Е. П. Нелин

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Учебник для 10 класса
общеобразовательных учебных заведений

Академический уровень

Рекомендовано

Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2010

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721
Н49

Издано за счет государственных средств
Продажа запрещена

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(приказ от 03.03.2010 № 177)

Научную экспертизу проводил
Институт математики Национальной академии наук Украины

Психолого-педагогическую экспертизу проводил
Институт педагогики
Национальной академии педагогических наук Украины

Эксперты, которые провели экспертизу:

П. Я. Киндюх, гимназия г. Ужгорода, директор, заслуженный учитель Украины, учитель-методист

Л. А. Бойко, Монастырищенская специализированная школа I–III ст. № 5 Монастырищенского районного совета Черкасской обл., учитель, учитель-методист

И. А. Воробей, Управление образования Житомирского городского совета, методист

М. А. Муратов, Таврийский национальный университет им. В. И. Вернадского, кафедра математического анализа, доктор физико-математических наук, доцент

Нелин Е. П.
Н49 Алгебра и начала анализа : учеб. для 10 кл. общеобразоват. учебн. заведений : академ. уровень / Е. П. Нелин. — Х. : Гимназия, 2010. — 416 с. : илл.
ISBN 978-966-474-097-2.

УДК 373:[512+517]
ББК 22.12я721+2.161я721

ISBN 978-966-474-097-2

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

Вы начинаете изучать новый предмет «*Алгебра и начала анализа*», который объединяет материал нескольких отраслей математической науки. Как и в курсе алгебры, значительное внимание будет уделено преобразованию выражений, решению уравнений, неравенств и их систем и изучению свойств функций. Наряду с решением знакомых задач, связанных с многочленами, рациональными дробями, степенями и корнями, в 10 классе будут рассмотрены новые виды функций: степенные и тригонометрические и соответствующие уравнения и неравенства.

Принципиально новая часть курса — начала анализа — будет рассматриваться в 11 классе. *Математический анализ* (или просто анализ) — отрасль математики, которая сформировалась в XVIII в. и сыграла значительную роль в развитии природоведения: появился мощный, достаточно универсальный метод исследования функций, используемых при решении разнообразных прикладных задач.

Несколько замечаний о том, как пользоваться учебником.

Система учебного материала учебника по каждой теме представлена на двух уровнях. *Основной материал* приведен в параграфах, номера которых обозначены синим цветом. *Дополнительный материал* (номера параграфов обозначены серым цветом) предназначен для овладения темой на более глубоком уровне (например, для выполнения более сложных задач по алгебре и началам анализа внешнего независимого оценивания по математике). Учащиеся могут осваивать его как самостоятельно, так и под руководством учителя.

В начале многих параграфов приведены *справочные таблицы*, содержащие основные определения, свойства и *ориентиры* по поиску плана решения задач по теме. Для ознакомления с основными идеями решения задач приводятся примеры, в которых кроме самого решения содержится также *комментарий*, который поможет составить план решения аналогичного задания.

С целью закрепления, контроля и самоконтроля усвоения учебного материала после каждого параграфа предлагается система вопросов и упражнений. Ответы на эти вопросы и примеры решения аналогичных упражнений можно найти в тексте параграфа. Система упражнений к основному материалу дана на трех уровнях. *Задачи среднего уровня* обозначены символом «°», более сложные *задачи достаточного уровня* даны без обозначений, а *задачи высокого уровня* сложности обозначены символом «*». В учебнике и для многих задач углубленного уровня предлагаются специальные ориентиры, позволяющие освоить методы их решения. *Ответы и указания* для большинства упражнений приведены в соответствующем разделе. О происхождении понятий, терминов и символов вы узнаете, прочитав «Сведения из истории». В конце учебника приведен справочный материал.

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Предлагаемый учебник направлен на реализацию основных положений концепции профильного обучения в старшей школе, на организацию личностно-ориентированного обучения математике. Учебник подготовлен в соответствии с действующей программой по алгебре и началам анализа академического уровня с учетом программы профильного уровня и программы и содержания внешнего независимого оценивания по математике.

Отметим основные отличия предложенного учебника от других учебников по алгебре и началам анализа. Это *двухуровневый учебник*, в каждом разделе которого наряду с параграфами, предназначенными для получения учениками математического образования на академическом уровне, есть систематический материал для организации индивидуальной работы с учениками, которые интересуются математикой.

Основной материал, который должны усвоить ученики, структурирован в форме *справочных таблиц* в начале параграфа, содержащих систематизацию теоретического материала и *способы деятельности* с этим материалом в форме специальных *ориентиров по решению задач*. *В первую очередь ученики должны усвоить материал, который содержится в таблицах*. Поэтому при объяснении нового материала целесообразно работать с учебником, используя соответствующие таблицы и рисунки. Все необходимые пояснения и обоснования тоже приведены в учебнике, но каждый ученик может выбирать собственный уровень ознакомления с этими обоснованиями.

Подчеркнем, что любой учебник по алгебре и началам анализа должен обеспечивать не только ознакомление учеников с основными алгебраическими понятиями и их свойствами (то есть дать возможность формировать у учеников знания по алгебре и началам анализа), но и формирование способов деятельности с этими понятиями (то есть дать возможность формировать у учеников умения по алгебре и началам анализа). Систему условий, на которую реально опирается ученик при выполнении действия, психологи называют ориентировочной основой действия. Если ученикам предлагают достаточно общие ориентировочные основы для решения соответствующих задач в виде специальных правил и алгоритмов, то говорят, что им предлагают ориентировочные основы второго и третьего типов. Как правило, в учебниках по алгебре и началам анализа для 10 классов ученикам предлагаются только образцы решений задач. Ученики самостоятельно решают эти задачи, ориентируясь на образцы (то есть ученикам предлагаются ориентировочные основы первого типа). Такое обучение предусматривает, что ученик самостоятельно систематизирует и обобщит способы действий, ориентируясь на предложенные образцы, и выделит для себя ориентировочную основу решения рассмотренных задач. Как правило, в этом случае ориентировочная основа, создаваемая у ученика, является неполной. Кроме того, она часто не осознана им, потому что ученик не может объяснить, почему он выполнял именно такие преобразования при решении задач, а не другие.

По этой причине одним из принципов построения предлагаемого учебника было выделение для учеников ориентировочных основ соответствующей деятельности по решению алгебраических задач непосредственно в учебнике.

В каждом разделе решению упражнений предшествует выделение общих ориентиров по решению таких задач. Поэтому важной составляющей работы с предлагаемым учебником является обсуждение выбора соответствующих ориентиров и планов решения задач. Пояснение методов решения ведется по схеме:

Решение	*Комментарий*

При такой подаче учебного материала комментарий, в котором поясняется решение, не мешает восприятию основной идеи и плана решения задач определенного типа. Это позволяет ученику, который уже усвоил способ решения, с помощью приведенного примера вспомнить, как решать задачу, а ученику, которому необходима консультация по решению, — получить детальную консультацию, содержащуюся в комментарии.

За счет четкого выделения общих ориентиров работы с практическими заданиями курса удается часть «нестандартных» (с точки зрения традиционных учебников) задач перевести в разряд «стандартных» (например, уравнения, для решения которых приходится применять свойства функций). Это позволяет, в частности, ознакомить учеников с методами решения даже сложных задач по алгебре и началам анализа, которые предлагаются на внешнем независимом оценивании по математике, и с оформлением их решения.

Условные обозначения

	главное в учебном материале
▶	начало решения задачи
◁	окончание решения задачи
●	начало обоснования утверждения
○	окончание обоснования утверждения

Обозначения, встречающиеся в учебнике

$\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел

$\boldsymbol{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множество всех рациональных чисел

$\boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел, числовая прямая

$\boldsymbol{R}_+$ — множество всех положительных действительных чисел

$[a; b]$ — отрезок (замкнутый промежуток) с концами a и b, $a < b$

$(a; b)$ — интервал (открытый промежуток) с концами a и b, $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — полуоткрытые промежутки с концами a и b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — бесконечные промежутки

$(-\infty; +\infty)$ — бесконечный промежуток, числовая прямая

$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x

$[x]$ — целая часть числа x

$\{x\}$ — дробная часть числа x

$f(x)$ — значение функции f в точке x

$D(f)$ — область определения функции f

$E(f)$ — область значений функции f

sin — функция синус

cos — функция косинус

tg — функция тангенс

ctg — функция котангенс

arcsin — функция арксинус

arccos — функция арккосинус

arctg — функция арктангенс

arcctg — функция арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметический корень из числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметический корень $2k$-й степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корень $(2k+1)$-й степени из числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

Раздел 1
ФУНКЦИИ, УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

- **§ 1.** Множества
- **§ 2.** Функции
- **§ 3.** Уравнения
- **§ 4.** Неравенства: равносильные преобразования и общий метод интервалов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

- **§ 5.** Графики уравнений и неравенств с двумя переменными
- **§ 6.** Метод математической индукции
- **§ 7.** Многочлены от одной переменной и действия над ними
- **§ 8.** Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля
- **§ 9.** Уравнения и неравенства с параметрами

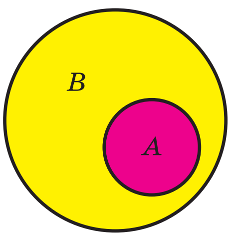
В основной части этого раздела вы систематизируете и обобщите свои знания и умения, связанные с множествами, функциями, уравнениями и неравенствами, уточните, как исследуют и обосновывают основные характеристики функций. Также вы получите рекомендации относительно решения уравнений и неравенств разными методами.

В дополнительной части раздела вы сможете ознакомиться с важным методом доказательства математических утверждений (методом математической индукции) и с методами решения некоторых сложных задач, которые предлагаются в заданиях внешнего независимого оценивания или государственной итоговой аттестации по математике.

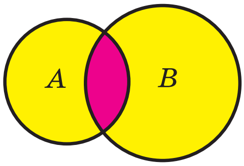
§ 1 МНОЖЕСТВА

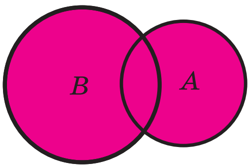
1.1. Множества и операции над ними

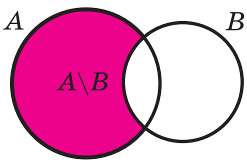
Таблица 1

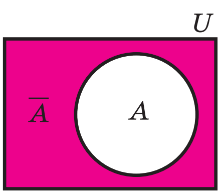
<table>
<tr><td colspan="2">Понятие множества и его элементов</td></tr>
<tr><td>Элемент a принадлежит множеству A ⟺ $a \in A$
Элемент b не принадлежит множеству A ⟺ $b \notin A$
В множестве нет элементов ⟺ $\varnothing$</td><td>Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по определенному признаку. В математике множество — одно из основных неопределяемых понятий.
Каждый объект, принадлежащий множеству A, называется *элементом* этого *множества*.
Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается $\varnothing$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Подмножество ($\subset$)</td></tr>
<tr><td>
$A \subset B$ ⟺ Если $x \in A$, то $x \in B$</td><td>**Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B,**
и записывают так: $A \subset B$.
Используется также запись $A \subseteq B$, если множество A или является подмножеством множества B, или равно множеству B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Равенство множеств</td></tr>
<tr><td>$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$</td><td>**Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества**</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 1

<table>
<tr><td colspan="2">Пересечение множеств(∩)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$</td><td>Пересечением множеств A и B называют их общую часть, то есть множество C всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Объединение множеств (∪)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$</td><td>Объединением множеств A и B называют множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (A или B)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разность множеств (\)</td></tr>
<tr><td>

$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$</td><td>Разностью множеств A и B называется множество C, которое состоит из всех элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дополнение множеств</td></tr>
<tr><td>

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$</td><td>Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества U, то разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A. Другими словами, дополнением множества A называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству A (но принадлежащих универсальному множеству U)</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Понятие множества. Одним из основных понятий, которые используются в математике, является понятие *множества*. Для него не дается определения. Можно пояснить, что *множеством* называют произвольную совокупность объектов, а сами объекты — *элементами* данного *множества*. Так, можно говорить о множестве учеников в классе (элементы — ученики), множестве дней недели (элементы — дни недели), множестве натуральных делителей числа 6 (элементы — числа 1, 2, 3, 6) и т. д. В курсах алгебры и алгебры и начал анализа чаще всего рассматривают множества, элементами которых являются числа, и поэтому их называют *числовыми множествами*.

Как правило, множества обозначают прописными буквами латинского алфавита. Например, если множество M состоит из чисел 1; 2; 3, то его обозначают так: $M = \{1;\ 2;\ 3\}$. Тот факт, что число 2 входит в это множество (является элементом данного множества M), записывается с помощью специального значка $\in$ следующим образом: $2 \in M$; а то, что число 5 не входит в это множество (не является элементом данного множества), записывается так: $5 \notin M$.

Можно рассматривать также множество, не содержащее ни одного элемента, — *пустое множество*.

Например, множество простых делителей числа 1 — пустое множество.

