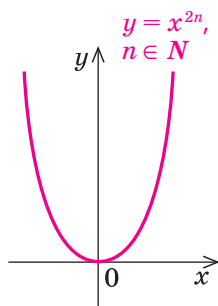


Рис. 85

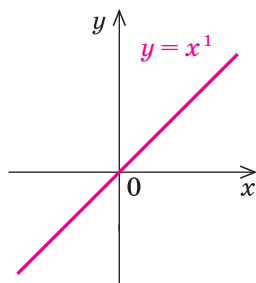
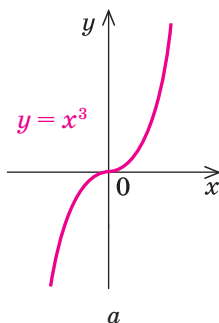
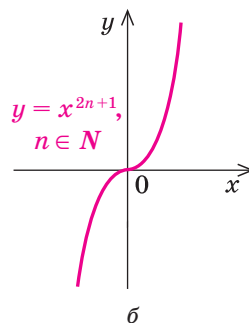


Рис. 86



а



б

Рис. 87

Дійсно, область визначення функції  $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$ :  $x \neq 0$ , тобто

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ , крім  $x = 0$ .

Функція *непарна*: при  $x \neq 0$ , якщо  $f(x) = x^{-(2n-1)}$ , то

$$f(-x) = (-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)} = -f(x).$$

Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Ураховуючи, що  $x \neq 0$  і  $y \neq 0$  ( $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}} \neq 0$ ), одержуємо, що графік функції  $y = x^{-(2n-1)}$  не перетинає осі координат.

На проміжку  $(0; +\infty)$  функція спадає.

- Дійсно, для додатних значень при  $x_2 > x_1$  ( $x_1 > 0, x_2 > 0$ ) одержуємо  $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$ , але тоді  $\frac{1}{x_2^{2n-1}} < \frac{1}{x_1^{2n-1}}$ , отже,  $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$ . ○

На проміжку  $(-\infty; 0)$  функція теж спадає. Це впливає з того, що її графік симетричний відносно початку координат.

- Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо  $x_1 < 0, x_2 < 0$  і  $x_2 > x_1$ , то  $-x_2 < -x_1$  (і тепер  $-x_1 > 0, -x_2 > 0$ ). Тоді за обґрунтованим вище  $(-x_2)^{-(2n-1)} > (-x_1)^{-(2n-1)}$ , отже,  $-x_2^{-(2n-1)} > -x_1^{-(2n-1)}$ . Звідси  $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$ . ○

Для того щоб знайти область значень функції  $y = x^{-(2n-1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , складемо рівняння  $x^{-(2n-1)} = a$ , тобто  $\frac{1}{x^{2n-1}} = a$ . Воно має розв'язки для

всіх  $a \neq 0$  (тоді  $x = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{a}}$  при  $n \neq 1$  і  $x = \frac{1}{a}$  при  $n = 1$ ) і тільки при таких значеннях  $a$ . Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції:  $y \neq 0$ , тобто  $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .

Тому найменшого і найбільшого значень функція не має.

*Проміжки знакосталості:*

при  $x > 0$  значення  $y = x^{-(2n-1)} > 0$ ,

а при  $x < 0$  значення

$$y = x^{-(2n-1)} < 0.$$

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^{-(2n-1)} = 1$ .

Ураховуючи властивості функції  $y = x^{-(2n-1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , одержуємо її графік (рис. 88).

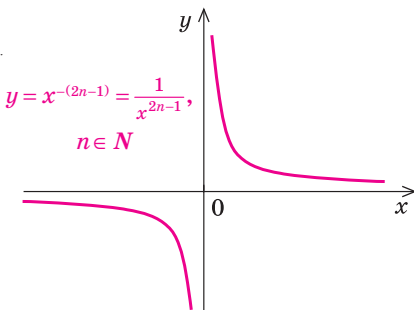


Рис. 88

**4. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — парне від'ємне число).** Якщо  $\alpha$  — парне від'ємне число, то функція  $y = x^{-2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , має



властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції  $y = \frac{1}{x^2}$ .

Дійсно, область визначення функції  $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ :  $x \neq 0$ , тобто

$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях  $x$ , крім  $x = 0$ .

Функція *парна*: при  $x \neq 0$ , якщо  $f(x) = x^{-2n}$ , то  $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$ . Отже, графік функції симетричний відносно осі  $Oy$ .

Оскільки при  $x \neq 0$  значення  $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}} > 0$ , то графік функції  $y = x^{-2n}$  не перетинає осі координат.

На проміжку  $(0; +\infty)$  функція спадає.

● Дійсно, для додатних значень при  $x_2 > x_1$  ( $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ) одержуємо  $x_2^{-2n} > x_1^{-2n}$ , але тоді  $\frac{1}{x_2^{2n}} < \frac{1}{x_1^{2n}}$ , отже,  $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$ . ○

На проміжку  $(-\infty; 0)$  функція зростає.

● Це випливає з того, що її графік симетричний відносно осі  $Oy$ . Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$  і  $x_2 > x_1$ , то  $-x_2 < -x_1$  (і тепер  $-x_1 > 0$ ,  $-x_2 > 0$ ). Тоді за обґрунтованим вище  $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$ , отже,  $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$ . ○

Для того щоб знайти область значень функції  $y = x^{-2n}$ ,  $n \in N$ , складемо рівняння  $x^{-2n} = a$ , тобто  $\frac{1}{x^{2n}} = a$ . Воно має розв'язки для всіх  $a > 0$

(тоді  $x = \pm \sqrt[2n]{\frac{1}{a}}$ ) і тільки при таких значеннях  $a$ . Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції:  $y > 0$ , тобто  $E(y) = (0; +\infty)$ .

Тому найменшого і найбільшого значень функція не має.

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^{-2n} = 1$ .

Ураховуючи властивості функції  $y = x^{-2n}$ ,  $n \in N$ , одержуємо її графік (рис. 89).

**5. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — неціле додатне число).** Якщо  $\alpha$  — неціле додатне число, то функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  — неціле) має область визначення  $x \geq 0$ :  $D(y) = [0; +\infty)$ , оскільки значення степеня з додатним нецілим показником означено тільки для невід'ємних значень  $x$ .

Тоді область визначення несиметрична відносно точки 0, і функція не може бути ні парною, ні непарною.

$$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}, \quad n \in N$$

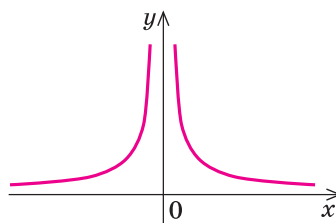


Рис. 89

Оскільки при  $x = 0$  значення  $y = 0$ , то графік функції  $y = x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) завжди проходить через початок координат.

При  $x > 0$  значення  $y = x^\alpha > 0$ .

Можна обґрунтувати, що на всій області визначення функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) є зростаючою.

Для того щоб знайти область значень функції  $y = x^\alpha$ , складемо рівняння  $x^\alpha = a$ . Воно має розв'язки для всіх  $a \geq 0$  (тоді  $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$ ) і тільки при таких значеннях  $a$ . Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції:  $y \geq 0$ , тобто  $E(y) = [0; +\infty)$ .

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^\alpha = 1$ .

Зображуючи графік функції  $y = x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha$  — неціле), слід урахувати, що при  $0 < \alpha < 1$  графік має вигляд, аналогічний графіку  $y = \sqrt{x}$  (рис. 90)<sup>1</sup>, а при  $\alpha > 1$  — аналогічний правій вітці графіка  $y = x^2$  (рис. 91).

**6. Функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha$  — неціле від'ємне число).** Якщо  $\alpha$  — неціле від'ємне число, то функція  $y = x^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ,  $\alpha$  — неціле) має область визначення  $x > 0$  ( $D(y) = (0; +\infty)$ ), оскільки значення степеня з від'ємним нецілим показником означено тільки для додатних значень  $x$ .

Тоді область визначення несиметрична відносно точки 0, і функція не може бути ні парною, ні непарною.

Ураховуючи, що при  $x > 0$  значення  $y = x^\alpha > 0$  (тобто  $x \neq 0$  і  $y \neq 0$ ), одержуємо, що графік функції  $y = x^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) не перетинає осі координат.

На проміжку  $(0; +\infty)$  функція спадає, тобто для додатних значень при  $x_2 > x_1$  ( $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ) одержуємо  $x_2^\alpha < x_1^\alpha$ .

- Доведемо це, наприклад, для випадку, коли  $\alpha$  — від'ємне раціональне неціле число ( $\alpha = -\frac{m}{n}$  — неціле,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ). При додатних значеннях  $x_2 > x_1$  ( $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ), ураховуючи результати дослідження функції  $y = x^\alpha$  при цілому від'ємному  $\alpha$ , одержуємо  $x_2^{-m} < x_1^{-m}$ . Потім, зважаючи на те, що функція  $y = \sqrt[n]{t}$  при додатних  $t$  є зростаючою, маємо  $\sqrt[n]{x_2^{-m}} < \sqrt[n]{x_1^{-m}}$ , тоді  $x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}}$ . ○

Можна обґрунтувати, що і в тому випадку, коли  $\alpha$  — від'ємне ірраціональне число, функція  $y = x^\alpha$  також спадає на всій області визначення (тобто при  $x > 0$ ).

Для того щоб знайти область значень функції  $y = x^\alpha$ , складемо рівняння  $x^\alpha = a$ . Воно має розв'язки для всіх  $a > 0$  (тоді  $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$ ) і тільки при таких значеннях  $a$ . Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції:  $y > 0$ , тобто  $E(y) = (0; +\infty)$ .

<sup>1</sup> Це буде детальніше обґрунтовано в підручнику для 11 класу.

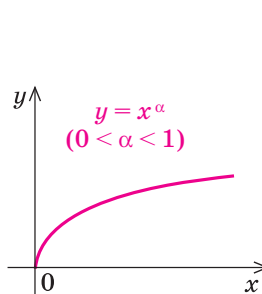


Рис. 90

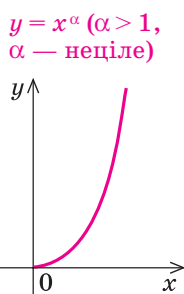


Рис. 91

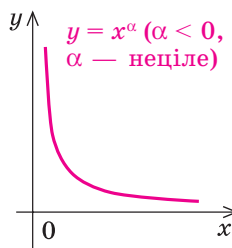


Рис. 92

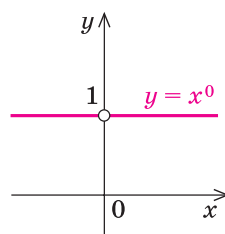


Рис. 93

Зазначимо також, що при  $x = 1$  значення  $y = 1^\alpha = 1$ .

Ураховуючи властивості функції  $y = x^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ), одержуємо її графік (рис. 92).

**Особливий випадок.** Якщо  $\alpha = 0$ , то функція  $y = x^\alpha = x^0 = 1$  при  $x \neq 0$  (нагадаємо, що  $0^0$  — не означено) і її графік — пряма  $y = 1$  без точки  $(0; 1)$  (рис. 93).

### Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = (x-3)^{\frac{1}{3}}$ ;    2)  $y = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$ .

#### Розв'язання

- 1) ►  $x - 3 \geq 0$ , тобто  $x \geq 3$ , отже,  
 $D(y) = [3; +\infty)$ . ◀
- 2) ►  $x + 1 > 0$ , тобто  $x > -1$ , отже,  
 $D(y) = (-1; +\infty)$ . ◀

#### Коментар

Ураховуємо, що вираз  $a^{\frac{1}{3}}$  означений при  $a \geq 0$ , а вираз  $a^{-\frac{1}{2}}$  — тільки при  $a > 0$ .

**Приклад 2** Побудуйте графік функції:

1)  $y = x^5 + 1$ ;    2)  $y = (x+2)^{\frac{1}{3}}$ .

#### Розв'язання

- 1) ► Будуємо графік  $y = x^5$  (рис. 94, а), а потім паралельно переносимо його вздовж осі  $Oy$  на +1 (рис. 94, б). ◀
- 2) ► Будуємо графік  $y = x^{\frac{1}{3}}$  (рис. 95, а) а потім паралельно переносимо його вздовж осі  $Ox$  на -2 (рис. 95, б). ◀

#### Коментар

Графіки заданих функцій можна отримати із графіків функцій:

- 1)  $y = x^5$ , 2)  $y = x^{\frac{1}{3}}$  за допомогою паралельного перенесення:
- 1) на +1 уздовж осі  $Oy$ ;
  - 2) на -2 вздовж осі  $Ox$ .

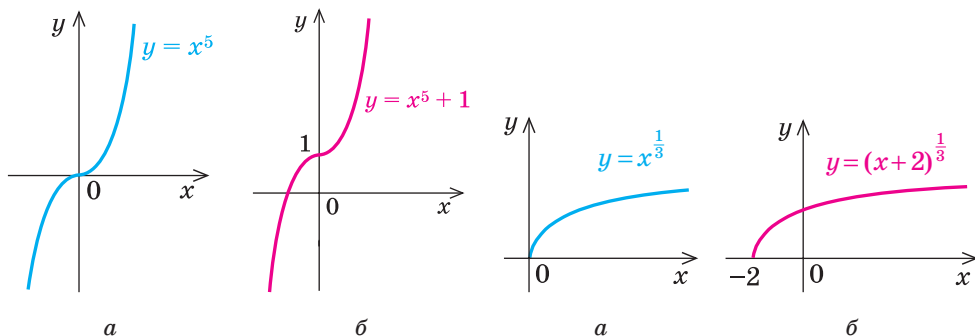


Рис. 94

Рис. 95

### Заяпитання для контролю

- Користуючись графіком відповідної функції, охарактеризуйте властивості функції  $y = x^\alpha$ , якщо: 1)  $\alpha$  — парне натуральне число; 2)  $\alpha$  — непарне натуральне число; 3)  $\alpha$  — непарне від'ємне число; 4)  $\alpha$  — парне від'ємне число; 5)  $\alpha$  — неціле від'ємне число; 6)  $\alpha$  — неціле додатне число.
- Обґрунтуйте властивості степеневі функції в кожному з випадків, указаних у завданні 1.

### Вправи

- Знайдіть область визначення функції:

$$1^\circ) y = x^7; \quad 2^\circ) y = x^{-3}; \quad 3^\circ) y = (x-1)^{\frac{1}{2}};$$

$$4^\circ) y = x^{-\frac{2}{7}}; \quad 5^\circ) y = (x^2 - x)^{\frac{5}{3}}; \quad 6^\circ) y = (x^2 - x + 1)^{-\frac{9}{2}}.$$

- Побудуйте графік функції:

$$1^\circ) y = x^4; \quad 2^\circ) y = x^7; \quad 3^\circ) y = x^{-3}; \quad 4^\circ) y = x^{-4}; \quad 5^\circ) y = x^{\frac{1}{4}};$$

$$6^\circ) y = x^{\frac{5}{4}}; \quad 7^\circ) y = (x+1)^4; \quad 8^\circ) y = x^{\frac{1}{5}} - 3; \quad 9^\circ) y = |x|^{\frac{1}{3}}; \quad 10^\circ) y = |x^5 - 1|.$$

- Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

$$1) y = \sqrt[3]{x} \text{ і } y = x^{\frac{1}{3}}; \quad 2) y = \sqrt[4]{x} \text{ і } y = x^{\frac{1}{4}}.$$

- Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^{\frac{1}{2}} = 6 - x; \quad 2) x^{-\frac{1}{3}} = x^2; \quad 3) x^{\frac{5}{2}} = 2 - x; \quad 4) x^{-\frac{1}{4}} = 2x - 1.$$

Перевірте підстановкою, що значення  $x$  дійсно є коренем рівняння.

- Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 4, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

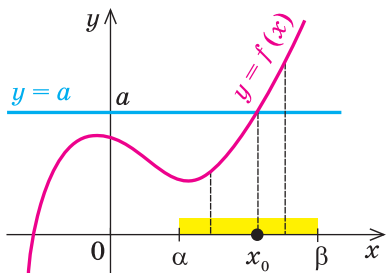
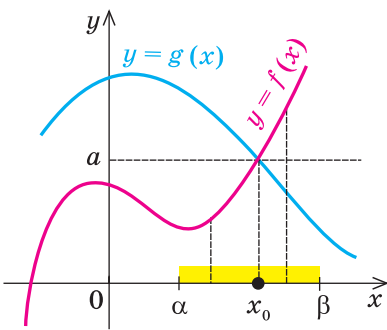
## § 13 ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

### 13.1. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь

Нагадаємо основні ідеї, які використовують при розв'язуванні рівнянь за допомогою властивостей функцій.

Таблиця 22

1. Скінченна ОДЗ				
Орієнтир	Приклад			
<p><b>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення.</b></p>	<p>Розв'яжіть рівняння  <math>\sqrt{x-3} + 2x^2 = \sqrt[4]{6-2x} + 18</math>.</p> <p>▶ ОДЗ: <math>\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 6-2x \geq 0. \end{cases}</math> Тоді <math>\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 3. \end{cases}</math></p> <p>Отже, ОДЗ: <math>x = 3</math>.</p> <p>Перевірка. <math>x = 3</math> — корінь  <math>(\sqrt{0} + 18 = \sqrt[4]{0} + 18; 18 = 18)</math>.</p> <p>Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число.</p> <p>Відповідь: 3. ◀</p>			
2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння				
Орієнтир	Приклад			
<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <table border="1" style="margin-right: 10px;"> <tr><td><math>f(x) = g(x)</math></td></tr> <tr><td><math>f(x) \geq a,</math></td></tr> <tr><td><math>g(x) \leq a</math></td></tr> </table> <math>\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}</math> </div> <p>Якщо потрібно розв'язати рівняння виду <math>f(x) = g(x)</math> і з'ясувалося, що <math>f(x) \geq a</math>, <math>g(x) \leq a</math>, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо <math>f(x)</math> і <math>g(x)</math> одночасно дорівнюють <math>a</math>.</p>	$f(x) = g(x)$	$f(x) \geq a,$	$g(x) \leq a$	<p>Розв'яжіть рівняння  <math>\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 4x - x^2 - 4</math>.</p> <p>▶ Запишемо задане рівняння так:  <math>\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -(x^2 - 4x + 4)</math>,  <math>\sqrt{x^2 - 5x + 6} = -(x - 2)^2</math>,  <math>f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0</math>,  <math>g(x) = -(x - 2)^2 \leq 0</math>.</p> <p>Отже, задане рівняння рівносильне системі</p> $\begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0, \\ -(x - 2)^2 = 0. \end{cases}$ <p>Із другого рівняння одержуємо <math>x = 2</math>, що задовольняє й першому рівнянню.</p> <p>Відповідь: 2. ◀</p>
$f(x) = g(x)$				
$f(x) \geq a,$				
$g(x) \leq a$				

3. Використання монотонності функцій	
Схема розв'язування рівняння	
<p>1. Підбираємо один або декілька коренів рівняння.</p> <p>2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння).</p>	
 <p>Графік функції <math>y = f(x)</math> та горизонтальної лінії <math>y = a</math>. Функція зростає на проміжку <math>[\alpha, \beta]</math>. Точка перетину <math>x_0</math> знайдена на цьому проміжку.</p>	<p>Теореми про корені рівняння</p> <p>1. Якщо в рівнянні <math>f(x) = a</math> функція <math>f(x)</math> зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.</p> <p><b>Приклад</b> Рівняння <math>\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} = 3</math> має єдиний корінь <math>x = 1</math> (<math>\sqrt{1} + 2 \cdot \sqrt[3]{1} = 3</math>, тобто <math>3 = 3</math>), оскільки функція <math>f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}</math> зростає (на всій області визначення <math>x \geq 0</math>) як сума двох зростаючих функцій</p>
 <p>Графік двох функцій <math>y = g(x)</math> та <math>y = f(x)</math>. Функція <math>f(x)</math> зростає, а <math>g(x)</math> спадає на проміжку <math>[\alpha, \beta]</math>. Точка перетину <math>x_0</math> знайдена на цьому проміжку.</p>	<p>2. Якщо в рівнянні <math>f(x) = g(x)</math> функція <math>f(x)</math> зростає на деякому проміжку, а функція <math>g(x)</math> спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.</p> <p><b>Приклад</b> Рівняння <math>\sqrt{x} = 6 - x</math> має єдиний корінь <math>x = 4</math> (<math>\sqrt{4} = 6 - 4</math>, <math>2 = 2</math>), оскільки <math>f(x) = \sqrt{x}</math> зростає (при <math>x \geq 0</math>), а <math>g(x) = 6 - x</math> спадає</p>