Для некоторых множеств существуют специальные обозначения. Так, пустое множество обозначается символом $\varnothing$, множество всех натуральных чисел — буквой $\boldsymbol{N}$, множество всех целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$, множество всех рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$, а множество всех действительных чисел — буквой $\boldsymbol{R}$. Множества бывают *конечными* и *бесконечными* в зависимости от того, какое количество элементов они содержат. Так, множества $A = \{7\}$ и $M = \{1;\ 2;\ 3\}$ — конечные, потому что содержат конечное число элементов, а множества $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — бесконечные.

Множества задают или с помощью перечисления их элементов (это можно сделать только для конечных множеств), или с помощью описания, когда задается правило — *характеристическое свойство*, которое позволяет определить, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому множеству. Например, множество $A = \{-1;\ 0;\ 1\}$ задано перечислением элементов, а множество B четных целых чисел — характеристическим свойством элементов множества. Последнее множество иногда записывают так: $B = \{b \mid b$ — четное целое число$\}$ или так: $B = \{b \mid b = 2m$, где $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — здесь после вертикальной черточки записано характеристическое свойство[1].

В общем виде запись множества с помощью характеристического свойства можно обозначить так: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ — характеристическое свойство. Например, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1,\ 1\}$, $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ и $x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

[1] В этом случае и в записи решений тригонометрических уравнений и неравенств в разделе 3 запись $m \in \boldsymbol{Z}$ означает, что m принимает любое целое значение, что также можно записать как $m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$.

2. Равенство множеств. Пусть A — множество цифр трехзначного числа 312, то есть $A = \{3;\ 1;\ 2\}$, а B — множество натуральных чисел, меньших чем 4, то есть $B = \{1;\ 2;\ 3\}$. Поскольку эти множества состоят из одних и тех же элементов, то они считаются равными. Это записывают так: $A = B$. Для бесконечных множеств таким способом (сравнивая все элементы) установить их равенство невозможно. Поэтому в общем случае равенство множеств определяется следующим образом.

Два множества называются *равными*, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества.

Из приведенного определения равенства множеств следует, что в множестве одинаковые элементы не различаются. Действительно, например, $\{1;\ 2;\ 2\} = \{1;\ 2\}$, поскольку каждый элемент первого множества (1 или 2) является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества (1 или 2) является элементом первого. Поэтому, записывая множество, чаще всего каждый его элемент записывают только один раз.

3. Подмножество

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что множество A является подмножеством множества B.

Это записывают следующим образом: $A \subset B$.

Например, $\{1;\ 2\} \subset \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (поскольку любое натуральное число — целое), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (поскольку любое целое число — рациональное), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (поскольку любое рациональное число — действительное).

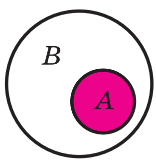
Полагают, что всегда $\varnothing \subseteq A$, то есть *пустое множество является подмножеством любого непустого множества*.

Иногда вместо записи $A \subset B$ используется также запись $A \subseteq B$, если множество A является подмножеством множества B, или равно множеству B. Например, $A \subseteq A$.

Сопоставим определение равенства множеств с определением подмножества. Если множества A и B равны, то: 1) каждый элемент множества A является элементом множества B, следовательно, A — подмножество B ($A \subseteq B$); 2) каждый элемент множества B является элементом множества A, следовательно, B — подмножество A ($B \subseteq A$). Таким образом,

два множества равны, если каждое из них является подмножеством другого.

Иногда соотношения между множествами удобно иллюстрировать с помощью кругов (которые часто называют кругами Эйлера—Венна). Например, рисунок 1 иллюстрирует определение подмножества, а рисунок 2 — отношения между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.



$\boxed{A \subset B} \Leftrightarrow \boxed{\text{Если } x \in A, \text{ то } x \in B}$

Рис. 1

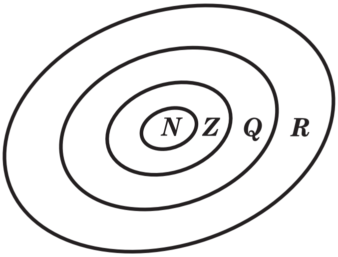


Рис. 2

4. Операции над множествами. Над множествами можно выполнять определенные действия: пересечение, объединение, находить разность. Дадим определение этих операций и проиллюстрируем их с помощью кругов Эйлера—Венна.

Пересечением множеств ***A*** **и** ***B*** **называют их общую часть, то есть множество** ***C*** **всех элементов, принадлежащих как множеству** ***A*****, так и множеству** ***B*****.**

Пересечение множеств обозначают знаком $\cap$ (на рисунке 3 приведена иллюстрация определения пересечения множеств).

Например, если $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{0; 2; 4; 6\}$, то $A \cap B = \{2; 4\}$.

Объединением множеств ***A*** **и** ***B*** **называют множество** ***C*****, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (*****A или B*****).**

Объединение множеств обозначают знаком $\cup$ (на рисунке 4 приведена иллюстрация определения объединения множеств).

Например, для множеств A и B из предыдущего примера

$$A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}.$$

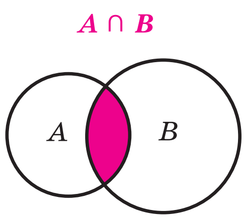
Если обозначить множество иррациональных чисел через M, то $M \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

Разностью множеств ***A*** **и** ***B*** **называется множество** ***C*****, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству** ***A*** **и не принадлежат множеству** ***B*****.**

Разность множеств обозначают знаком $\setminus$. На рисунке 5 приведена иллюстрация определения разности множеств.

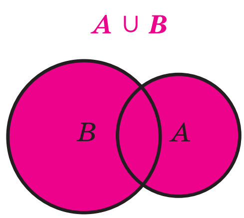
Например, если $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4; 5\}$.

Если B — подмножество A, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением множества B до множества A* (рис. 6).



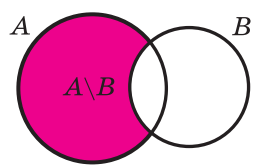
$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$

Рис. 3



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$

Рис. 4



$C = A \setminus B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$

Рис. 5

Например, если обозначить множество всех иррациональных чисел через M, то $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: множество M всех иррациональных чисел дополняет множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел до множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Если все множества, которые мы рассматриваем, являются подмножествами некоторого так называемого *универсального* множества U (на рисунке его обычно изображают в виде прямоугольника, а все остальные множества — в виде кругов внутри этого прямоугольника, то разность $U \setminus A$ называют дополнением множества A (рис. 7). То есть

дополнением множества A **называется множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих множеству** A**,**

но принадлежащих универсальному множеству U.

Дополнение множества A обозначается $\overline{A}$ (можно читать: «A с чертой» или «дополнение A»).

Например, если $U = \boldsymbol{R}$ и $A = [0;\ 1]$, то $\overline{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Для этого примера удобно использовать традиционную иллюстрацию множества действительных чисел на числовой прямой (рис. 8).

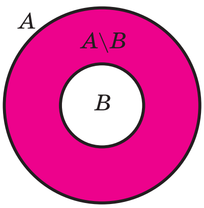


Рис. 6

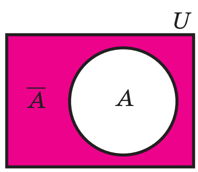


Рис. 7

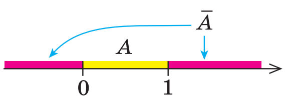


Рис. 8

Вопросы для контроля

1. Приведите примеры множеств, укажите несколько элементов каждого множества.
2. Как обозначаются пустое множество, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел?
3. Дайте определение равенства множеств. Приведите примеры двух равных множеств.
4. Дайте определение подмножества. Приведите примеры. Проиллюстрируйте это понятие с помощью кругов Эйлера—Венна.
5. Дайте определение пересечения, объединения, разности двух множеств. Приведите примеры. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера—Венна.
6. Объясните, что называется дополнением одного множества до другого; дополнением множества. Приведите примеры. Проиллюстрируйте эти понятия с помощью соответствующих рисунков.

Упражнения

1°. Запишите с помощью фигурных скобок множество:
1) букв в слове «алгебра»; 2) четных однозначных натуральных чисел; 3) нечетных однозначных натуральных чисел; 4) однозначных простых чисел.

2°. По какому характеристическому свойству записаны такие множества:
1) {понедельник, вторник, среда, четверг, пятница, суббота, воскресенье};
2) {январь, февраль, март, апрель, май, июнь, июль, август, сентябрь, октябрь, ноябрь, декабрь};
3) {Австралия, Азия, Америка, Антарктида, Африка, Европа};
4) {до, ре, ми, фа, соль, ля, си};
5) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

3°. Приведите примеры пустых множеств.

4°. A — множество натуральных чисел, расположенных между числами 15 и 35. Запишите множество A с помощью фигурных скобок. Какие из чисел 18, 28, 36, 40 принадлежат множеству A? Ответ запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$.

5°. Запишите с помощью фигурных скобок и обозначьте множество:
1) натуральных делителей числа 12;
2) натуральных делителей числа 30;
3) целых делителей числа 6;
4) простых делителей числа 12.

6°. Известно, что $M = \{1; 2; 5\}$, $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$, $K = \{4; 7; 9\}$. Запишите с помощью фигурных скобок или знака $\varnothing$:
1) пересечение M и N; 2) пересечение M и K; 3) пересечение N и K; 4) объединение M и N; 5) объединение M и K; 6) объединение N и K; 7) разность M и N; 8) разность M и K; 9) разность N и K; 10) дополнение K до N.

7°. Объясните, почему выполняется равенство:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

8°. Запишите множество всех двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 0, 1, 3.

9°. Известно, что A — множество всех натуральных делителей числа 12, а B — множество всех целых делителей числа 6. Запишите множество:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10*. Пусть A и B — некоторые множества. Докажите указанные равенства и проиллюстрируйте их с помощью кругов Эйлера—Венна:
1) $A \cup B = B \cup A$ — *переместительный закон для объединения*;
2) $A \cap B = B \cap A$ — *переместительный закон для пересечения*.

11. В одном множестве 40 разных элементов, а во втором — 30. Сколько элементов может быть у их: 1) пересечения; 2) объединения?

12*. Пусть A, B, C — некоторые множества. Докажите равенство множеств и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера—Венна:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сочетательный закон для объединения*;
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сочетательный закон для пересечения*;
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — *законы де Моргана*.

13. Каждый учащийся в классе изучает английский или французский язык. Английский язык изучают 25 учащихся, французский — 27 учащихся, а два языка — 18 учащихся. Сколько учащихся в классе?

14*. Часть жителей города в Украине говорит только по-украински, часть — только по-русски, а часть — на двух языках. По-украински говорит 95 % жителей, а по-русски — 85 %. Сколько процентов жителей города говорит на двух языках?

15*. Докажите равенства и проиллюстрируйте их с помощью кругов Эйлера—Венна:

1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

16*. Запишите множество всех правильных дробей $\frac{a}{b}$, где $a \in A$, $b \in B$ и $A = \{2;\ 3;\ 4;\ 6\}$, $B = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

17*. Какие трехзначные числа можно записать, если:
$A = \{3;\ 1;\ 2\}$ — множество цифр для обозначения сотен;
$B = \{2;\ 8\}$ — множество цифр для обозначения десятков;
$C = \{5;\ 7\}$ — множество цифр для обозначения единиц?
Сколько таких чисел получим? Попытайтесь сформулировать общее правило подсчета количества всех таких чисел, если множество A содержит m элементов $(0 \notin A)$, множество B — n элементов, множество C — k элементов.