### Пояснення й обґрунтування

**1. Використання скінченності ОДЗ для розв'язування ірраціональних рівнянь.** Основними способами розв'язування ірраціональних рівнянь, що використовують у курсі алгебри і початків аналізу, є виконання рівносильних перетворень рівнянь або одержання рівнянь-наслідків, які дозволяють звести задане рівняння до раціонального. Але іноді одержане раціональне рівняння виявляється складним для розв'язування. На-

приклад, рівняння  $\sqrt{x-3} + 2x^2 = \sqrt[4]{6-2x} + 18$ , наведене в пункті 1 таблиці 22, можна звести до раціонального, ізолюючи  $\sqrt[4]{6-2x}$  і підносячи обидві частини до четвертого степеня, а потім ізолюючи вираз, який містить  $\sqrt{x-3}$ , і підносячи обидві частини до квадрата. Але в результаті ми одержуємо повне рівняння шістнадцятого степеня. У таких ситуаціях спробуємо застосувати відомі нам методи розв'язування рівнянь, пов'язані з використанням властивостей функцій. Зокрема, у розглянутому рівнянні ОДЗ визначається умовами 
$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 6-2x \geq 0. \end{cases}$$
 Звідки одержуємо

тільки одне значення  $x = 3$ , яке входить до ОДЗ. Оскільки будь-який корінь рівняння входить до його ОДЗ, достатньо перевірити, чи є ті числа, що входять до ОДЗ, коренями заданого рівняння. Перевірка показує, що  $x = 3$  — корінь. Інших коренів бути не може, оскільки ОДЗ рівняння складається тільки з одного значення  $x = 3$ .

Зауважимо, що в тому випадку, коли ОДЗ заданого рівняння — **порожня множина (не містить жодного числа)**, ми навіть без перевірки можемо дати відповідь, що **рівняння не має коренів**. Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння  $\sqrt{x-3} = \sqrt[6]{2-x} + 5x$ , то його ОДЗ задається системою 
$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases}$$
 тобто 
$$\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 2, \end{cases}$$
 яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

**2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння.** Іноді в тих випадках, коли ірраціональне рівняння зводиться до громіздкого раціонального (або зовсім не зводиться до раціонального), доцільно спробувати оцінити значення функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x+1} = 1, \quad (1)$$

достатньо знайти його ОДЗ:  $x \geq 0$  і за допомогою рівносильних перетворень записати його у вигляді  $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 1 - \sqrt[8]{x+1}$ . У лівій частині останнього рівняння стоїть функція  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \geq 0$  на всій області визначення, а в правій — функція  $g(x) = 1 - \sqrt[8]{x+1} \leq 0$  при всіх значеннях  $x$  з ОДЗ (оскільки при  $x \geq 0$   $\sqrt[8]{x+1} \geq 1$ ). Тоді рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тільки в тому випадку, коли вони одночасно дорівнюють нулю. Отже, рівняння (1) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{cases} \text{ тобто системі } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 0, \\ 1 - \sqrt[8]{x+1} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння цієї системи. Урахуємо, що  $\sqrt{x} \geq 0$  і  $\sqrt[4]{x} \geq 0$ . Сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю. Отже, рівняння

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 0 \text{ рівносильне системі } \begin{cases} \sqrt{x} = 0, \\ \sqrt[4]{x} = 0, \end{cases} \text{ яка має єдиний розв'язок } x = 0.$$

Цей розв'язок задовольняє і друге рівняння системи (2) (дійсно,  $1 - \sqrt[8]{0+1} = 0$ ,  $0 = 0$ ), отже, система (2) теж має тільки один розв'язок  $x = 0$ . Таким чином, і рівняння (1) має єдиний корінь  $x = 0$ .

**3. Використання монотонності функцій.** Ще одним способом розв'язування тих ірраціональних рівнянь, які зводяться до громіздких раціональних, є використання зростання або спадання відповідних функцій. Найчастіше це здійснюють за такою схемою:

- 1) підбираємо один або декілька коренів рівняння;
- 2) доводимо, що інших коренів це рівняння не має.

Обґрунтування відповідних властивостей наведено в пункті 3.2 розділу 1, а приклади використання цього способу для розв'язування ірраціональних рівнянь — у таблиці 22.

### Вправи

Розв'яжіть рівняння (1–4) та системи рівнянь (5), використовуючи властивості відповідних функцій.

1. 1)  $\sqrt[6]{x^2 - 1} + x^2 = \sqrt[4]{2 - 2x^2} + x + 2$ ;  
2)  $2x + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = x^2 + \sqrt[8]{10x - 2x^2 - 12} - 3$ .
2. 1)  $\sqrt[4]{16 + x^2} = 2 - \sqrt{x^3 + x}$ ;                      2)  $1 + |x - \sqrt{x}| = \sqrt[6]{1 - |x|}$ ;  
3)  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - x - x^2$ ;                      4)  $\sqrt[4]{x - 2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x - 2}} = 2 - |x - 3|$ .
3. 1)  $\sqrt{x - 1} + \sqrt[4]{x^2 - 1} + \sqrt[6]{x^3 - 1} = 0$ ;                      2)  $|\sqrt{x} - 2| + |\sqrt{y} - 5| + \sqrt[4]{xy - 100} = 0$ .
4. 1)  $\sqrt{x - 7} + \sqrt[3]{x} = 3$ ;                      2)  $\sqrt[4]{x + 12} + \sqrt[3]{x - 3} = 3$ ;  
3)  $2\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{x + 2} = 6 - \sqrt[4]{8x}$ ;                      4)  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} = \frac{2}{x}$ .
5. 1)  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}, \\ 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 2; \end{cases}$                       2)  $\begin{cases} x^3 - \sqrt[3]{y} = y^3 - \sqrt[3]{x}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

## 13.2. Приклади використання інших способів розв'язування ірраціональних рівнянь

Якщо, розв'язуючи ірраціональні рівняння, ми використовуємо рівняння-наслідки (як у § 11), то в кінці слід виконувати перевірку одержаних розв'язків. Але в тих випадках, коли ці розв'язки — не



раціональні числа, перевірка за допомогою підстановки одержаних значень у початкове рівняння є достатньо складною і громіздкою. Для таких рівнянь доводиться використовувати рівносильні перетворення на кожному кроці розв'язування. При цьому необхідно пам'ятати, що всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконують на ОДЗ заданого рівняння чи нерівності (пункт 3.1), тому, виконуючи рівносильні перетворення ірраціональних рівнянь, необхідно враховувати ОДЗ заданого рівняння. Також досить часто в цих випадках міркують так: *для всіх коренів заданого рівняння знаки лівої і правої частин рівняння збігаються*, оскільки при підстановці в задане рівняння числа, яке є його коренем, одержують правильну числову рівність. Використовуючи останнє міркування, часто вдається одержати якусь додаткову умову для коренів заданого рівняння і виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ даного рівняння, а на якійсь її частині.

**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1} = 1$ .

#### Розв'язання

▶ ОДЗ: 
$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ x+1 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи:  $x \geq -\frac{1}{2}$ .

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} &= 1 + \sqrt{x+1}, \\ (\sqrt{2x+1})^2 &= (1 + \sqrt{x+1})^2, \\ 2x+1 &= 1 + 2\sqrt{x+1} + x+1, \\ x-1 &= 2\sqrt{x+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для всіх коренів рівняння (1)

$$x-1 \geq 0. \quad (2)$$

За цієї умови рівняння (1) рівносильне рівнянням:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= (2\sqrt{x+1})^2, \\ x^2 - 2x + 1 &= 4(x+1), \\ x^2 - 6x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Тоді  $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$ .

#### Коментар

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння.

Ураховуючи, що всі рівносильні перетворення виконуються на ОДЗ заданого рівняння, зафіксуємо його ОДЗ.

Переносячи вираз  $(-\sqrt{x+1})$  із лівої частини рівняння в праву з протилежним знаком, одержуємо рівняння, рівносильне заданому.

У рівнянні  $\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{x+1}$  обидві частини невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівняння, рівносильне заданому, яке рівносильне рівнянню (1).

Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. У цій рівності права частина — невід'ємне число ( $2\sqrt{x+1} \geq 0$ ), тоді і ліва частина є невід'ємним числом, тобто  $x-1 \geq 0$  для всіх коренів.

$x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$  — входить до ОДЗ і задовольняє умові (2), отже, є коренем заданого рівняння;  
 $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$  — входить до ОДЗ, але не задовольняє умові (2), отже, не є коренем заданого рівняння.

Відповідь:  $3 + 2\sqrt{2}$ . ◁

Тоді за умови (2) обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівносильне рівняння. Але після того як знайдено корені цього рівняння, необхідно перевірити не тільки те, чи входять вони до ОДЗ, а й чи задовольняють умові (2). Для такої перевірки достатньо взяти наближені значення коренів  $x_1 \approx 6,4$  та  $x_2 \approx -0,4$ .

### Приклад 2

Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x+2$ .

#### Коментар

Заміна  $\sqrt{x-1} = t$  дає змогу помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу  $\sqrt{a^2} = |a|$ , одержуємо рівняння, що містить знак модуля, для розв'язування якого використовуємо такий план:

- 1) знайти ОДЗ;
- 2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
- 3) позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
- 4) знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.