1.2. Числовые множества. Множество действительных чисел

Таблица 2

1. Числовые множества

Действительные числа R

Числа, которые можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

Рациональные числа Q

Можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Записываются в виде бесконечной периодической десятичной дроби $\left(\frac{1}{3}=0,333\ldots=0,(3)\right)$

Иррациональные числа

Нельзя представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Записываются в виде бесконечной непериодической десятичной дроби $\left(\sqrt{2}=1,4142135\ldots\right)$

Целые числа Z

Включают натуральные числа, числа, противоположные им, и число нуль

Дробные числа

Числа, состоящие из целого числа частей единицы $\left(\frac{2}{5}\right.$ — обыкновенная дробь, $1,23$ — десятичная дробь: $\left.1,23=\frac{123}{100}\right)$

Натуральные числа N (целые положительные)

Для школьного курса математики натуральное число — основное неопределяемое понятие

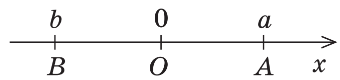
Число 0

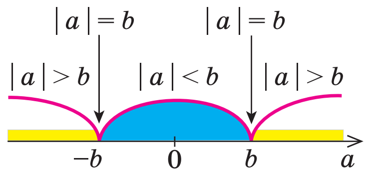
Такое число, при сложении с которым любое число не изменяется $(a + 0 = 0 + a = a)$

Целые отрицательные числа

Числа, противоположные натуральным

Продолжение табл. 2

2. Модуль действительного числа и его свойства	
Определение	Геометрический смысл модуля
Модулем положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа называется число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю $$\lvert a\rvert=\begin{cases}a \text{ при } a>0,\\ 0 \text{ при } a=0,\\ -a \text{ при } a<0\end{cases}$$	 $\lvert a\rvert=OA,\ \lvert b\rvert=OB$ $\lvert a-b\rvert=AB$ **На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.** *Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой*

Свойства		
1.	$\boxed{\lvert a\rvert \geqslant 0}$	*Модуль любого числа — неотрицательное число*
2.	$\boxed{\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert}$	*Модули противоположных чисел равны*
3.	$\boxed{a \leqslant \lvert a\rvert}$, то есть $\boxed{-\lvert a\rvert \leqslant a \leqslant \lvert a\rvert}$	*Каждое число не больше своего модуля*
4.	$\boxed{\text{При } b>0\ \lvert a\rvert \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b}$	
5.	$\boxed{\text{При } b>0\ \lvert a\rvert \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ или } a \geqslant b}$	
6.	$\boxed{\lvert a\cdot b\rvert = \lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert}$	*Модуль произведения равен произведению модулей множителей*
7.	$\boxed{\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}\ (b \neq 0)}$	*Модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя* (если знаменатель не равен нулю)
8.	$\boxed{\lvert a^n\rvert = \lvert a\rvert^n}$ $\qquad \lvert a\rvert^2 = a^2 \qquad \lvert a\rvert^{2k} = a^{2k}$	
9.	$\boxed{\lvert a+b\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert}$ $\boxed{\lvert a_1+a_2+\ldots+a_n\rvert \leqslant \lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert}$	*Модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых*
10.	$\boxed{\big\lvert \lvert a\rvert-\lvert b\rvert \big\rvert \leqslant \lvert a\pm b\rvert \leqslant \lvert a\rvert+\lvert b\rvert}$	

Объяснение и обоснование

1. Числовые множества. В курсе математики вы встречались с разными числами: натуральными, целыми, рациональными, иррациональными, действительными. Представление о числах у человечества складывалось постепенно, под воздействием требований практики. Например, *натуральные числа* появились в связи с необходимостью подсчета предметов. Но для того чтобы дать ответ на вопрос «Сколько спичек в пустой коробке из-под спичек?», множества натуральных чисел $\boldsymbol{N} = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$ недостаточно — для этого необходимо иметь еще и число нуль. Присоединяя к множеству $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел число 0, получаем множество *неотрицательных целых чисел*. Его часто обозначают $\boldsymbol{Z}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \dots\}$. Одних только неотрицательных целых чисел оказалось недостаточно для решения задач практики (а следовательно, и математических задач, отображающих заданную реальную ситуацию). Так, для того чтобы охарактеризовать температуру воздуха выше и ниже нуля или движение тела в противоположных направлениях, необходимы противоположные натуральным числа, то есть *отрицательные числа*. Для натурального числа n противоположным считается число $-n$, а для числа $-n$ противоположным считается число n. Нуль считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число нуль составляют множество $\boldsymbol{Z}$ *целых чисел*.

Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел и введения *рациональных чисел*. Например, средняя многолетняя температура воздуха в январе в г. Харькове — $-7{,}3\ ^\circ$C, длительность урока — 45 минут, или $\frac{3}{4}$ часа.

Таким образом, выбирая какую-либо единицу измерения, мы получаем числовое значение величин, которое может выражаться с помощью разных рациональных чисел — целых и дробных, положительных и отрицательных.

Целые и дробные числа составляют множество $\boldsymbol{Q}$ *рациональных чисел*.

Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ (то есть числитель m является целым числом, а знаменатель n — натуральным).

Рациональное число может быть записано разными дробями. Например,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20},\quad -\frac{2}{7}=\frac{-2}{7}=\frac{-8}{28}=\frac{-10}{35},\quad 1{,}2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{120}{100},\quad 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10}.$$

Как видно из приведенных примеров, среди дробей, которые изображают данное рациональное число, всегда есть единственная несократимая дробь (для целых чисел — это дробь, знаменатель которой равен 1).

Обратим внимание, что рациональное число, записанное в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, можно также записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель. Например, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$.

Договоримся, что конечную десятичную дробь можно изображать в виде бесконечной, у которой после последнего десятичного знака, отличного от нуля, на месте следующих десятичных знаков записываются нули, например, $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}75000\ldots$.

Целые числа также договоримся записывать в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных знаков стоят нули, например $13 = 13{,}000\ldots$. Таким образом, любое рациональное число может быть записано как бесконечная периодическая дробь. Напомним, что у бесконечной периодической дроби, начиная с некоторого разряда, все десятичные знаки повторяются. Группу цифр, которая повторяется, называют *периодом дроби*; при записи дроби период записывают в скобках. Например, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0{,}(3)$, $\frac{3}{22}=0{,}136363636\ldots=0{,}1(36)$.

Таким образом, *каждое рациональное число может быть записано в виде бесконечной периодической десятичной дроби и наоборот, каждая бесконечная периодическая дробь задает рациональное число*.

Обратим внимание, что любая периодическая десятичная дробь с периодом девять равна бесконечной десятичной дроби с периодом нуль, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом первой дроби. Например, бесконечные периодические дроби $0{,}2(9)$ и $0{,}3(0)$ являются записью одного и того же рационального числа $\frac{3}{10}$. Действительно, учитывая, что сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q вычисляется по формуле $S=\frac{a_1}{1-q}$, имеем:

$$0{,}2(9)=0{,}2999\ldots=0{,}2+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots=0{,}2+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=0{,}2+\frac{1}{10}=0{,}3=0{,}3(0).$$

В дальнейшем, записывая рациональные числа с помощью бесконечных периодических десятичных дробей, договоримся исключить из рассмотрения бесконечные периодические дроби, период которых равен девяти.

Каждое рациональное число можно изобразить точкой на координатной прямой (то есть прямой, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и единица измерения). Например, на рисунке 9 изображены несколько рациональных чисел $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2{,}5\right)$.

Рис. 9

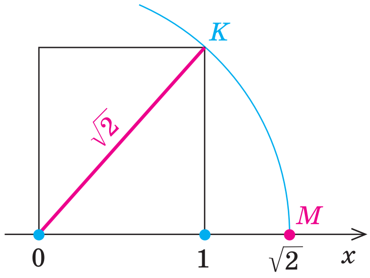


Рис. 10

Однако на координатной прямой есть точки, изображающие числа, которые не являются рациональными. Например, из курса алгебры известно, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным. Это так называемое иррациональное число. Если построить квадрат со стороной, равной 1, на координатной прямой x (рис. 10), то его диагональ будет равна $\sqrt{2}$. Тогда, проведя дугу окружности радиуса $OM=\sqrt{2}$ с центром в точке O, получим точку M, координата которой равна $\sqrt{2}$. Кроме числа $\sqrt{2}$, вы также встречались с иррациональными числами $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ и т. д.

Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На координатной прямой каждому действительному числу соответствует единственная точка и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число (в этом случае говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой устанавливается взаимно однозначное соответствие).

Каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби: рациональные числа — в виде бесконечной периодической десятичной дроби, а иррациональные — в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Напомним, что для сравнения действительных чисел и выполнения действий над ними (в случае, когда хотя бы одно из них не является рациональным) используются приближенные значения этих чисел. В частности, *для сравнения двух действительных чисел последовательно рассматриваем их приближенные значения с недостатком с точностью до целых, десятых, сотых и т. д. до тех пор, пока не получим, что какое-то приближенное значение одного числа больше соответствующего приближенного значения второго. Тогда то число, у которого приближенное значение больше, и считается бо́льшим.* Например, если $\alpha=\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots$, $\beta=1\frac{3}{4}=1{,}7500000\ldots$, то $\alpha<\beta$ (поскольку $1{,}73<1{,}75$).

Для выполнения сложения или умножения рассмотренных чисел α и β последовательно записывают их приближенные значения с недостатком и с избытком (с точностью до целых, десятых, сотых и т. д.) и выполняют действия над полученными рациональными числами. В результате последовательно получаем значение суммы или произведения с необходимой точностью.

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1{,}7 < \alpha < 1{,}8$	$1{,}7 < \beta < 1{,}8$	$3{,}4 < \alpha + \beta < 3{,}6$	$2{,}89 < \alpha\beta < 3{,}24$
$1{,}73 < \alpha < 1{,}74$	$1{,}75 < \beta < 1{,}76$	$3{,}48 < \alpha + \beta < 3{,}50$	$3{,}0275 < \alpha\beta < 3{,}0624$
$1{,}732 < \alpha < 1{,}733$	$1{,}750 < \beta < 1{,}751$	$3{,}482 < \alpha + \beta < 3{,}484$	$3{,}031 < \alpha\beta < 3{,}034483$
...	...	...	...

Как видим, $\alpha + \beta = 3{,}48...$, $\alpha\beta = 3{,}03...$.

В курсе математического анализа доказывается, что в случае, когда приближенные значения чисел α и β последовательно берутся с точностью до целых, десятых, сотых и т. д., то значения суммы $\alpha + \beta$ с недостатком и с избытком стремятся к одному и тому же числу, которое и принимается за значение суммы $\alpha + \beta$ (аналогично определяется и произведение $\alpha\beta$).

2. Модуль действительного числа и его свойства. Напомним определение модуля.

***Модулем* положительного числа называется само это число, модулем отрицательного числа — число, противоположное ему, модуль нуля равен нулю.**

Это определение можно коротко записать несколькими способами.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$

При необходимости мы будем пользоваться любой из этих записей определения модуля. Для нахождения $|a|$ по определению необходимо знать знак числа a и использовать соответствующую формулу. Например, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$, $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 - \sqrt{3}$.

На координатной прямой модуль числа — это расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.

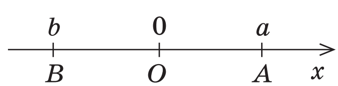


Рис. 11

Действительно, если $a > 0$ (рис. 11), то расстояние $OA = a = |a|$.

Если $b < 0$, то расстояние $OB = -b = |b|$.

Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой.

Для доказательства можно воспользоваться тем, что при параллельном переносе вдоль оси координат на b единиц абсцисса соответствующей точки изменяется на b: к абсциссе данной точки прибавляется число b, то есть при $b > 0$ точка переносится вправо, а при $b < 0$ — влево.

Обозначим на координатной прямой числа a, b, $a - b$ соответственно точками A, B, C. На рисунке 12 эти точки изображены для случая $a > 0$ и $b < 0$, хотя приведенное далее обоснование не зависит от знаков a и b.

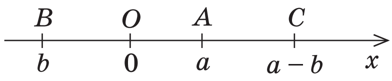


Рис. 12

При параллельном переносе вдоль оси Ox на b единиц точка O перейдет в точку B, а точка C (с координатой $a - b$) — в точку с координатой $a - b + b = a$, то есть в точку A. Тогда $CO = AB$. Но расстояние CO — это расстояние от точки $a - b$ до начала координат, следовательно, $CO = |a - b|$, а значит, и $AB = |a - b|$. ○

Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно обосновать свойства модуля, приведенные в таблице 2.

Например, учитывая, что $|a|$ — это расстояние от точки a до точки O, а расстояние может выражаться только неотрицательным числом, получаем

$$|a| \geqslant 0,$$

то есть *модуль любого числа является неотрицательным числом*.

Учитывая, что точки a и $-a$ находятся на одинаковом расстоянии от точки O, получаем

$$|-a| = |a|,$$

это означает, что *модули противоположных чисел равны*.

Если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а если $a < 0$, то $a < |a|$. Следовательно, всегда

$$a \leqslant |a|,$$

то есть *каждое число не превышает его модуль*.

Если в последнее неравенство вместо a подставить $-a$ и учесть, что $|-a| = |a|$, то получаем неравенство $-a \leqslant |a|$. Отсюда $a \geqslant -|a|$, что вместе с неравенством $a \leqslant |a|$ свидетельствует о том, что для любого действительного числа a выполняется двойное неравенство

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

При $b > 0$ неравенство $|a| \leqslant b$ означает, что число a на координатной прямой находится от точки O на расстоянии, которое не превышает b (рис. 13), то есть в промежутке $[-b; b]$. Наоборот, если число a находится в этом промежутке, то есть $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$. Следовательно,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Обратим внимание, что последнее утверждение справедливо и при $b = 0$ (тогда двум неравенствам удовлетворяет только одно значение $a = 0$).

Аналогично при $b > 0$ неравенство $|a| \geqslant b$ означает, что число a на координатной прямой находится от точки O на расстоянии, которое больше или равно b (рис. 13),

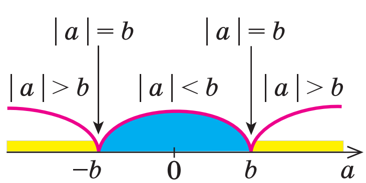


Рис. 13

то есть в этом случае $a \leqslant -b$ или $a \geqslant b$. Наоборот, если число a удовлетворяет одному из этих неравенств, то $|a| \geqslant b$. Следовательно, при $b > 0$ неравенство $|a| \geqslant b$ равносильно совокупности неравенств $a \leqslant -b$ или $a \geqslant b$, что можно записать так:

$$\text{при } b > 0 \quad \boldsymbol{|a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ или } a \geqslant b}.$$

Свойства модуля произведения и модуля дроби фиксируют известные правила действий над числами с одинаковыми и разными знаками:

модуль произведения равен произведению модулей множителей, то есть

$$\boldsymbol{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|};$$

модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю), то есть

$$\boldsymbol{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0)}.$$

Формулу для нахождения модуля произведения можно обобщить для случая нескольких множителей

$$\boldsymbol{|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|}. \tag{3}$$

Если в формуле (3) взять $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, получаем формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Используя последнюю формулу справа налево при $n = 2k$ и учитывая, что $a^{2k} \geqslant 0$ при всех значениях a, получаем $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Следовательно,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обоснования неравенства

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \tag{4}$$

запишем неравенство (1) для чисел a и b:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Складывая почленно эти неравенства, получаем

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Учитывая неравенство (2), имеем

$$\boldsymbol{|a + b| \leqslant |a| + |b|},$$

то есть *модуль суммы не превышает суммы модулей слагаемых*.