#### Розв'язання

► Нехай  $\sqrt{x-1} = t$ , де  $t \geq 0$ . Тоді  $x - 1 = t^2$ ;  $x = t^2 + 1$ .

Одержуємо рівняння  $\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+1-2t} = t^2+3$ ,

яке можна записати так:  $\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = t^2+3$ . Звідси

$$|t-2| + |t-1| = t^2+3. \quad (1)$$

- 1) ОДЗ рівняння (1):  $t \in \mathbf{R}$ , але за змістом завдання це рівняння потрібно розв'язати при  $t \geq 0$ .
- 2) Нулі підмодульних функцій:  $t = 2$  і  $t = 1$ .
- 3) Ці нулі розбивають область  $t \geq 0$  на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (рис. 96).

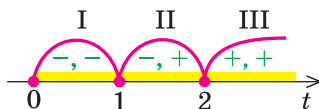


Рис. 96

Проміжок I. При  $t \in [0; 1]$  маємо рівняння

$$-(t-2) - (t-1) = t^2+3.$$

Тоді  $t^2 + 2t = 0$ ,  $t = 0$  або  $t = -2$ , але в проміжок  $[0; 1]$  входить тільки  $t = 0$ .

Проміжок II. При  $t \in [1; 2]$  маємо рівняння

$-(t-2) + (t-1) = t^2 + 3$ , яке рівносильне рівнянню  $t^2 = -2$ , що не має коренів. Отже, у проміжку  $[1; 2]$  коренів немає.

Проміжок III. При  $t \in [2; +\infty)$  маємо рівняння

$(t-2) + (t-1) = t^2 + 3$ , з якого одержуємо рівняння  $t^2 - 2t + 6 = 0$ , що не має коренів. Отже, у проміжку  $[2; +\infty)$  коренів немає.

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що рівняння (1) має тільки один корінь  $t = 0$ .

Виконуючи обернену заміну, маємо  $\sqrt{x-1} = 0$ , звідки  $x = 1$ .

*Відповідь:* 1.  $\triangleleft$

**Приклад 3** Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(x-6)^2} - 3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)} + 2\sqrt[3]{(2x+3)^2} = 0.$$

#### Розв'язання

► Оскільки  $x = 6$  не є коренем заданого рівняння, то при діленні обох частин рівняння на  $\sqrt[3]{(x-6)^2} \neq 0$  одержуємо рівносильне рівняння

$$1 - 3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} + 2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2} = 0.$$

Після заміни  $t = \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$  маємо рівняння  $2t^2 - 3t + 1 = 0$ , корені якого:

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Виконавши обернену заміну, одержуємо:

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = 1 \quad \text{або} \quad \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2x+3}{x-6} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{2x+3}{x-6} = \frac{1}{8},$$

$$x = -9 \quad \text{або} \quad x = -2.$$

*Відповідь:* -9; -2.  $\triangleleft$

#### Коментар

Виконуємо заміну  $\sqrt[3]{x-6} = u$ ,  $\sqrt[3]{2x+3} = v$  та одержуємо рівняння  $u^2 - 3uv + 2v^2 = 0$ , усі члени якого мають однаковий сумарний степінь<sup>1</sup> — два. Таке рівняння називають *однорідним і розв'язують діленням обох частин на найвищий степінь однієї із змінних*. Розділимо обидві частини, наприклад, на  $u^2$  (тобто на  $\sqrt[3]{(x-6)^2}$ ).

Щоб при діленні на вираз із змінною не загубити корені рівняння, потрібно ті значення змінної, при яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо, тобто в цьому прикладі підставити значення  $x = 6$  в задане рівняння (це можна виконати усно, до розв'язання записати тільки одержаний результат).

Для того щоб здійснити такий план розв'язування, не обов'язково вводити змінні  $u$  і  $v$ : достатньо помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на  $\sqrt[3]{(x-6)^2}$ , а вже потім ввести нову змінну  $t$ .

<sup>1</sup> В означенні однорідного рівняння не враховують член 0, який степіня не має.

**Запитання для контролю**

1. Поясніть, які обмеження доведеться накласти на змінну  $x$ , щоб розв'язати рівняння  $\sqrt{x-2} = x-6$  за допомогою рівносильних перетворень.
2. Наведіть приклад однорідного ірраціонального рівняння. Складіть план його розв'язування.

**Вправи**

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння за допомогою рівносильних перетворень:
 

1) $\sqrt{3x-2} = 5-x$ ;	2) $\sqrt{3-2x} - \sqrt{1-x} = 1$ ;
3) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$ ;	4) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = \sqrt{4x+9}$ .

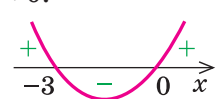
Розв'яжіть рівняння (2-5).
2. 1)  $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x+1$ ;    2)  $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}} = 1$ .
3. 1)  $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 3\sqrt[3]{x^2-1}$ ;    2)  $x^2 + x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0$ .
4. 1)  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = \sqrt[4]{x^2-3x+2}$ ;    2)  $\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{2x+1} = 2$ .
5. 1)  $\frac{x\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^3-1}} + \frac{\sqrt[5]{x^3-1}}{\sqrt[5]{x-1}} = 16$ ;    2)  $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}} + \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} = \frac{1}{3}$ .

**§ 14 ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ**

Таблиця 23

Орієнтир	Приклад
1. Метод інтервалів (для нерівностей виду $f(x) \geq 0$ )	
<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Знайти ОДЗ нерівності.</li> <li>2) Знайти нулі функції <math>f(x)</math> (<math>f(x) = 0</math>).</li> <li>3) Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції в кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.</li> <li>4) Записати відповідь, урахувавши знак нерівності</li> </ol>	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\sqrt{x+4} &gt; x+2</math>.</p> <p>► Задана нерівність рівносильна нерівності <math>\sqrt{x+4} - x - 2 &gt; 0</math>.</p> <p>Позначимо <math>f(x) = \sqrt{x+4} - x - 2</math>.</p> <p>ОДЗ: <math>x + 4 \geq 0</math>, тобто <math>x \geq -4</math>.</p> <p>Нулі <math>f(x)</math>: <math>\sqrt{x+4} - x - 2 = 0</math>, <math>\sqrt{x+4} = x+2</math>, <math>x+4 = x^2 + 4x + 4</math>, <math>x^2 + 3x = 0</math>, <math>x_1 = 0</math> — корінь, <math>x_2 = -3</math> — сторонній корінь.</p> <p>Відмічаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак функції <math>f(x)</math> у кожному проміжку.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>Відповідь: <math>[-4; 0)</math>. &lt;</p>

Продовження табл. 23

2. Рівносильні перетворення	
<p>1) При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)</p>	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\sqrt[3]{x+2} &lt; -1</math>.</p> <p>► ОДЗ: <math>x \in \mathbf{R}</math>.</p> <p>Задана нерівність рівносильна нерівностям:</p> $(\sqrt[3]{x+2})^3 < (-1)^3, \quad x+2 < -1, \quad x < -3.$ <p>Відповідь: <math>(-\infty; -3)</math>. ◀</p>
<p>2) Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)</p>	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\sqrt[4]{2x-6} &lt; 1</math>.</p> <p>► ОДЗ: <math>2x - 6 \geq 0</math>, тобто <math>x \geq 3</math>. Обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, вона рівносильна (на її ОДЗ) нерівностям:</p> $(\sqrt[4]{2x-6})^4 < 1^4, \quad 2x - 6 < 1, \quad x < \frac{7}{2}.$ <p>Ураховуючи ОДЗ, одержуємо</p> $3 \leq x < \frac{7}{2}.$ <p>Відповідь: <math>\left[3; \frac{7}{2}\right)</math>. ◀</p>
<p>3) Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки слід розглядати окремо.</p> <p>Наприклад,</p> $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$	<p>Розв'яжіть нерівність <math>\sqrt{x+4} &gt; x+2</math>.</p> <p>► Задана нерівність рівносильна сукупності систем:</p> $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ (\sqrt{x+4})^2 > (x+2)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+4 \geq 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$ <p>Тоді <math>\begin{cases} x \geq -2, \\ x^2 + 3x &lt; 0 \end{cases}</math> або <math>\begin{cases} x \geq -4, \\ x &lt; -2. \end{cases}</math></p> <p>Розв'язавши нерівність <math>x^2 + 3x &lt; 0</math>, маємо <math>-3 &lt; x &lt; 0</math>.</p>  <p>Ураховуючи нерівність <math>x \geq -2</math>, одержуємо розв'язок першої системи: <math>-2 \leq x &lt; 0</math>. Розв'язок другої системи: <math>-4 \leq x &lt; -2</math>. Об'єднуючи ці розв'язки, одержуємо відповідь.</p> <p>Відповідь: <math>[-4; 0)</math>. ◀</p>

### Пояснення й обґрунтування

1. **Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів.** Загальну схему розв'язування нерівностей методом інтервалів пояснено в § 4 розділу 1, а приклад застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціональних нерівностей наведено в таблиці 23.

2. **Рівносильні перетворення ірраціональних нерівностей.** Коли для розв'язування ірраціональних нерівностей використовують рівносильні перетворення, то найчастіше за допомогою піднесення обох частин нерівності до одного й того самого степеня задана нерівність зводиться до раціональної нерівності. При цьому потрібно мати на увазі такі властивості.

1) Якщо обидві частини нерівності доводиться підносити до непарного степеня, то скористаємося тим, що *числові нерівності*  $A > B$  і  $A^{2k+1} > B^{2k+1}$  або одночасно *правильні, або одночасно неправильні*. Тоді кожен розв'язок нерівності

$$f(x) > g(x) \quad (1)$$

(який перетворює цю нерівність у правильну числову нерівність) буде також і розв'язком нерівності

$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \quad (2)$$

і, навпаки, кожен розв'язок нерівності (2) буде також і розв'язком нерівності (1), тобто нерівності (1) і (2) — рівносильні. Отже, **при піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**

Наприклад,

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$$

2) Аналогічно, якщо числа  $A$  і  $B$  невід'ємні ( $A \geq 0$ ,  $B \geq 0$ ), то *числові нерівності*  $A > B$  і  $A^{2k} > B^{2k}$  також або одночасно *правильні, або одночасно неправильні*. Повторюючи попередні міркування, маємо: якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої). Наприклад, розглядаючи нерівність

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \quad (3)$$

на її ОДЗ, де  $f(x) \geq 0$ , помічаємо, що для всіх розв'язків нерівності (3) ліва частина невід'ємна (арифметичний корінь  $\sqrt[2k]{f(x)} \geq 0$ ) і нерівність (3) може виконуватися тільки за умови

$$g(x) > 0. \quad (4)$$

Якщо виконується умова (4), то обидві частини нерівності (3) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня  $2k$  одержуємо нерівність,

рівносильну заданій:  $f(x) < g^{2k}(x)$  (звичайно, за умови врахування ОДЗ заданої нерівності та умови (4)). Отже,

$${}^{2k}\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$$

3) Якщо за допомогою рівносильних перетворень необхідно розв'язати нерівність

$${}^{2k}\sqrt{f(x)} > g(x) \quad (5)$$

на її ОДЗ, де  $f(x) \geq 0$ , то для правої частини цієї нерівності розглянемо два випадки: а)  $g(x) < 0$ ; б)  $g(x) \geq 0$ .

а) При  $g(x) < 0$  нерівність (5) виконується для всіх  $x$  з ОДЗ заданої нерівності, тобто при  $f(x) \geq 0$ .

б) При  $g(x) \geq 0$  обидві частини нерівності (5) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня  $2k$  одержуємо нерівність, рівносильну заданій:

$$f(x) > g^{2k}(x). \quad (6)$$

Зауважимо, що для всіх розв'язків нерівності (6) обмеження ОДЗ заданої нерівності  $f(x) \geq 0$  виконується автоматично; отже, при  $g(x) \geq 0$  достатньо записати тільки нерівність (6).

Об'єднуючи одержані результати, доходимо висновку, що:

$${}^{2k}\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

## Приклади розв'язання завдань

**Приклад 1** Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$ .

*Коментар*

Зведемо нерівність до виду  $f(x) > 0$  і розв'яжемо її методом інтервалів.

Для того щоб знайти нулі функції  $f(x)$ , використаємо рівняння-наслідки. Щоб вилучити сторонні корені, виконаємо перевірку одержаних розв'язків.

*Розв'язання*

► Задана нерівність рівносильна нерівності  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$ .

Позначимо  $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$ .

$$1. \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0. \end{cases} \text{ Тоді } \begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 1, \\ x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ тобто } x \geq 1.$$

2. Нулі функції  $f(x)$ :  $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} = 0$ . Тоді:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} &= \sqrt{2x-1}, & (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})^2 &= (\sqrt{2x-1})^2, \\ x+3 - 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-1} + x-1 &= 2x-1, & 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-1} &= 3.\end{aligned}$$

Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$$4(x+3)(x-1) = 9, \quad 4x^2 + 8x - 21 = 0,$$

$$x_1 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ — корінь, } x_2 = -\frac{7}{2} \text{ — сторонній корінь.}$$

3. Розбиваємо ОДЗ точкою 1,5 на два проміжки і знаходимо знак  $f(x)$  у кожному з проміжків (рис. 97).

Відповідь:  $[1; 1,5)$ .  $\triangleleft$

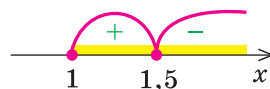


Рис. 97

**Приклад 2** Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$ .

I спосіб (метод інтервалів)

*Коментар*

Зведемо задану нерівність до виду  $f(x) > 0$  і розв'яжемо її методом інтервалів. Для того щоб знайти ОДЗ заданої нерівності, теж застосуємо метод інтервалів, розв'язуючи нерівність  $\frac{x^3+8}{x} \geq 0$  (ОДЗ:  $x \neq 0$ ;  $\frac{x^3+8}{x} = 0$  при  $x = -2$ ).

Для знаходження нулів функції  $f(x)$  використаємо рівняння-наслідки.

Хоча функція  $f(x)$  не має нулів, але й у цьому випадку метод інтервалів також працює. Тільки інтервали знакосталості функції  $f(x)$  збігаються з інтервалами, з яких складається її область визначення.

*Розв'язання*

► Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} - x + 2 > 0. \quad (1)$$

Позначимо  $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+8}{x}} - x + 2$ .

1. ОДЗ:  $\begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$  Розв'яжемо нерівність  $\frac{x^3+8}{x} \geq 0$

методом інтервалів (рис. 98).

Одержуємо:  $x \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ .

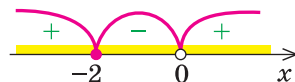


Рис. 98

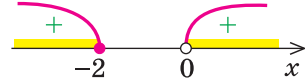
2. Нулі функції  $f(x)$ :  $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} - x + 2 = 0$ . Тоді:



$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} = x-2, \quad \frac{x^3+8}{x} = x^2-4x+4, \quad x^3+8 = x^3-4x^2+4x,$$

$4x^2 - 4x + 8 = 0$  — коренів немає ( $D < 0$ ).

3. ОДЗ нерівності (1) розбивається на два проміжки, у яких функція  $f(x)$  має знаки, указані на рисунку 99.



Відповідь:  $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ .  $\triangleleft$

Рис. 99

### II спосіб (рівносильні перетворення)

#### Коментар

Для розв'язування використаємо рівносильні перетворення:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Щоб розв'язати одержану проміжну нерівність  $\frac{x^3+8}{x} \geq 0$ , урахуємо умови, за яких цей дріб буде невід'ємним.

У кінці, об'єднуючи одержані розв'язки, отримуємо відповідь.

#### Розв'язання

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \frac{x^3+8}{x} > (x-2)^2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geq 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{x^3+8}{x} > x^2-4x+4, \end{cases} \\ \text{або} \begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \frac{4x^2-4x+8}{x} > 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x^3+8}{x} \geq 0 \\ x > 0, \\ x < 2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^3+8 \leq 0, \\ x < 0, \\ x < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ураховуючи, що  $4x^2 - 4x + 8 > 0$  при всіх значеннях  $x$  ( $D < 0$  і  $a = 4 > 0$ ), одержуємо, що остання сукупність трьох систем рівносильна

$$\text{сукупності: } \begin{cases} x \geq 2, \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \geq -2, \\ x > 0, \\ x < 2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x \leq -2, \\ x < 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2, \text{ або } 0 < x < 2, \text{ або } x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -2, \text{ або } x > 0.$$

Відповідь:  $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ .  $\triangleleft$

Зауваження. Записуючи наведене розв'язання, знаки рівносильності ( $\Leftrightarrow$ ) можна не ставити, достатньо на початку розв'язання записати: «Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності».

**Приклад 3.** Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}} + \sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}} \leq 1. \quad (1)$$

*Коментар*

Заміна  $\sqrt{3x+5} = t$  дозволяє помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу  $\sqrt{a^2} = |a|$ , одержуємо нерівність, що містить знак модуля, для розв'язування якої використовуємо такий план:

- 1) знайти ОДЗ;
- 2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
- 3) відмітити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
- 4) знайти розв'язки нерівності в кожному з проміжків.

*Розв'язання*

► Нехай  $\sqrt{3x+5} = t$ , де  $t \geq 0$ . Тоді  $3x + 5 = t^2$ ,  $3x = t^2 - 5$ .

Отримуємо нерівність  $\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+9-6t} \leq 1$ , яку можна записати так:

$$\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} \leq 1. \quad \text{Одержуємо} \\ |t-2| + |t-3| \leq 1. \quad (2)$$

1. ОДЗ нерівності (2):  $t \in \mathbf{R}$ , але за змістом завдання цю нерівність потрібно розв'язати при  $t \geq 0$ .
2. Нулі підмодульних функцій:  $t = 2$  і  $t = 3$ .
3. Ці нулі розбивають область  $t \geq 0$  на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (рис. 100).

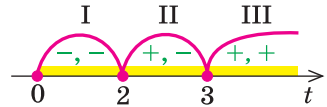


Рис. 100

Проміжок I. При  $t \in [0; 2]$  маємо нерівність  $-(t-2) - (t-3) \leq 1$ , з якої одержуємо  $t \geq 2$ , але в проміжок  $[0; 2]$  входить тільки  $t = 2$ .

Проміжок II. При  $t \in [2; 3]$  маємо нерівність  $(t-2) - (t-3) \leq 1$ , яка рівносильна нерівності  $0 \cdot t \leq 0$ , що виконується при будь-яких значеннях  $t$ . Отже, у проміжку  $[2; 3]$  розв'язками нерівності будуть усі значення  $t$  із цього проміжку ( $2 \leq t \leq 3$ ).

Проміжок III. При  $t \in [3; +\infty)$  маємо нерівність  $(t-2) + (t-3) \leq 1$ , з якої одержуємо  $t \leq 3$ , але в проміжок  $[3; +\infty)$  входить тільки значення  $t = 3$ .

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що розв'язками нерівності (2) будуть усі значення  $t$  такі, що  $2 \leq t \leq 3$ .

Виконуючи обернену заміну, маємо  $2 \leq \sqrt{3x+5} \leq 3$ , звідки

$$4 \leq 3x + 5 \leq 9.$$

$$\text{Тоді } -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]. \triangleleft$$

### Заяпитання для контролю

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних нерівностей.
2. Назвіть основні етапи розв'язування ірраціональної нерівності методом інтервалів.
3. Обґрунтуйте справедливість таких рівносильних перетворень:

$$1) \sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x);$$

$$2) \sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$$

$$3) \sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

### Вправи

Розв'яжіть нерівність (1–8).