Если в неравенстве (4) заменить b на $-b$ и учесть, что $|-b| = |b|$, то получим неравенство

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \tag{5}$$

Если записать число a так: $a = b + (a - b)$ и использовать неравенство (4), то получим неравенство $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Отсюда

$$\boldsymbol{|a| - |b| \leqslant |a - b|}. \tag{6}$$

Если в неравенстве (6) заменить b на $-b$ и учесть, что $|-b| = |b|$, то получим неравенство

$$\boldsymbol{|a| - |b| \leqslant |a + b|}, \tag{7}$$

то есть *модуль суммы двух чисел не меньше разности их модулей*.

Меняя местами буквы a и b в неравенствах (6) и (7) и учитывая, что $|a - b| = |b - a|$, имеем также неравенства

$$|b| - |a| \leqslant |a \pm b|. \qquad (8)$$

Полученные неравенства (4)–(8) можно коротко записать так:

$$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите, что **сумма, разность, произведение, натуральная степень и частное (если делитель не равен нулю) двух рациональных чисел всегда является рациональным числом.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть заданы два рациональных числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ и $|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases}$ где m_1 и m_2 — целые, а n_1 и n_2 — натуральные числа. Поскольку сумма, разность, произведение, натуральная степень и частное двух обыкновенных дробей всегда являются обыкновенными дробями, то полученный результат всегда будет рациональным числом. Например, $$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$ где $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — целое число, а $n_1 n_2$ — натуральное. ◁	Любое рациональное число может быть записано как дробь $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число. Чтобы доказать утверждение задачи, достаточно доказать, что сумма, разность, произведение и частное двух дробей вида $\frac{m}{n}$ также будет дробью такого вида.

Задача 2 Докажите, что **для любого натурального числа n число $\sqrt{n}$ или натуральное, или иррациональное.**

Комментарий

Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод от противного: предположить, что заданное положительное число является рациональным ненатуральным (то есть дробью), и получить противоречие с условием или с каким-либо известным фактом.

Записывая $\sqrt{n}$ в виде несократимой дроби, следует учесть, что при натуральных значениях n это число всегда будет положительным.

Решение

▶ Допустим, что $\sqrt{n}$ не является иррациональным числом (тогда это число рациональное) и не является натуральным числом. Следовательно, это число может быть только рациональной несократимой дробью

$\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа ($q \neq 1$). По определению квадратного корня имеем $n=\frac{p^2}{q^2}$, то есть $n=\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$. Учитывая, что $q \neq 1$, получаем, что дробь $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$, равная натуральному числу n, должна быть сократимой. Следовательно, у натуральных множителей, которые стоят в числителе и знаменателе этой дроби, должен быть общий натуральный делитель, отличный от 1. Но в числителе стоят только множители p, а в знаменателе — только множители q. Тогда числа p и q имеют натуральный делитель, отличный от 1, то есть дробь $\frac{p}{q}$ является сократимой дробью, что противоречит условию. Таким образом, наше предположение неверно, и для любого натурального числа n число $\sqrt{n}$ или натуральное, или иррациональное.◁

Например, поскольку числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{10}$ не являются натуральными числами $\left(1<\sqrt{3}<2,\ 3<\sqrt{10}<4\right)$, то $\sqrt{3}$ и $\sqrt{10}$ — иррациональные числа.

Задача 3* Докажите, что $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ — число иррациональное.

Решение	*Комментарий*
▶ Допустим, что число $\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$ — рациональное. Тогда $\sqrt{5}=r-\sqrt{3}$. Возведя обе части последнего равенства в квадрат, имеем $5=r^2-2r\sqrt{3}+3$. Отсюда $2r\sqrt{3}=r^2-2$. Следовательно, $\sqrt{3}=\frac{r^2-2}{2r}$. Но правая часть этого равенства — рациональное число (поскольку по предположению r — рациональное число), а левая — иррациональное. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и число $\sqrt{3}+$ $+\sqrt{5}$ — иррациональное.◁	Для доказательства утверждения задачи можно использовать метод «от противного» — допустить, что заданное число является рациональным, и получить противоречие с каким-либо известным фактом, например с тем, что $\sqrt{3}$ — иррациональное число. При анализе полученных выражений используем результат задачи 1: *если число r — рациональное, то числа r^2-2 и $2r$ и их частное тоже будут рациональными.* Заметим, что знаменатель полученной дроби $2r=2(\sqrt{3}+\sqrt{5})\neq 0$.

Задача 4 Решите уравнение[1] $|2x+5|=7$.

---

[1] Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, подробнее рассмотрено в **§ 8**.

Решение	*Комментарий*

I способ

▶ $2x + 5 = 7$ или $2x + 5 = -7$,
$2x = 2$ или $2x = -12$,
$x = 1$ или $x = -6$.

Ответ: 1; −6. ◁

Заданное уравнение имеет вид $|t| = 7$ (в данном случае $t = 2x + 5$). Его удобно решать, используя геометрический смысл модуля: $|2x + 5|$ — это расстояние от точки 0 до точки $2x + 5$. Но расстояние 7 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 7), так и влево (получаем число −7). Следовательно, равенство $|2x + 5| = 7$ возможно тогда и только тогда, когда $2x + 5 = 7$ или $2x + 5 = -7$.

II способ

▶ $|2x - (-5)| = 7$,

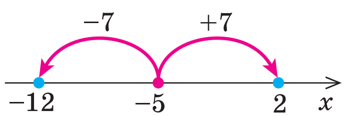


Рис. 14

$2x = 2$ или $2x = -12$,
$x = 1$ или $x = -6$.

Ответ: 1; −6. ◁

С геометрической точки зрения $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на координатной прямой. Запишем данное уравнение так: $|2x - (-5)| = 7$. Тогда равенство $|2x - (-5)| = 7$ означает, что расстояние от точки $2x$ до точки −5 равно 7. На расстоянии 7 от точки −5 находятся точки 2 и −12 (рис. 14). Таким образом, данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда $2x = 2$ или $2x = -12$, то есть данное уравнение равносильно указанной в решении совокупности уравнений.

Задача 5 Решите неравенство $|x^2 - 5x| \leqslant 6$.

Решение	*Комментарий*

▶ $-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-6) \geqslant 0, \end{cases}$$

Решая эти неравенства (рис. 15), получаем

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Заданное неравенство имеет вид $|t| \leqslant 6$ (в данном случае $t = x^2 - 5x$), и его можно решать, используя геометрический смысл модуля. С геометрической точки зрения, $|t|$ — это расстояние от точки 0 до точки t. На расстоянии 6 от 0 находятся числа 6 и −6.

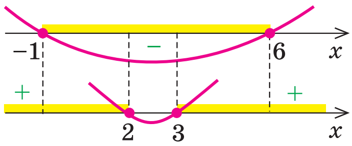


Рис. 15

Следовательно, $-1 \leqslant x \leqslant 2$ или $3 \leqslant x \leqslant 6$.

Ответ: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. ◁

Тогда неравенству $|t| \leqslant 6$ удовлетворяют все те и только те точки, которые находятся в промежутке $[-6; 6]$, то есть $-6 \leqslant t \leqslant 6$. Для решения полученного двойного неравенства его удобно заменить соответствующей системой.

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие числа входят в множества целых, рациональных и действительных чисел. Приведите примеры. Изобразите соответствующие точки на координатной прямой.
2. Объясните, чем отличаются записи в виде бесконечной десятичной дроби рационального и иррационального чисел.
3. Объясните, как сравнивают действительные числа.
4. Дайте определение модуля действительного числа. а) Сформулируйте свойства модуля. б*) Обоснуйте свойства модуля действительного числа.

Упражнения

1. Объясните, почему заданное число не может быть рациональным:

   1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-5$; 3) $\sqrt{10}$;

   4) $\sqrt{7}+3$; 5) $2-\sqrt{5}$.

2*. Докажите, что сумма (разность, произведение и частное) рационального и иррационального чисел всегда есть число иррациональное (произведение и частное только в том случае, когда заданное рациональное число не равно нулю).

3*. Докажите, что заданное число является иррациональным:

   1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$;

   3) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

4. Пользуясь геометрическим смыслом модуля, изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:

   1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$;

   3) $|x-3| \leqslant 0{,}5$; 4) $|x+1| < 0{,}3$.

5. Решите уравнение:

   1) $|3x+1| = 4$; 2) $|4x-2| = 6$;

   3*) $||x-1|-2| = 1$; 4*) $||2x+3|-5| = 3$.

6. Решите неравенство:

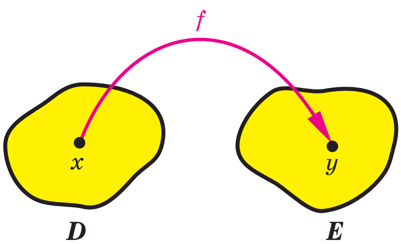
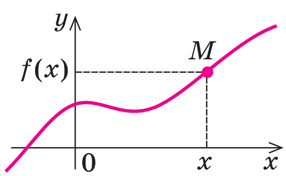
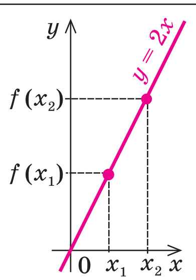
   1) $|2x-7| \leqslant 1$; 2) $|3x+5| > 7$;

   3*) $||2x-1|+3| \geqslant 5$; 4*) $||4x+7|-11| < 4$.

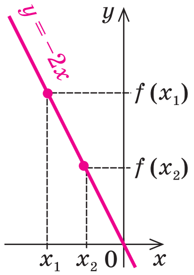
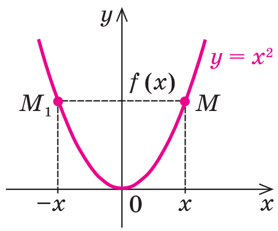
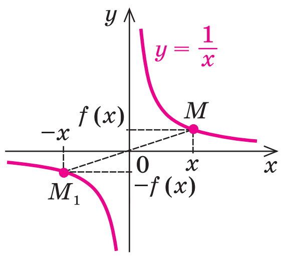
§ 2 ФУНКЦИИ

2.1. Понятие числовой функции. Простейшие свойства числовых функций

Таблица 3

<table>
<tr><td colspan="2">1. Понятие числовой функции</td></tr>
<tr><td>
</td><td>***Числовой функцией с областью определения*** D **называется зависимость, при которой каждому числу** x **из множества** D **(области определения) ставится в соответствие единственное число** y**.**
Записывают это соответствие так:
$$y = f(x).$$
Обозначения и термины
$D(f)$ — область определения
$E(f)$ — область значений
x — аргумент (независимая переменная)
y — функция (зависимая переменная)
f — функция
$f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. График функции</td></tr>
<tr><td>
</td><td>***Графиком функции*** f **называется множество всех точек координатной плоскости с координатами** $(x; f(x))$**,** где первая координата x «пробегает» всю область определения функции, а вторая координата — это соответствующее значение функции f в точке x</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Возрастающие и убывающие функции</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Функция $f(x)$
возрастающая на множестве P**:**
если $x_2 > x_1$**, то** $f(x_2) > f(x_1)$
для всех $x \in P$
(при увеличении аргумента соответствующие точки графика поднимаются)</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 3

<table>
<tr><td></td><td>Функция $f(x)$
убывающая на множестве P:
если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$
для всех $x \in P$
(при увеличении аргумента соответствующие точки графика опускаются)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Четные и нечетные функции</td></tr>
<tr><td></td><td>Функция $f(x)$ четная:
$f(-x) = f(x)$
для всех x из области определения.
График четной функции симметричен относительно оси Oy</td></tr>
<tr><td></td><td>Функция $f(x)$ нечетная:
$f(-x) = -f(x)$
для всех x из области определения.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат точки O</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Понятие функции. С понятием функции вы ознакомились в курсе алгебры. Напомним, что зависимость переменной y от переменной x называется *функцией*, если каждому значению x соответствует единственное значение y.

В курсе алгебры и начал анализа мы будем пользоваться таким определением числовой функции.

***Числовой функцией с областью определения D* называется зависимость, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное число y.**

Функции обозначают латинскими (иногда греческими) буквами. Рассмотрим произвольную функцию f. Число y, соответствующее числу x (на рисунке к пункту 1 табл. 3 это показано стрелкой), называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$.

Область определения функции f — это множество тех значений, которые может принимать аргумент x. Она обозначается $D(f)$.

Область значений функции f — это множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, где x принадлежит области определения. Ее обозначают $E(f)$.

Чаще всего функцию задают с помощью какой-либо формулы. Если нет дополнительных ограничений, то *областью определения функции, заданной формулой, считается множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл*.