1. 1)  $\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x$ ;      2)  $\sqrt{x^2 - 3x} < 5 - x$ .
2. 1)  $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$ ;      2)  $(x - 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq x^2 - 1$ .
3. 1)  $\frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{2x + 5} \leq \frac{\sqrt{6 + x - x^2}}{x + 4}$ ;      2)  $\frac{\sqrt{3 - 2x - x^2}}{x + 8} \leq \frac{\sqrt{3 - 2x - x^2}}{2x + 1}$ .
4. 1)  $\sqrt{x - 2} + \sqrt{2x + 5} \geq 3$ ;      2)  $\sqrt{2x - 20} + \sqrt{x + 15} \geq 5$ .
5. 1)  $\frac{14}{3 - \sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + 5$ ;      2)  $\frac{x - \sqrt{x} - 2}{x - \sqrt{x} - 6} > 0$ .
6. 1)  $\sqrt{\frac{x^3 + 27}{x}} > x - 3$ ;      2)  $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$ .
- 7\*. 1)  $\sqrt{5x + 8 - 6\sqrt{5x - 1}} + \sqrt{5x + 24 - 10\sqrt{5x - 1}} \leq 2$ ;  
2)  $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} > 1$ .
- 8\*. 1)  $(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{x}(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1) \leq 0$ ;  
2)  $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + 2)\sqrt{x} - \frac{1}{x}(\sqrt{10x - 2x^2 - 12} + 2) \geq 0$ .

## § 15

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ  
ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

При розв'язуванні завдань з параметрами, у яких вимагається розв'язати рівняння чи нерівність, можна користуватися таким орієнтиром (§ 9): *будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами розв'язують як звичайні рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Але в тому разі, коли якесь перетворення не можна виконати однозначно, розв'язування необхідно розбити на декілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.*

Також на етапі пошуку плану розв'язування рівнянь чи нерівностей з параметрами або міркуючи над самим розв'язанням, часто буває зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у якій саме момент ми не змогли однозначно виконати потрібні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого.

Зазначимо, що рівняння та нерівності з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою їх рівносильних перетворень, хоча інколи використовують і властивості функцій, метод інтервалів для розв'язування нерівностей та рівняння-наслідки.

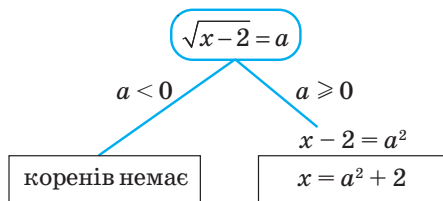
**Приклад 1** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x-2} = a$ .

*Коментар*

Ми не можемо однозначно дати відповідь на запитання, чи є в заданого рівняння корені, і тому вже на першому кроці повинні розбити розв'язання на два випадки:

1)  $a < 0$  — коренів немає, 2)  $a \geq 0$  — корені є (див. схему).

При  $a \geq 0$  маємо найпростіше ірраціональне рівняння, обидві частини якого невід'ємні. Отже, при піднесенні до квадрата обох його частин одержуємо рівняння, рівносильне заданому. ОДЗ заданого рівняння можна не записувати, її враховано автоматично, бо для всіх коренів одержаного рівняння  $x - 2 = a^2 \geq 0$ .

*Розв'язання*

- 1) При  $a < 0$  рівняння не має коренів.  
2) При  $a \geq 0$   $x - 2 = a^2$ . Тоді  $x = a^2 + 2$ .

*Відповідь:* 1) якщо  $a < 0$ , то коренів немає;  
2) якщо  $a \geq 0$ , то  $x = a^2 + 2$ . ◀

**Приклад 2** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-1} = 3$ .

*Розв'язання*<sup>1</sup>

$$\sqrt{x+a} = 3 - \sqrt{x-1}. \quad (1)$$

Для всіх коренів рівняння (1):

$$3 - \sqrt{x-1} \geq 0. \quad (2)$$

Тоді рівняння (1) рівносильне рівнянням:

$$x+a = (3 - \sqrt{x-1})^2, \quad (3)$$

$$x+a = 9 - 6\sqrt{x-1} + x-1,$$

$$\sqrt{x-1} = \frac{8-a}{6}. \quad (4)$$

Для всіх коренів рівняння (4):

$$\frac{8-a}{6} \geq 0. \quad (5)$$

Тоді рівняння (4) рівносильне рівнянню

$$x-1 = \left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \quad (6)$$

Отже,  $x = \left(\frac{8-a}{6}\right)^2 + 1$ .

Урахуємо обмеження (2) і (5):

$$3 - \sqrt{x-1} = 3 - \sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2} = 3 - \left|\frac{8-a}{6}\right|.$$

За умовою (5)  $\frac{8-a}{6} \geq 0$ , тоді

$$\left|\frac{8-a}{6}\right| = \frac{8-a}{6}. \text{ Отже, умови (2) і (5) за-}$$

дають систему 
$$\begin{cases} 3 - \frac{8-a}{6} \geq 0, \\ \frac{8-a}{6} \geq 0, \end{cases} \text{ тобто}$$

$$\begin{cases} a \geq -10, \\ a \leq 8, \end{cases} \text{ тоді } -10 \leq a \leq 8.$$

*Коментар*

Використаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати його ОДЗ:

$$\begin{cases} x+a \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\quad \quad \quad (8)$$

При перенесенні члена заданого рівняння з лівої частини в праву з протилежним знаком одержали рівносильне рівняння (1).

Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. Його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина має бути невід'ємною. Тоді далі можна розв'язувати рівняння (1) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, що задана умовою (2).

За цієї умови обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (3) (а після рівносильних перетворень — рівняння (4)).

Для всіх коренів рівняння (3) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною:  $x+a \geq 0$ . Але тоді умову (7) ОДЗ заданого рівняння враховано автоматично і її можна не записувати до розв'язання.

Також для всіх коренів рівняння (4) його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина повинна бути невід'ємною. Тому далі можна розв'язувати рівняння (4) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, яка задана умовою (5). Тоді обидві частини рівняння (4) невід'ємні, і після

<sup>1</sup> У записі розв'язання прикладів 2–6 у рамках виділено обмеження, які довелися накласти в процесі рівносильних перетворень заданого рівняння чи нерівності.

Відповідь:

1) при  $-10 \leq a \leq 8$   $x = \left(\frac{8-a}{6}\right)^2 + 1$ ;

2) при  $a < -10$  або  $a > 8$  коренів немає.  $\triangleleft$

піднесення обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (6).

Для всіх коренів рівняння (6) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною:  $x - 1 \geq 0$ . Тоді й умову (8) ОДЗ заданого рівняння враховано автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання.

**Приклад 3** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$ .

*Розв'язання*

*Коментар*

► Для всіх коренів даного рівняння  $x \geq 0$  (1)

Тоді задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$a + \sqrt{a + x} = x^2, \quad (2)$$

$$\sqrt{a + x} = x^2 - a. \quad (3)$$

Для всіх коренів рівняння (3)  $x^2 - a \geq 0$ . (4)

Тоді рівняння (3) рівносильне рівнянням:

$$a + x = (x^2 - a)^2, \quad (5)$$

$$a + x = x^4 - 2ax^2 + a^2. \quad (6)$$

Розглянемо рівняння (6) як квадратне відносно  $a$ :

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

$$\text{Тоді } a = \frac{(2x^2 + 1) \pm (2x + 1)}{2}.$$

Отже,  $a = x^2 + x + 1$  або  $a = x^2 - x$ .

Звідси

$$x^2 - a + x + 1 = 0 \quad (7)$$

або

$$x^2 - a = x. \quad (8)$$

Ураховуючи умови (1) і (4), одержимо, що  $(x^2 - a) + x + 1 \geq 1$ , отже, рівняння (7) не має коренів.

Як і в прикладі 2, ОДЗ заданого рівняння  $\begin{cases} a + \sqrt{a + x} \geq 0, \\ a + x \geq 0 \end{cases}$  буде врахована

автоматично при переході до рівнянь (2) та (5) (для всіх коренів цих рівнянь), отже, її можна не записувати в розв'язанні.

Міркування при виконанні рівносильних перетворень заданого рівняння (до рівнянь (2)–(3)–(5)–(6)) повністю аналогічні міркуванням, наведеним у Коментарі до прикладу 2.

Аналізуючи рівняння (6) (яке достатньо важко розв'язати відносно змінної  $x$ ), користуємося орієнтиром, який умовно можна назвати «Шукай квадратний тричлен», а саме: *спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції)*. У даному випадку розглянемо це рівняння як квадратне відносно параметра  $a$  (цей спосіб ефективно спрацьовує тільки тоді, коли дискримінант одержаного квадратного тричлена є повним квадратом, як у розглянутому випадку).

Якщо для коренів рівняння (8) виконується умова (1) ( $x \geq 0$ ), то автоматично виконується й умова (4) ( $x^2 - a \geq 0$ ).

Із рівняння (8) одержимо

$$x^2 - x - a = 0.$$

Це рівняння має корені, якщо

$$D = 1 + 4a \geq 0, \text{ тобто при } a \geq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Тоді } x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Для  $x_1$  умова  $x \geq 0$  виконується, отже,  $x_1$  — корінь заданого рівняння при  $a \geq -\frac{1}{4}$ .

Урахуємо умову  $x \geq 0$  для  $x_2$ :

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \geq 0, \quad \sqrt{1 + 4a} \leq 1,$$

$$0 \leq 1 + 4a \leq 1, \quad -\frac{1}{4} \leq a \leq 0.$$

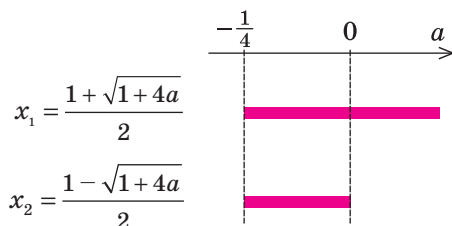
*Відповідь:* 1) при  $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2};$$

2) при  $a > 0$   $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ ;

3) при  $a < -\frac{1}{4}$  коренів немає. ◁

Перед записом відповіді зручно зобразити на рисунку всі одержані розв'язки і напроти кожного розв'язку відмітити, при яких значеннях параметра цей розв'язок можна використовувати (див. с. 143).