Например, если функция задана формулой $y=\sqrt{x}+1$, то ее область определения: $x \geqslant 0$, то есть $D(y) = [0; +\infty)$, а область значений: $y \geqslant 1$, то есть $E(y) = [1; +\infty)$.

Иногда функция может задаваться разными формулами на разных множествах значений аргумента. Например, $y=|x|=\begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x<0. \end{cases}$

Функцию можно задать не только с помощью формулы, но и с помощью таблицы, графика или словесного описания. Например, на рисунке 16 графически задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D(f) = [-1; 3]$ и множеством значений $E(f) = [1; 4]$.

Значение, которое принимает функция $f(x)$ в некоторой точке x_0 множества M, на котором эта функция задана, называется *наибольшим* (*наименьшим* на этом множестве), если ни в какой другой точке множества функция не имеет большего (меньшего) значения. То есть для всех $x \in M$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$ для наименьшего значения). Иногда это записывают так: $\max\limits_{M} f(x)=f(x_0)$ (соответственно $\min\limits_{M} f(x)=f(x_0)$). Например, для функции $y = f(x)$, графически заданной на отрезке $[-1: 3]$ на рисунке 16, наименьшее значение равно 1, а наибольшее — 4. То есть $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=4$, $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=1$.

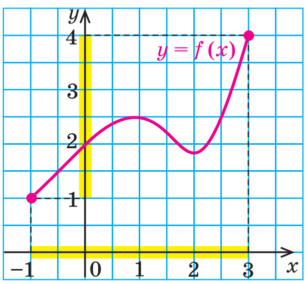


Рис. 16

2. График функции. Напомним, что

графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где первая координата x «пробегает» всю область определения функции, а вторая координата — это соответствующее значение функции f в точке x.

На рисунках к пункту 4 таблицы 3 приведены графики функций $y = x^2$ и $y=\frac{1}{x}$, а на рисунке 17 — график функции $y = |x|$.

Приведем также график функции $y = [x]$, где $[x]$ — обозначение *целой части* числа x, то есть наибольшего целого числа, не превышающего x (рис. 18). Область определения этой функции $D(y) = \boldsymbol{R}$ — множество всех действительных чисел, а область значений $E(y) = \boldsymbol{Z}$ — множество всех целых чисел.

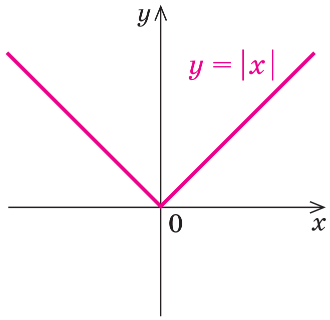


Рис. 17

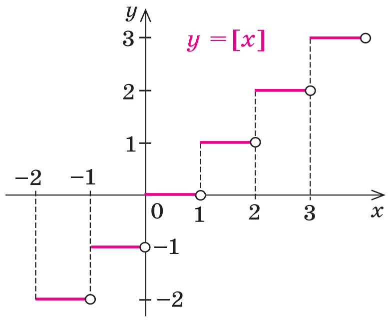


Рис. 18

На рисунке 19 приведен график числовой функции $y = \{x\}$, где $\{x\}$ — обозначение *дробной части* числа x (по определению $\{x\} = x - [x]$).

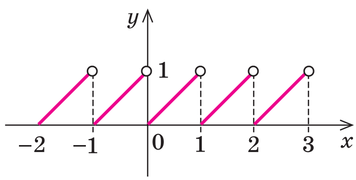


Рис. 19

3. Возрастающие и убывающие функции. Важными характеристиками функций являются их возрастание и убывание.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей на множестве P*, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции,

то есть для любых двух значений x_1 и x_2 из множества P,

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) > f(x_1).$$

Например, функция $f(x) = 2x$ возрастающая (на всей области определения — на множестве $\boldsymbol{R}$), поскольку при $x_2 > x_1$ имеем $2x_2 > 2x_1$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$. У возрастающей функции при увеличении аргумента соответствующие точки графика поднимаются (рис. 20).

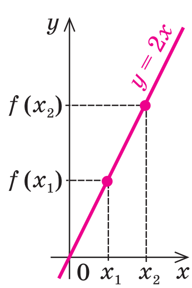


Рис. 20

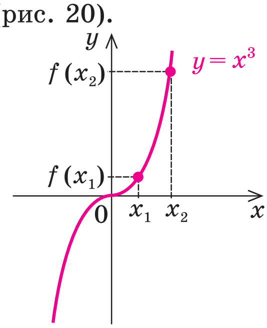


Рис. 21

На рисунке 21 приведен график возрастающей функции $y = x^3$. Действительно, при $x_2 > x_1$ имеем $x_2^3 > x_1^3$, то есть $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется *убывающей на множестве* P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

То есть для любых двух значений x_1 и x_2 из множества P,

$$\text{если } x_2 > x_1, \text{ то } f(x_2) < f(x_1).$$

Например, функция $f(x) = -2x$ убывающая (на всей области определения — на множестве $\boldsymbol{R}$), поскольку при $x_2 > x_1$ имеем $-2x_2 < -2x_1$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$. Соответствующие точки графика убывающей функции при увеличении аргумента опускаются (рис. 22).

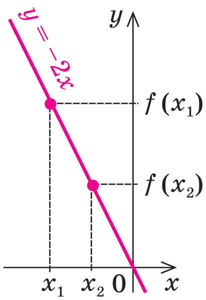


Рис. 22

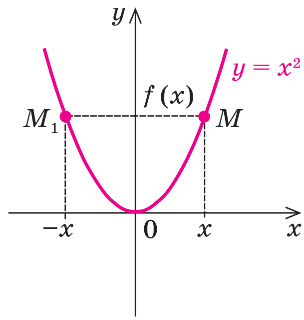


Рис. 23

Рассматривая график функции $y = x^2$ (рис. 23), видим, что на всей области определения эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. Однако можно выделить промежутки области определения, где эта функция возрастает и где убывает. Так, на промежутке $[0; +\infty)$ функция $y = x^2$ возрастает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ — убывает.

Отметим, что для возрастающих и убывающих функций выполняются свойства, обратные утверждениям, содержащимся в определениях.

Если функция возрастает, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента.
Если функция убывает, то большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента.

● Обоснуем первое из этих свойств методом от противного. Пусть функция $f(x)$ возрастает и $f(x_2) > f(x_1)$. Допустим, что аргумент x_2 не больше аргумента x_1, то есть $x_2 \leqslant x_1$. Из этого предположения получаем: если $x_2 \leqslant x_1$ и $f(x)$ возрастает, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, что противоречит условию $f(x_2) > f(x_1)$. Таким образом, наше предположение неверно, и если $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, что и требовалось доказать.

Аналогично обосновывается и второе свойство. ○

Например, если $x^3 > 8$, то есть $x^3 > 2^3$, то, учитывая возрастание функции $f(x) = x^3$, получаем $x > 2$.

4. Четные и нечетные функции. Рассмотрим функции, области определения которых симметричны относительно начала координат, то есть содержат вместе с каждым числом x и число $-x$. Для таких функций вводятся понятия четности и нечетности.

Функция f называется *четной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$.

Например, функция $y = x^2$ (то есть функция $f(x) = x^2$) — четная, поскольку $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

● Если функция $f(x)$ четная, то ее графику вместе с каждой точкой M с координатами $(x; y) = (x; f(x))$ принадлежит также и точка M_1 с координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M и M_1 расположены симметрично относительно оси Oy (рис. 24), поэтому и **график четной функции расположен симметрично относительно оси Oy**. ○

Например, график четной функции $y = x^2$ (рис. 23) симметричен относительно оси Oy.

Функция f называется *нечетной*, если для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$.

Например, функция $y = \frac{1}{x}$ $\left(\text{то есть функция } f(x) = \frac{1}{x}\right)$ — нечетная, поскольку

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

● Если функция $f(x)$ нечетная, то ее графику вместе с каждой точкой M с координатами $(x; y) = (x; f(x))$ принадлежит также и точка M_1 с координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$. Точки M и M_1 расположены симметрично относительно начала координат (рис. 25), поэтому и **график нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.** ○

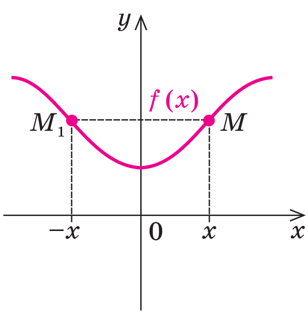


Рис. 24

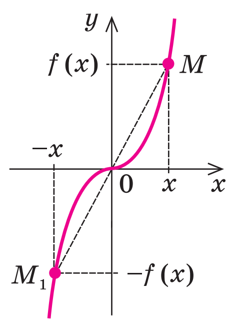


Рис. 25

Например, график нечетной функции $y = \frac{1}{x}$ (см. пункт 4 табл. 3) симметричен относительно начала координат, то есть точки O.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Ограничений для нахождения значений выражения $x^2 + x$ нет, таким образом, $D(y) = \boldsymbol{R}$.◁ 2) ▶ Область определения функции $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задается ограничением $x^2 + x \neq 0$, поскольку знаменатель дроби не может быть равным нулю. Выясним, когда $x^2 + x = 0$. Имеем $x(x + 1) = 0$, $x = 0$ или $x = -1$. Тогда область определения можно задать ограничениями $x \neq 0$, $x \neq -1$ или записать так: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.◁ 3) ▶ Область определения функции $y = \sqrt{x+5}$ задается ограничением $x + 5 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -5$, поскольку под знаком квадратного корня должно стоят неотрицательное выражение. Таким образом, $D(y) = [-5; +\infty)$.◁	Поскольку все функции заданы формулами, то их области определения — это множество всех значений переменной x, при которых формула имеет смысл, то есть имеет смысл выражение, которое стоит в правой части формулы $y = f(x)$. В курсе алгебры встречались только два *ограничения*, которые необходимо учитывать *при нахождении области определения*: 1) *если выражение записано в виде дроби* $\frac{A}{B}$, *то знаменатель* $B \neq 0$; 2) *если запись выражения содержит квадратный корень* $\sqrt{A}$, *то подкоренное выражение* $A \geqslant 0$. В других случаях, которые вам приходилось рассматривать, областью определения выражения были все действительные числа[1].

Задача 2* Найдите область значений функции $y = x^2 - 3$.

Решение	*Комментарий*
▶ Составим уравнение $x^2 - 3 = a$. Оно равносильно уравнению $x^2 = a + 3$, которое имеет решения, если $a + 3 \geqslant 0$, то есть при $a \geqslant -3$. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, область значений заданной функции $E(f) = [-3; +\infty)$, то есть $y \geqslant -3$.◁	Обозначим значение заданной функции $f(x)$ (то есть $x^2 - 3$) через a и выясним, для каких a можно найти соответствующее значение x (при этом значении x значение $f(x) = a$). Тогда все числа a, для которых существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = a$, войдут в область значений функции $f(x)$. Множество всех таких a и составит область значений функции.

[1] В дальнейшем курсе алгебры и начал анализа 10 класса появятся новые выражения с ограничениями: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^{α}, где α — нецелое число.

Полезно помнить, что

область значений функции $y = f(x)$ совпадает с множеством тех значений a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения.

Задача 3* Докажите, что **при $k \neq 0$ областью значений линейной функции $y = kx + b$ является множество всех действительных чисел.**

Решение	*Комментарий*
▶ Если $kx + b = a$ (где $k \neq 0$), то решение этого уравнения $x = \frac{a-b}{k}$ существует для любого $a \in \boldsymbol{R}$ ($k \neq 0$ по условию). ◁ Таким образом, значением заданной функции может быть любое действительное число. Итак, ее область значений $E(f) = \boldsymbol{R}$.	Обозначим значение заданной функции $f(x)$, то есть $kx + b$, через a и выясним, для каких a можно найти соответствующее значение x, такое, что $f(x) = a$. Множество всех таких значений a и будет составлять область значений функции $f(x)$.

Задача 4* Докажите, что **линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ является возрастающей, а при $k < 0$ — убывающей.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть $x_2 > x_1$ (тогда $x_2 - x_1 > 0$). Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Поскольку $x_2 - x_1 > 0$, то при $k > 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) > 0$, таким образом, $f(x_2) > f(x_1)$, и значит, функция возрастает. При $k < 0$ имеем $f(x_2) - f(x_1) < 0$, таким образом, $f(x_2) < f(x_1)$, значит, функция убывает. ◁	Для обоснования возрастания или убывания функции полезно помнить, что *для доказательства неравенства $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$ достаточно найти знак разности $f(x_2) - f(x_1)$.* Функция $f(x) = kx + b$ будет возрастающей, если из неравенства $x_2 > x_1$ будет следовать неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, а для доказательства последнего неравенства достаточно найти знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ (аналогично рассуждаем и для доказательства убывания функции).

Задача 5* Докажите, что:

1) сумма двух возрастающих на множестве P функций всегда является возрастающей функцией на этом множестве;

2) сумма двух убывающих на множестве P функций всегда является убывающей функцией на этом множестве.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются возрастающими на одном и том же множестве P. Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ и $g(x_2) > g(x_1)$. Складывая почленно эти неравенства, получаем $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$. Это и означает, что сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ является возрастающей функцией на множестве P. ◁ 2) ▶ Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ являются убывающими на множестве P. Тогда из неравенства $x_2 > x_1$ имеем $f(x_2) < f(x_1)$ и $g(x_2) < g(x_1)$. После почленного сложения этих неравенств получаем: $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$, а это и означает, что сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ является убывающей функцией на множестве P. ◁	Для доказательства того, что сумма двух возрастающих функций $f(x)$ и $g(x)$ является возрастающей функцией, достаточно доказать, что на множестве P из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1)$. Аналогично для доказательства того, что сумма двух убывающих функций является убывающей функцией, достаточно доказать, что если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$.

Задача 6* Докажите, что **возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.**

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть функция $f(x)$ является возрастающей и $f(x_1) = f(x_2)$. (1) Допустим, что $x_1 \neq x_2$. Если $x_1 \neq x_2$, то $x_1 > x_2$ или $x_1 < x_2$. Учитывая возрастание $f(x)$, в случае $x_1 > x_2$ имеем $f(x_1) > f(x_2)$, что противоречит равенству (1). В случае $x_1 < x_2$ имеем $f(x_1) < f(x_2)$, что также противоречит равенству (1). Таким образом, наше предположение неверно, и равенство $f(x_1) = f(x_2)$ возможно только при $x_1 = x_2$.	Докажем это утверждение методом от противного. Для этого достаточно допустить, что выполняется противоположное утверждение (функция может принимать одно и то же значение хотя бы в двух точках), и получить противоречие. Это будет означать, что наше предположение неверно, а верно данное утверждение.

То есть возрастающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.

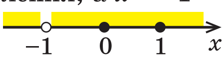
Аналогично доказывается утверждение и для убывающей функции. ◁

Задача 7 Исследуйте, какие из данных функций являются четными, какие нечетными, а какие — ни четными, ни нечетными:

1) $y=\frac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Решение	*Комментарий*

1) ▶ Область определения функции $y=\frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, то есть она не симметрична относительно точки O (точка $x = 1$ принадлежит области определения, а $x = -1$ — нет).



Таким образом, заданная функция не является ни четной, ни нечетной. ◁

2) ▶ Область определения функции $y = x^4$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, то есть она симметрична относительно точки O.
$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, следовательно, функция четная. ◁

3) ▶ Область определения функции $y = x^3 + x$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, то есть она симметрична относительно точки O. ◁
$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, значит, функция нечетная.

Комментарий. Для исследования функции $y = f(x)$ на четность или нечетность достаточно, во-первых, убедиться, что область определения этой функции симметрична относительно точки O (вместе с каждой точкой x содержит и точку $-x$), и, во-вторых, сравнить значения $f(-x)$ и $f(x)$.

Вопросы для контроля

1. Что называется числовой функцией? Приведите примеры таких функций.
2. На примерах объясните, что такое область определения функции, область значений функции, наибольшее и наименьшее значения функции на множестве M. Какие ограничения необходимо учесть при нахождении области определения функции $y=\frac{\sqrt{x}}{x}$? Найдите ее область определения.
3. Что называется графиком функции $y = f(x)$? Приведите примеры.

4. Какая функция называется возрастающей? Приведите примеры.
5. Какая функция называется убывающей? Приведите примеры.
6. Какая функция называется четной? Приведите примеры. Как расположен график четной функции на координатной плоскости? Приведите примеры.
7. Какая функция называется нечетной? Приведите примеры. Как расположен график нечетной функции на координатной плоскости? Приведите примеры.

Упражнения

1°. Найдите значение функции в указанных точках:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ в точках 2; –1; 3; a ($a \neq 0$);

2) $g(x) = x^2 - 3$ в точках 0; 1; –2; b;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ в точках 0; 3; –1; m ($m > 0$).

2. Найдите область определения функции, заданной формулой:

1°) $y = 2x + 3$; 2°) $y = \sqrt{x+3}$; 3°) $y = \frac{1}{x+1}$; 4) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

5) $y = \sqrt{x^2-1}$; 6) $y = \sqrt{x^2+1}$; 7) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$; 8) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; 10*) $y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; 11*) $y = \frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$; 12*) $y = \sqrt{x^2+x+1}$.

3. Найдите область значений функции, заданной формулой:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$;

5*) $y = -3x + 1$; 6*) $y = x^2 - 5$; 7*) $y = |x| + 3$.

4°. Для функций, заданных своими графиками на рисунках 26 и 27, укажите область определения, область значений, наибольшее и наименьшее значения на всей области определения, промежутки возрастания и убывания и значение каждой функции при $x = 1$.

5. Обоснуйте, что заданная функция является возрастающей (на ее области определения):

1) $y = 3x$; 2) $y = x + 5$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^5$; 5*) $y = \sqrt{x}$.

6*. Докажите, что на заданном промежутке функция возрастает:

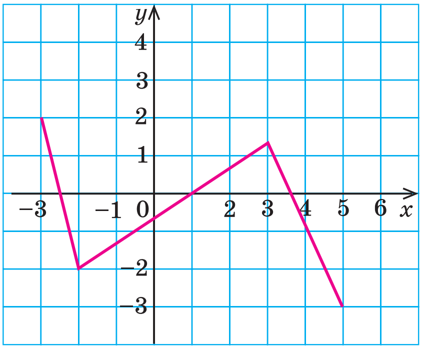
1) $y = -\frac{2}{x}$, где $x > 0$; 2) $y = -\frac{1}{x}$, где $x < 0$.

7. Обоснуйте, что заданная функция является убывающей (на ее области определения):

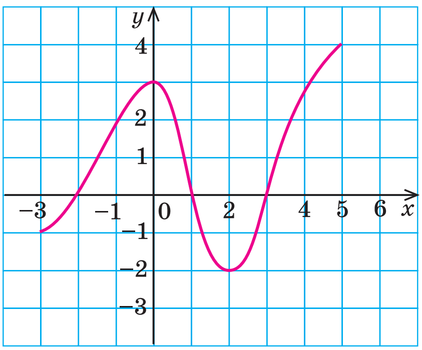
1) $y = -3x$; 2) $y = -x - 1$; 3*) $y = -x^3$; 4*) $y = -x^5$.

8*. Докажите, что на заданном промежутке функция убывает:

1) $y = \frac{3}{x}$, где $x < 0$; 2) $y = \frac{5}{x}$, где $x > 0$.

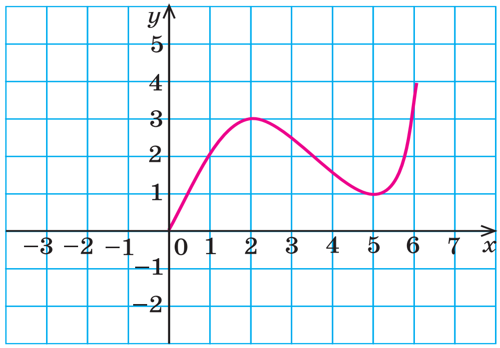


а

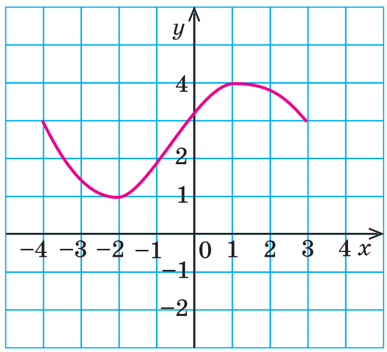


б

Рис. 26



а



б

Рис. 27

9*. Докажите, что функция $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает, а на промежутке $(-\infty; 0]$ убывает.

10*. Используя утверждения, приведенные в задаче 5 (с. 35), укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = -x - x^5$; 3) $y = x + \sqrt{x}$; 4) $y = -x^3 - x^5$.

11*. Используя утверждения, приведенные в задаче 6 (с. 36):

1) обоснуйте, что уравнение $x^3 + x = 10$ имеет единственный корень $x = 2$;

2) подберите корень уравнения $\sqrt{x} + x = 6$ и докажите, что других корней это уравнение не имеет.

12. Обоснуйте, что заданная функция является четной:

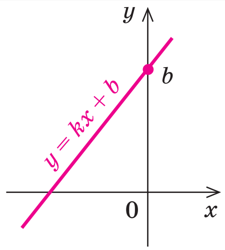
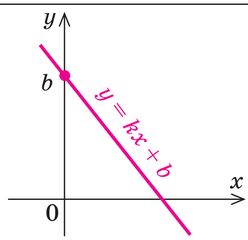
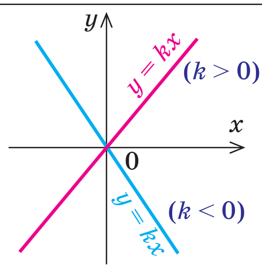
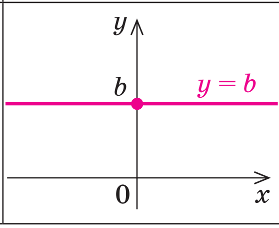
1) $y = x^6$; 2) $y = \frac{1}{x^2} + 1$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{|x| + x^4}$.

13. Обоснуйте, что заданная функция является нечетной:

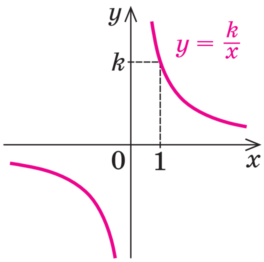
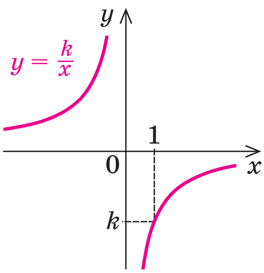
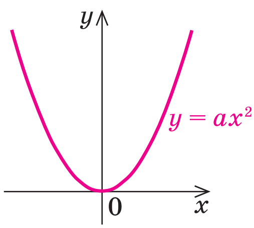
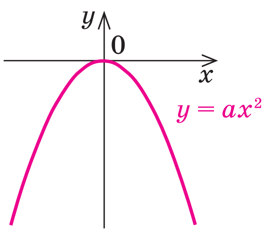
1) $y = x^5$; 2) $y = -\frac{1}{x^3}$; 3) $y = x\,|x|$; 4) $y = x^3 - x$.

2.2. Свойства и графики основных видов функций

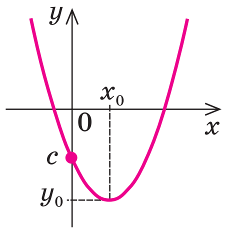
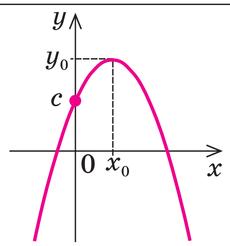
Таблица 4

<table>
<tr><th rowspan="2">Условия для коэффициентов</th><th rowspan="2">График</th><th colspan="4">Свойства</th></tr>
<tr><th>$D(y)$</th><th>$E(y)$</th><th>четность и нечетность</th><th>возрастание и убывание</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td colspan="6">1. Линейная функция $y = kx + b$</td></tr>
<tr><td>$k > 0$</td><td>
</td><td rowspan="5">$\boldsymbol{R}$</td><td rowspan="4">$\boldsymbol{R}$</td><td rowspan="2">ни четная, ни нечетная</td><td>возрастает</td></tr>
<tr><td>$k < 0$</td><td>
</td><td>убывает</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b = 0$
$y = kx$</td><td rowspan="2">
</td><td rowspan="2">нечетная</td><td>при $k > 0$ возрастает</td></tr>
<tr><td>при $k < 0$ убывает</td></tr>
<tr><td>$k = 0$
$y = b$</td><td>
</td><td>b</td><td>четная</td><td>постоянная</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6
2. Обратная пропорциональность, функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$					
$k > 0$		$x \neq 0$	$y \neq 0$	нечетная	убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
$k < 0$					возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$
3. Функция $y = ax^2$ $(a \neq 0)$					
$a > 0$		$\boldsymbol{R}$	$[0; +\infty)$	четная	убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; 0]$		возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, убывает на промежутке $[0; +\infty)$

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6
4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $\left(a \neq 0, x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$					
$a > 0$		$\boldsymbol{R}$	$[y_0; +\infty)$	в общем виде — ни четная, ни нечетная	убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$, возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty; y_0]$	при $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ четная	возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$, убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$

Объяснение и обоснование

1. Линейная функция $y = kx + b$. *Линейной функцией* называется функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа.

Обоснуем основные характеристики этой функции: область определения, область значений, четность или нечетность, возрастание и убывание.

Область определения — множество всех действительных чисел: $D(y) = \boldsymbol{R}$, поскольку формула $kx + b$ имеет смысл при всех действительных значениях x (то есть для любого действительного x мы можем вычислить значение $kx + b$) .

Область значений линейной функции будет разной в зависимости от значения коэффициента k.

Если $k = 0$, то функция имеет вид $y = b$, то есть ее область значений состоит из одного числа b. В таком случае **графиком линейной функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox, которая пересекает ось Oy в точке b** (рис. 28).

Если $k \neq 0$, то $E(y) = \boldsymbol{R}$ (обоснование приведено в примере 3 на с. 35).

Четность и нечетность линейной функции существенно зависит от значений коэффициентов b и k.