Із цього рисунку видно, що при  $a > 0$  у відповідь потрібно записати тільки одну формулу ( $x_1$ ), при  $-\frac{1}{4} \leq a \leq 0$  — дві формули ( $x_1$  і  $x_2$ ), а при  $a < -\frac{1}{4}$  коренів немає.

**Приклад 4.** Розв'яжіть нерівність  $x + 4a > 5\sqrt{ax}$ .

*Розв'язання*

*Коментар*

► Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} ax \geq 0, \\ x + 4a > 0, \\ (x + 4a)^2 > 25ax. \end{cases} \quad (1)$$

Використаємо рівносильні перетворення. Для цього врахуємо ОДЗ заданої нерівності ( $ax \geq 0$ ) і те, що права частина невід'ємна, отже, для всіх розв'язків заданої нерівності її ліва частина повинна бути додатною ( $x + 4a > 0$ ). За цієї умови (на ОДЗ)

При  $a = 0$  одержуємо систему

$$\begin{cases} 0 \cdot x \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 > 0, \end{cases} \text{ розв'язком якої є } x > 0.$$

При  $a > 0$  одержуємо систему

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'яжемо окремо нерівність  $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ .

Оскільки  $x^2 - 17ax + 16a^2 = 0$  при  $x = a$  та  $x = 16a$ , то при  $a > 0$  одержуємо  $x < a$  або  $x > 16a$ .

Тоді система (2) має розв'язки:  $0 \leq x < a$  або  $x > 16a$ .

При  $a < 0$  одержуємо систему

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) розв'язків не має, оскільки при  $a < 0$  перша і друга нерівності не мають спільних розв'язків.

*Відповідь:* при  $a = 0$   $x > 0$ ;

при  $a > 0$   $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$ ;

при  $a < 0$  розв'язків немає.  $\triangleleft$

обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин нерівності до квадрата одержимо рівносильну нерівність. Отримуємо систему (1).

Для розв'язування нерівності  $ax \geq 0$  необхідно розглянути три випадки:  $a = 0$  (ділити на  $a$  не можна);  $a > 0$  (знак нерівності зберігається при діленні обох її частин на  $a$ );  $a < 0$  (знак нерівності змінюється).

При  $a > 0$  значення  $-4a < 0$ , тому перші дві нерівності системи (2) мають спільний розв'язок  $x \geq 0$ , а для розв'язування нерівності  $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$  можна використати графічну ілюстрацію:



При  $a < 0$  значення  $-4a > 0$ , тому перші дві нерівності системи (3) не мають спільних розв'язків, отже, і вся система (3) не має розв'язків.

**Приклад 5.** Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{x-a} > x+1$ .

*Коментар*

Спочатку скористаємося рівносильними перетвореннями:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Якщо в одержаній системі параметр  $a$  входить лінійно, то в таких випадках іноді буває зручно виразити параметр через змінну, розглянути параметр як функцію від цієї змінної і використати графічну ілюстрацію розв'язування нерівностей (у системі координат  $xOa$ ).



Зазначимо, що для зображення розв'язків сукупності нерівностей зручно використовувати дві системи координат, у яких осі  $Ox$  розташовані на одній прямій, і на кожній виділяти штриховкою відповідні розв'язки.

При різних значеннях  $a$  пряма  $a = \text{const}$  або не перетинає заштриховані області (при  $a \geq -\frac{3}{4}$ ), або перетинає їх по відрізках. Абсциси точок перетину є розв'язками систем (1) і (2), а отже, і розв'язками заданої нерівності.

*Розв'язання*

► Задана нерівність рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-a \geq 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

або

$$\begin{cases} a \leq x, \\ x < -1. \end{cases} \quad (2)$$

Зобразимо графічно розв'язки систем нерівностей (1) і (2) у системі координат  $xOa$  (на рис. 101,  $a$ ,  $b$  зафарбовано відповідні області ① і ②).

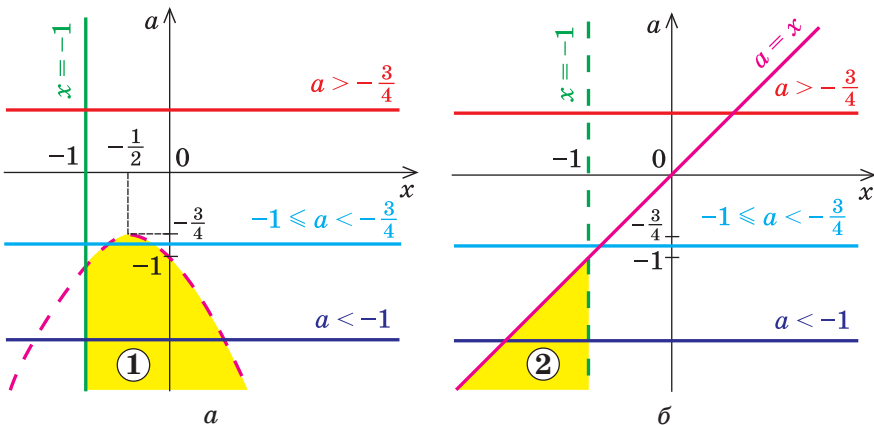


Рис. 101

Бачимо, що при  $a \geq -\frac{3}{4}$  розв'язків немає (немає зафарбованих то-

чок); якщо  $-1 \leq a < -\frac{3}{4}$ , то пряма  $a = \text{const}$  перетинає тільки зафарбо-

вану область ①. Причому одержаний інтервал обмежений зліва і справа вітками параболи  $a = -x^2 - x - 1$ . Але для відповіді нам потрібно записати  $x$  через  $a$ . Для цього з рівняння  $x^2 + x + a + 1 = 0$  знаходимо  $x$ :

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a - 1}.$$

Як бачимо,  $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a} > -\frac{1}{2}$ , тобто  $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$  — рівняння правої вітки параболи, а  $x = -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$  — лівої.

Тоді відповідь у цьому випадку буде такою:

$$-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a};$$

якщо  $a < -1$ , то пряма  $a = \text{const}$  перетинає заштриховані області ① і ②. Для області ① інтервал для  $x$  зліва обмежений прямою  $x = -1$ , а справа — правою віткою параболи, тобто  $-1 \leq x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}$ . Для області ② інтервал для  $x$  обмежений зліва прямою  $x = a$ , а справа — прямою  $x = -1$ , тобто  $a \leq x < -1$ . Об'єднання цих інтервалів можна коротше записати так:

$$a \leq x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}.$$

Відповідь: 1) при  $a \geq -\frac{3}{4}$  — розв'язків немає;

$$2) \text{ при } -1 \leq a < -\frac{3}{4} \quad -\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4} - a} < x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a};$$

$$3) \text{ при } a < -1 \quad a \leq x < -\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} - a}. \triangleleft$$

Для розв'язування деяких дослідницьких завдань з параметрами можна використати властивості квадратного тричлена і, зокрема, умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданих чисел (табл. 16).

**Приклад 6.** Знайдіть усі значення параметра  $k$ , при яких має корені рівняння  $x + 2k\sqrt{x+1} - k + 3 = 0$ .

#### Розв'язання

► Заміна  $\sqrt{x+1} = t$ , де  $t \geq 0$  (тоді  $x = t^2 - 1$ ). Одержуємо рівняння

$$t^2 + 2kt - k + 2 = 0. \quad (1)$$

#### Коментар

Якщо ірраціональне рівняння містить тільки один корінь, то інколи можна звести таке рівняння до раціонального, позначивши цей корінь

Задане рівняння буде мати корені тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) буде мати хоча б один невід'ємний корінь ( $t \geq 0$ ).

Випадок  $t = 0$  дослідимо окремо. При  $t = 0$  з рівняння (1) маємо  $k = 2$ . Отже, при  $k = 2$  рівняння (1) має корінь  $t = 0$ . Тоді й задане рівняння має корінь  $x = -1$ , тобто  $k = 2$  задовольняє умові задачі.

Позначимо  $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ .

Рівняння (1) може мати хоча б один додатний корінь в одному з двох випадків:

1) один корінь додатний і один від'ємний — для цього необхідно й достатньо виконання умови

$$f(0) < 0;$$

2) обидва корені додатні — для цього необхідно й достатньо виконання системи умов:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geq 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

З умови  $f(0) < 0$  отримуємо:

$$-k + 2 < 0,$$

тобто  $k > 2$ .

Система (2) дає:

$$\begin{cases} -k + 2 > 0, \\ 4k^2 - 4(-k + 2) \geq 0, \\ -k > 0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} k < 2, \\ k^2 + k - 2 \geq 0, \\ k < 0. \end{cases} \quad \begin{cases} k < 2, \\ k \leq -2 \text{ або } k \geq 1, \\ k < 0. \end{cases}$$

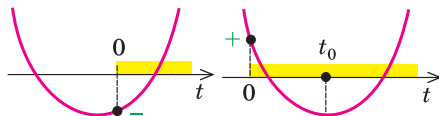
Отже,  $k \leq -2$ .

Відповідь:  $k \leq -2$  або  $k \geq 2$ . ◁

новою змінною. Оскільки заміна є рівносильним перетворенням (разом з оберненою заміною), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому, і тому замість дослідження заданого рівняння можна досліджувати одержане.

Але при цьому слід урахувати, що після заміни змінної інколи змінюється вимога задачі, зокрема для рівняння (1) вона буде такою: знайти всі значення параметра  $k$ , для яких це рівняння має хоча б один невід'ємний корінь (тоді після оберненої заміни ми обов'язково знайдемо корені заданого рівняння). Це можливо в одному з трьох випадків: або один із коренів рівняння (1) дорівнює нулю (цей випадок легко досліджувати підстановкою в рівняння (1)  $t = 0$ ), або рівняння (1) має один додатний і один від'ємний корінь, або обидва корені додатні.

Зобразивши відповідні ескізи графіків функції  $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ , запишемо необхідні і достатні умови такого розміщення для коренів квадратного тричлена (рисунком або табл. 16).



Для того щоб розв'язати квадратну нерівність  $k^2 + k - 2 \geq 0$ , можна використати графічну ілюстрацію.