При $b = 0$ и $k \neq 0$ функция $y = kx + b$ превращается в функцию $y = kx$, которая является нечетной, поскольку для всех x из ее области определения

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

Таким образом, график функции $y = kx$ (рис. 29) симметричен относительно точки O.

При $k = 0$ получаем функцию $y = b$, которая является четной, поскольку для всех x из ее области определения $f(-x) = b = f(x)$. То есть график функции $y = b$ симметричен относительно оси Oy (рис. 28).

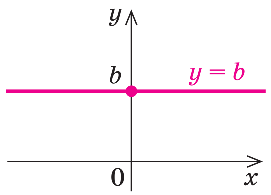


Рис. 28

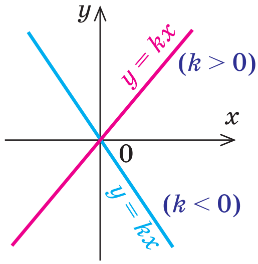


Рис. 29

В общем случае при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ функция $y = kx + b$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$ и также

$$f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x).$$

Возрастание и убывание линейной функции зависит от значения коэффициента k.

При $k = 0$ получаем функцию $y = b$ — постоянную.

При $k > 0$ функция $y = kx + b$ возрастает, а при $k < 0$ — убывает (обоснование приведено в примере 4 на с. 35).

В курсе геометрии было показано, что **графиком линейной функции $y = kx + b$ всегда является прямая линия.**

Поскольку при $x = 0$ функция принимает значение $y = b$, то *эта прямая всегда пересекает ось Oy в точке b*. Графики линейных функций приведены в таблице 4.

2. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$). Эта функция выражает *обратно пропорциональную зависимость.*

Область определения: $x \neq 0$. Это можно записать также так:

$$D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Область значений: $y \neq 0$. Это можно записать также так:

$$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Для обоснования области значений функции $y = \frac{k}{x}$ обозначим $\frac{k}{x} = a$. Тогда из этого равенства получим $x = \frac{k}{a}$ для всех $a \neq 0$. То есть для всех $a \neq 0$ существует значение $x = \frac{k}{a}$, при котором $y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\frac{k}{a}} = a$. Таким образом, y принимает все действительные значения, не равные нулю.

Функция нечетная, поскольку ее областью определения является множество, симметричное относительно точки O, и $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$. Таким образом, ее график симметричен относительно начала координат (рис. 30 и 31).

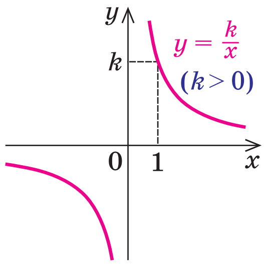


Рис. 30

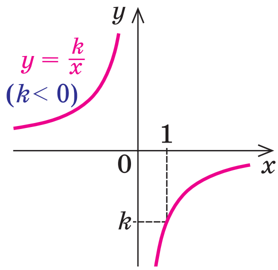


Рис. 31

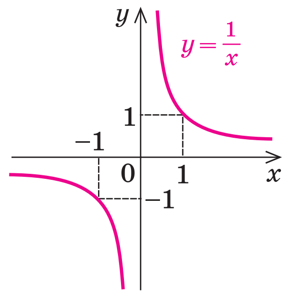


Рис. 32

Возрастание и убывание функции зависит от знака коэффициента k. Если $x_2 > x_1$ (то есть $x_2 - x_1 > 0$), то для сравнения значений $f(x_2)$ и $f(x_1)$ рассмотрим их разность:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1x_2} = \frac{-k(x_2 - x_1)}{x_1x_2}. \qquad (1)$$

На промежутке $(0; +\infty)$ значение $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, следовательно, $x_1x_2 > 0$. На промежутке $(-\infty; 0)$ значение $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, значит, $x_1x_2 > 0$.
Учитывая, что $x_2 - x_1 > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ или $(0; +\infty)$, при $k > 0$ из равенства (1) получаем $f(x_2) - f(x_1) < 0$, а при $k < 0$ получаем $f(x_2) - f(x_1) > 0$.
При $k > 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$, таким образом, функция убывает на каждом из этих промежутков.
При $k < 0$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$, следовательно, функция возрастает на каждом из этих промежутков.

Из курса алгебры известно, что график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ называется *гиперболой* (она состоит из двух ветвей). При $k > 0$ ветви гиперболы находятся в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ — во II и IV четвертях (рис. 30 и 31).

Замечание. Характеризируя возрастание или убывание функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, следует помнить, что, например, функция $y = \frac{1}{x}$ (рис. 32) убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, но на всей области определения $(x \neq 0)$ эта функция не является убывающей (и не является возрастающей). Действительно, если взять $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, то $x_2 > x_1$, но $f(x_2) = f(1) = 1$, а $f(x_1) = f(-1) = -1$, то есть большему значению аргумента не соответствует меньшее значение функции, и на всей ее области определения функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не является убывающей.

Поэтому же нельзя сказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ убывает при $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

3. Функция $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Как известно из курса алгебры, графиком этой функции является *парабола*, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ (рис. 33) и вниз при $a < 0$ (рис. 34). Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то график всегда проходит через начало координат.

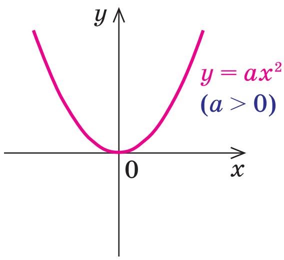


Рис. 33

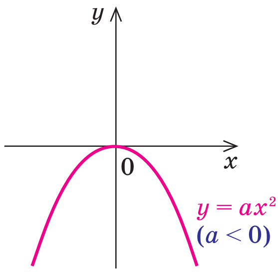


Рис. 34

Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$, поскольку значение $y = ax^2$ можно вычислить при любых значениях x.

Функция четная, поскольку $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Таким образом, ее график симметричен относительно оси Oy.

Для описания других свойств воспользуемся графиком функции $y = ax^2$ (рис. 33 и 34). Эти свойства можно обосновать аналитически (проведите такое обоснование самостоятельно) или опираясь на свойства функции $y = x^2$ и на геометрические преобразования ее графика, которые будут рассмотрены далее в пункте 2.3.

Область значений. При $a > 0$ график проходит через начало координат, а все остальные его точки находятся выше оси Ox. Если значение x увеличивается до бесконечности, то и значение y также увеличивается до бесконечности ($+\infty$), таким образом, $y \geqslant 0$, то есть $E(y) = [0;\ +\infty)$.

Аналогично при $a < 0$ график также проходит через начало координат, но все остальные его точки находятся ниже оси Ox. Если значение x увеличивается до бесконечности, то значение y уменьшается до минус бесконечности ($-\infty$), таким образом, $y \leqslant 0$, то есть $E(y) = (-\infty;\ 0]$.

Возрастание и убывание. При $a > 0$ на промежутке $(-\infty;\ 0]$ функция убывает, а на промежутке $[0;\ +\infty)$ — возрастает.

При $a < 0$ на промежутке $(-\infty;\ 0]$ функция возрастает, а на промежутке $[0;\ +\infty)$ — убывает.

4. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Из курса алгебры 9 класса известно, что функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — действительные числа, причем $a \neq 0$, называется *квадратичной*. Ее графиком является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

Абсцисса вершины этой параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Для обоснования этого достаточно в заданном квадратном трехчлене выделить полный квадрат:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ то есть}$$

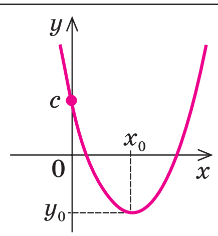
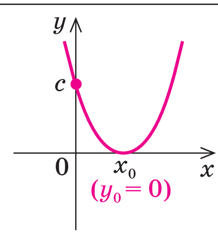
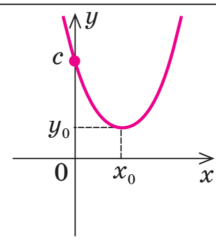
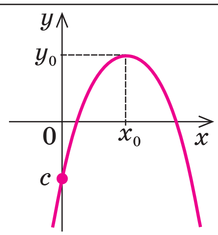
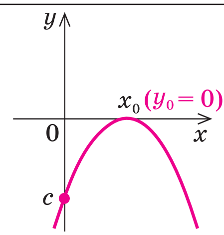
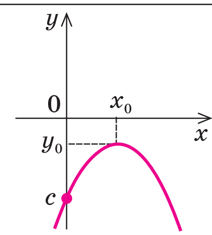
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ где } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

($D = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$).

Напомним, что в зависимости от знака дискриминанта D парабола или пересекает ось Ox ($D > 0$), или не пересекает ($D < 0$), или касается ее ($D = 0$).

Основные варианты расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представлены в таблице 5.

Таблица 5

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Охарактеризуем свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), опираясь на эти известные нам графики (самостоятельно обоснуйте соответствующие свойства аналитически).

Область определения: $D(y) = \boldsymbol{R}$, поскольку значение $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) можно вычислить при любых значениях x.

Область значений. При $a > 0$ функция принимает все значения $y \geqslant y_0$, то есть $E(y) = [y_0; +\infty)$. При $a < 0$ функция принимает все значения $y \leqslant y_0$, то есть $E(y) = (-\infty; y_0]$.

Четность и нечетность. При $b = 0$ получаем четную квадратичную функцию $y = \varphi(x) = ax^2 + c$. Действительно, $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$.

В общем случае (если $b \neq 0$) функция $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не является ни четной, ни нечетной, поскольку $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$ (и не равно $-f(x)$).

Возрастание и убывание. При $a > 0$ на промежутке $(-\infty;\ x_0]$ функция убывает, а на промежутке $[x_0;\ +\infty)$ — возрастает.

При $a < 0$ на промежутке $(-\infty;\ x_0]$ функция возрастает, а на промежутке $[x_0;\ +\infty)$ — убывает.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = c$, то *график всегда пересекает ось Oy в точке c.*

Соответствующие графики при $D > 0$ приведены также в таблице 4.

Примеры решения задач

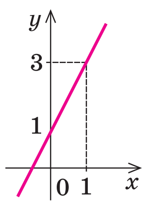
Задача 1 Постройте график функции:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = 4$.

Решение

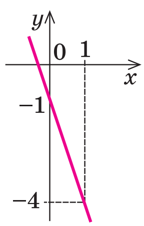
1) ▶ График функции $y = 2x + 1$ — прямая. ◁

x	0	1
y	1	3



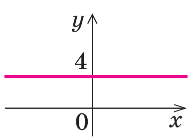
2) ▶ График функции $y = -3x - 1$ — прямая. ◁

x	0	1
y	−1	−4



3) ▶ График функции $y = 4$ — прямая, параллельная оси Ox, которая проходит через точку 4 на оси Oy.

x	0	1
y	4	4



Комментарий

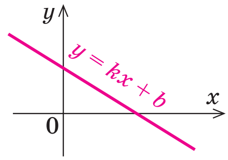
Все данные функции линейные, поэтому их графиками являются прямые.

Чтобы построить прямые в заданиях 1 и 2, достаточно построить две точки этих прямых. Например, можно взять $x = 0$ и $x = 1$ и найти соответствующие значения y. Оформлять эти вычисления удобно в виде таблички:

x	0	1
y		

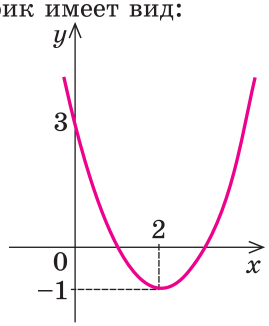
В задании 3 рассматривается частный случай линейной функции ($y = b$). Для построения этого графика полезно помнить, что прямая $y = 4$ — это прямая, параллельная оси Ox (при любом значении x значение y равно 4).

Задача 2* По приведенному графику функции $y = kx + b$ укажите знаки k и b.



Решение	*Комментарий*
▶ При $x = 0$ значение $y = b$. По приведенному графику определяем, что $b > 0$. Поскольку изображен график убывающей линейной функции, то $k < 0$. *Ответ:* $b > 0$, $k < 0$. ◁	График функции $y = kx + b$ — прямая, пересекающая ось Oy в точке b. На рисунке эта точка лежит выше нуля, таким образом, $b > 0$. Линейная функция $y = kx + b$ при $k > 0$ возрастающая, а при $k < 0$ — убывающая. На рисунке изображен график убывающей функции, следовательно, $k < 0$.

Задача 3 Постройте график[1] функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение	*Комментарий*
▶ График заданной функции — парабола (вида $y = x^2$), ветви которой направлены вверх. Абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$ Тогда $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ и график имеет вид:  ◁	Функция $y = x^2 - 4x + 3$ — квадратичная (имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$). Таким образом, ее графиком будет парабола (вида $y = ax^2$), ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$). Абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 — это соответствующее значение заданной функции при $x = x_0$, то есть $y_0 = y(x_0)$. Если необходимо уточнить, как проходит график, то можно найти координаты нескольких дополнительных точек, например, при $x = 0$ получаем $y = c = 3$.

[1] Построение таких графиков с помощью геометрических преобразований графика функции $y = x^2$ будет рассмотрено в пункте 2.3.