У кінці необхідно об'єднати всі одержані результати. Звичайно, для одержання відповіді можна було б розв'язати задане рівняння (так саме, як приклад 2), а потім дати відповідь на запитання задачі, але такий шлях потребує більш громіздких обчислень.

### Вправи

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x-a} = 2; \quad 2) \sqrt{x+2a} = a; \quad 3) \sqrt{x+6} - m = \sqrt{x-3};$$

$$4) \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x} \geq 0; \quad 2) x+2a > \sqrt{3ax+4a^2}; \quad 3) \sqrt{4x+a} > x;$$

$$4) \sqrt{x-a} \geq 2x+1; \quad 5) \sqrt{a^2-x^2} > 2-x.$$

3. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $3\sqrt{x+2} = 2x+a$  має корені.

4. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $(\sqrt{x-a})\left(x - \frac{4}{x}\right) = 0$  має тільки один дійсний корінь.

5. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $\sqrt{2-ax} + 2 = x$  має тільки один дійсний корінь.

6. Визначте кількість розв'язків системи  $\begin{cases} y = a + \sqrt{x}, \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$  залежно від значення параметра  $a$ .

## ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}; \quad 2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}; \quad 3) \frac{2}{\sqrt{15}}; \quad 4) \frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}.$$

2. Обчисліть:

$$1) \sqrt{(\sqrt{5} - 2,5)^2} - \sqrt[3]{(1,5 - \sqrt{5})^3} - 1; \quad 2) \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{50})(5 - \sqrt{24})}{\sqrt{75} - 5\sqrt{2}};$$

$$3) \sqrt{(\sqrt{2} - 1,5)^2} - \sqrt[3]{((1 - \sqrt{2})^3)^2} + 0,75; \quad 4) \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{20}}{2\sqrt{5} + \sqrt{24}} \cdot (11 + 2\sqrt{30}).$$

Спростіть вираз (3–5).

$$3. \quad 1) \left( \frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a+2}} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}; \quad 2) \left( \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2;$$

$$3) \frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x+x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}; \quad 4) \left( \frac{\sqrt{c}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{c}} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1} - \frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1} \right);$$

$$4. \quad 1) \left( \sqrt{k} - \frac{\sqrt[4]{k^3+1}}{\sqrt{k+1}} \right)^{-1} - \frac{\sqrt[4]{k^3} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}-1};$$

$$2) \left( \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (2\sqrt{b})^2}{a-b} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}};$$

$$3) \left( \frac{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - (\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}) \right) \left( \sqrt[4]{\frac{x}{y}} + 1 \right);$$

$$4) \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{ab^3} - \sqrt{a^2b} - \sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{a^4b} - \sqrt[4]{ab^4} - \sqrt[4]{a^3}}.$$

$$5. \quad 1) \frac{x-1}{x+x^2+1} : \frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \frac{2}{x^{-0,5}};$$

$$2) \left( a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}} \right) : \frac{(ab)^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}}{a-b};$$

$$3) \left( \frac{2x+x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{3x} \right)^{-1} \left( \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right);$$

$$4) \left( \frac{1-c^{-2}}{c^2-c^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{c^2} + \frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}} \right) \left( 1 + \frac{2}{c^2} \right)^{-2}.$$

Розв'яжіть рівняння (6–10):

6. 1)  $(\sqrt{x^2 - 7x + 10})^2 = 2x^2 - 9x + 7$ ; 2)  $x^2 + \sqrt{x^2 - 1} - (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0$ ;

3)  $\sqrt{(x+1)(2x+3)} = x + 3$ ; 4)  $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+3} = x + 3$ .

7. 1)  $(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1+x} + 2x - 5) = x$ ; 2)  $\sqrt{2x^2 + 3x} + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} = 6x + 5$ ;

3)  $\sqrt{x^2 + 3x - 4} = \sqrt{2x + 2}$ ; 4)  $\sqrt{x^2 - 7x + 1} = \sqrt{2x^2 - 15x + 8}$ .

8. 1)  $\sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}$ ;

2)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{5x+2}$ ;

3)  $\sqrt{x+3} - 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} - 6\sqrt{x-1} = 1$ ;

4)  $\sqrt{x+11} - 6\sqrt{x+2} + \sqrt{x+18} - 8\sqrt{x+2} = 1$ .

9. 1)  $\sqrt[3]{2x-8} + \sqrt[3]{x-8} = 2$ ; 2)  $\sqrt[3]{8x+4} + \sqrt[3]{8x-4} = 2$ ;

3)  $\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{5-x} = 2$ ; 4)  $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ .

10. 1)  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$ ; 2)  $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x-3} = 0$ ;

3)  $\sqrt{2-x^2} = |x| - 1$ ; 4)  $\sqrt[6]{x-6} + \sqrt{10x+5} = 2$ .

Розв'яжіть систему рівнянь (11–12).

11. 1) 
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2; \end{cases}$$
 2) 
$$\begin{cases} \sqrt{x+3y+1} = 2, \\ \sqrt{2x-y+2} = 7y-6; \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} - \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6}; \end{cases}$$
 4) 
$$\begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x-9}} + \frac{4}{\sqrt{y+9}} = \frac{31}{20}, \\ \frac{3}{\sqrt{x-9}} + \frac{2}{\sqrt{y+9}} = \frac{7}{20}. \end{cases}$$

12. 1) 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2x-1}} + 4\sqrt{\frac{2x-1}{x+y}} = 5, \\ x = y + 1; \end{cases}$$
 2) 
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{10}{3}, \\ xy - 2x - 2y = 2; \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y-1} - \sqrt{x+y} = 1, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$$
 4) 
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y} + \sqrt[3]{x-y+2} = 3, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Розв'яжіть нерівність (13–21).

13. 1)  $\sqrt{3x^2 + 13} \geq 1 - 2x$ ; 2)  $\sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x$ ;

3)  $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$ ; 4)  $\sqrt{x^2 - x - 2} < 2x + 6$ .

14. 1)  $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1$ ; 2)  $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$ ;

3)  $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2 - 19x + 12}} < 0$ ; 4)  $\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x+3} > 0$ .

15. 1)  $\sqrt{x-2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}\sqrt{x-1} \leq 2$ ;      2)  $\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} - \sqrt{x-4}\sqrt{x-1} \geq 3$ ;  
 3)  $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$ ;      4)  $\sqrt{x+6} > \sqrt{2x-4} + \sqrt{x+1}$ .
16. 1)  $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}} > \frac{1}{x} - \frac{1}{4}$ ;      2)  $\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ ;  
 3)  $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ ;      4)  $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$ .
17. 1)  $(x+1)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$ ;      2)  $(x-3)\sqrt{x^2+1} \leq x^2-9$ ;  
 3)  $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$ ;      4)  $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11} \geq \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$ .
18. 1)  $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$ ;      2)  $\frac{\sqrt{2-x+4x-3}}{x} \geq 2$ ;  
 3)  $\sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}$ ;  
 4)  $\sqrt{(x-5)(-x+7)} + 1 > \sqrt{-x+7} - \sqrt{x-5}$ .
19. 1)  $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}$ ;      2)  $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$ ;  
 3)  $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$ .
20. 1)  $\frac{(1-x)\sqrt{1-x} + (1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}} \geq 1$ ;      2)  $\frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}} > 1$ ;  
 3)  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x-1}} \geq 0$ ;      4)  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{2}{1-\sqrt{1+x}} \leq 0$ .
21. 1)  $\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq \frac{a}{\sqrt{x}}$  ( $a > 0$ );      2)  $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq \frac{a}{\sqrt{x}}$ .
22. Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{3}(x-a)$  при  $a = 0$  і переконайтеся, що множиною її розв'язків є відрізок. При яких значеннях  $a$  множиною розв'язків цієї нерівності є відрізок довжиною  $\frac{9}{5}$ ?
23. При яких значеннях параметра  $a$  множина розв'язків нерівності  $a + \sqrt{x^2+ax} \geq x$  не перетинається з проміжком  $[-1; 0]$ ?
24. При яких значеннях параметра  $a$  у множині розв'язків нерівності  $x + \sqrt{x^2-2ax} > 1$  міститься проміжок  $[\frac{1}{4}; 1]$ ?

## ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Поняття *степеня* виникло в далекій давнині. Збереглися глиняні плитки стародавніх вавилонян (близько 1700 р. до н. е.), які містять записи таблиць квадратів і кубів та їх обернених значень. До множення рівних множників приводить розв'язування багатьох задач. Вираз *квадрат числа* виник унаслідок обчислення площі квадрата, а *куб числа* — унаслідок знаходження об'єму куба. Але сучасні позначення (типу  $a^4$ ,  $a^5$ ) введено в XVII ст. Р. Декартом (1596–1650).

Дробові показники степеня та найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками застосував у XIV ст. французький математик Н. Орема (бл. 1323–1382). Відомо, що Н. Шюке (бл. 1445–бл. 1500) розглядав степені з від'ємними і нульовим показниками.

С. Стевін запропонував розуміти під  $a^{\frac{1}{n}}$  корінь  $\sqrt[n]{a}$ . Але систематично дробові та від'ємні показники першим став застосовувати І. Ньютон (1643–1727).

Німецький математик М. Штіфель (1487–1567) дав позначення  $a^0 = 1$ , якщо  $a \neq 1$ , і ввів назву *показник* (від німецьк. *exponent*). Німецьке *potenzieren* означає *піднести до степеня*. У свою чергу, термін *exponenten* виник унаслідок не зовсім точного перекладу з грецької слова, яким Діофант Александрійський (бл. III ст.) позначав квадрат невідомої величини.

Терміни *радикал* і *корінь*, уведені в XII ст., походять від латинського *radix*, що має два значення: *сторона* і *корінь*. Грецькі математики замість «добути корінь» казали «знайти сторону квадрата за його даною величиною (площею)». Знак кореня у вигляді символу  $\sqrt{\quad}$  з'явився вперше в 1525 р. Сучасний символ увів Декарт, який додав горизонтальну риску. Ньютон уже позначав показники коренів так:  $\sqrt[3]{\quad}$ ,  $\sqrt[4]{\quad}$ .