Вопросы для контроля

1. Какая функция называется линейной? Назовите свойства линейной функции. Какая линия является графиком линейной функции? Приведите примеры линейных функций и их графиков.
2. Какая линия является графиком функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$? Приведите примеры графиков функций $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ и при $k<0$. По графикам укажите свойства этой функции при $k>0$ и при $k<0$. Докажите нечетность функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.
3. Какая линия является графиком функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$? Как расположен этот график при $a > 0$ и при $a < 0$? Приведите примеры графиков функций $y = ax^2$ при $a > 0$ и при $a < 0$. По графикам укажите свойства этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$. Докажите четность функции $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.
4. Какая линия является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Как расположен график при $a > 0$ и при $a < 0$? Как найти абсциссу вершины графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$? Приведите примеры графиков этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$. По графикам укажите свойства этой функции при $a > 0$ и при $a < 0$.

Упражнения

1°. Постройте график функции:
1) $y = 3x - 2$; 2) $y = -x + 4$; 3) $y = -2$; 4) $y = -5x$; 5) $y = 0$; 6) $y = 4x$.
Есть ли среди этих функций четные или нечетные? Ответ обоснуйте.

2*. По приведенным графикам функций $y = kx + b$ (рис. 35) укажите знаки k и b в каждом случае.

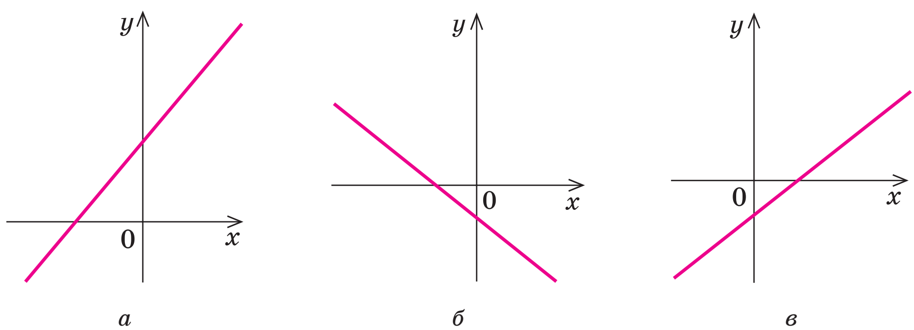


Рис. 35

Постройте график функции **(3–5).**

3°. 1) $y = -\frac{2}{x}$; 2) $y = \frac{3}{x}$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{5}{x}$.

4°. 1) $y = -2x^2$; 2) $y = 3x^2$; 3) $y = -3x^2$; 4) $y = 5x^2$.

5. 1) $y = x^2 - 6x + 7$; 2) $y = -x^2 + 4x + 2$;
3) $y = 2x^2 - 2x + 1$; 4) $y = -3x^2 + 6x$.

6*. По приведенным графикам функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (рис. 36) укажите знаки a, b и c в каждом случае.

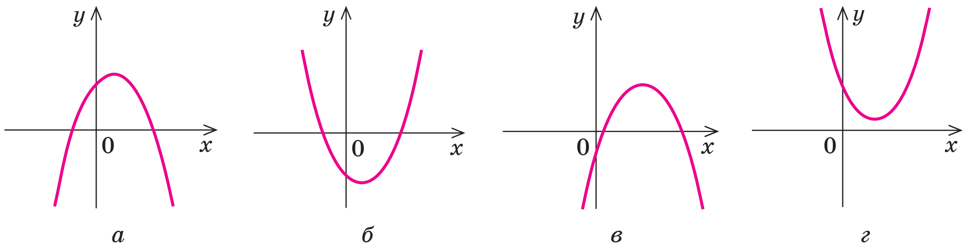


Рис. 36

7*. На рисунке изображены графики функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = x - 3$ (рис. 37). Укажите промежуток, в котором выполняется неравенство $\sqrt{x+3} \leqslant x - 3$.

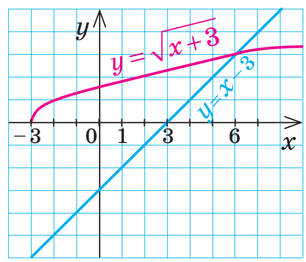
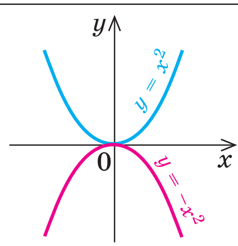


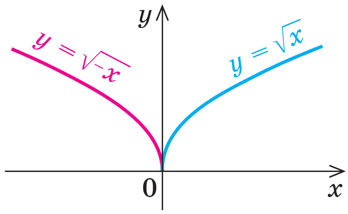
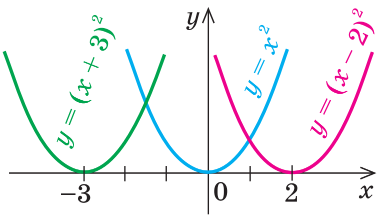
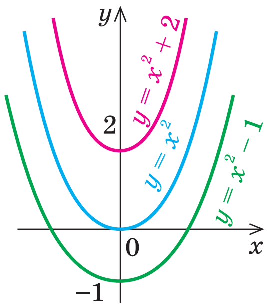
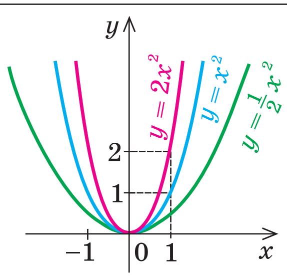
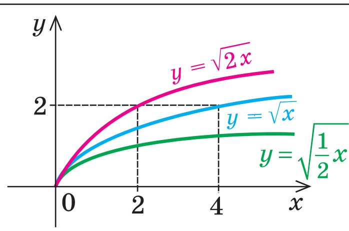
Рис. 37

2.3. Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований известных графиков функций

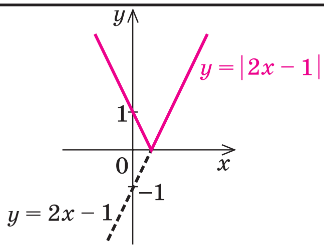
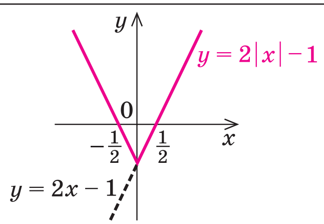
Таблица 6

Преобразование графика функции $y = f(x)$			
№	Формула зависимости	Пример	Преобразование
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия относительно оси Ox

Продолжение табл. 6

1	2	3	4
2	$y = f(-x)$		Симметрия относительно оси Oy
3	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на $\boldsymbol{a}$ единиц
4	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на $\boldsymbol{c}$ единиц
5	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Растяжение или сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy (при $k > 1$ растяжение, при $0 < k < 1$ — сжатие)
6	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Растяжение или сжатие графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox (при $\alpha > 1$ — сжатие, при $0 < \alpha < 1$ — растяжение)

Продолжение табл. 6

1	2	3	4
7	$y = \lvert f(x) \rvert$		Выше оси Ox (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox
8	$y = f(\lvert x \rvert)$		Справа от оси Oy (и на самой оси) график функции $y = f(x)$ — без изменений, и эта же часть графика — симметрия относительно оси Oy

Объяснение и обоснование

Рассмотрим способы построения графиков функций с помощью геометрических преобразований известных графиков функций.

1. Построение графика функции $y = -f(x)$. Сравним графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ (см. первую строку табл. 6). Очевидно, что график функции $y = -x^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ симметричным отображением его относительно оси Ox. Покажем, что всегда график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ox.

Действительно, по определению график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек M координатной плоскости, которые имеют координаты $(x; y) = (x; f(x))$. Тогда график функции $y = -f(x)$ состоит из всех точек K координатной плоскости, имеющих координаты $(x; y) = (x; -f(x))$. Точки $M(x; f(x))$ и $K(x; -f(x))$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно оси Ox (рис. 38). Таким образом, каждая точка K графика функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением относительно оси Ox некоторой точки M графика $y = f(x)$. Поэтому

график функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ его симметричным отображением относительно оси Ox.

Это свойство позволяет легко обосновать построение графика функции $y = \lvert f(x) \rvert$. Имеем:

$$y = \lvert f(x) \rvert = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geqslant 0 \text{ (график не меняется);} \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0 \text{ (симметрия относительно оси } Ox\text{).} \end{cases}$$

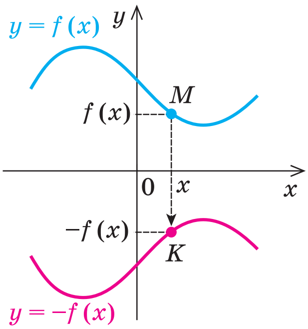


Рис. 38

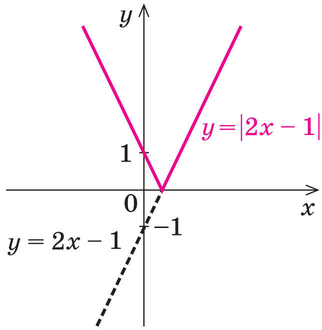


Рис. 39

Следовательно,

график функции $y = |f(x)|$ может быть построен так: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox (и на самой оси), остается без изменений, а часть, лежащая ниже оси Ox, отображается симметрично относительно этой оси.

Например, на рисунке 39 и в таблице 6 (строка седьмая) с использованием этого правила изображен график функции $y = |2x - 1|$.

2. Построение графика функции $y = f(-x)$.

Для построения графика функции $y = f(-x)$ учтем, что в определении графика функции первая координата для точек графика выбирается произвольно из области определения функции. Если выбрать как первую координату значение $(-x)$, то график функции $y = f(-x)$ будет состоять из всех точек T координатной плоскости с координатами $(-x;\ y) = (-x;\ f(x))$. Напомним, что график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x;\ f(x))$.

Точки $M(x;\ f(x))$ и $T(-x;\ f(x))$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно оси Oy (рис. 40). Таким образом, каждая точка T графика функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением относительно оси Oy некоторой точки M графика функции $y = f(x)$. Поэтому

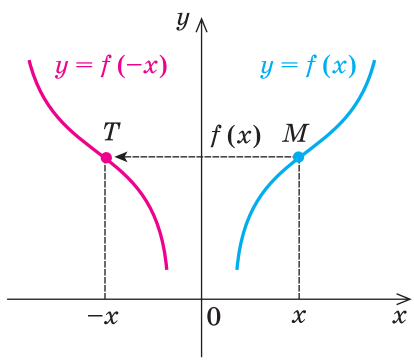


Рис. 40

график функции $y = f(-x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ его симметричным отображением относительно оси Oy.

Это свойство позволяет легко обосновать построение графика функции $y = f(|x|)$. Имеем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0 \text{ (график не меняется);} \\ f(-x) \text{ при } x < 0 \text{ (симметрия относительно оси } Oy). \end{cases}$$

Следовательно, для того чтобы получить график функции $y = f(|x|)$ при $x < 0$ (то есть слева от оси Oy), необходимо отобразить симметрично относительно оси Oy ту часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит справа от оси Oy. То есть часть графика функции $y = f(x)$, лежащая слева от оси Oy, вообще не используется в построении графика функции $y = f(|x|)$. Таким образом,

график функции $y = f(|x|)$ строится так: часть графика функции $y = f(x)$, лежащая справа от оси Oy (и на самой оси), остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy.

Например, на рисунке 41 и в таблице 6 (строка восьмая) с использованием этого правила изображен график функции $y = 2|x| - 1$.

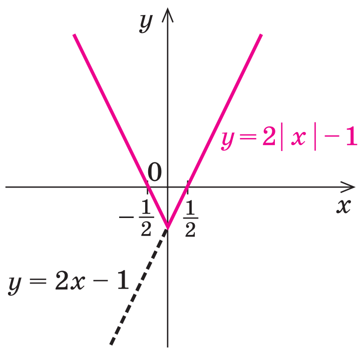


Рис. 41

3. Построение графика функции $y = f(x - a)$.

Для построения графика функции $y = f(x - a)$ выберем как первую координату точки N этого графика значение $x + a$. Тогда график функции $y = f(x - a)$ будет состоять из всех точек N координатной плоскости с координатами $(x + a; y) = (x + a; f(x + a - a)) = (x + a; f(x))$, а график функции $y = f(x)$ — из всех точек M с координатами $(x; f(x))$.

Если точка M имеет координаты $(x; y)$, а точка N — координаты $(x + a; y)$, то преобразование точек $(x; y) \to (x + a; y)$ — это параллельный перенос точки M вдоль оси Ox на a единиц (то есть на вектор $(\overline{a; 0})$).

Поскольку каждая точка N графика функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом некоторой точки M графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц (рис. 42), то

график функции $y = f(x - a)$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц.

Например, в третьей строке таблицы 6 изображен график функции $y = (x - 2)^2$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на +2 единицы вдоль оси Ox) и график функции $y = (x + 3)^2$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на −3 единицы вдоль оси Ox).

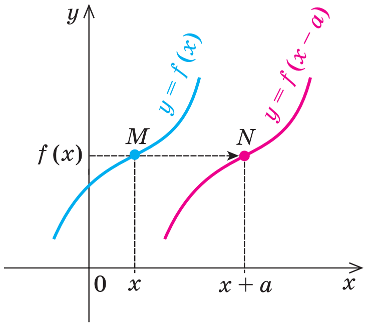


Рис. 42

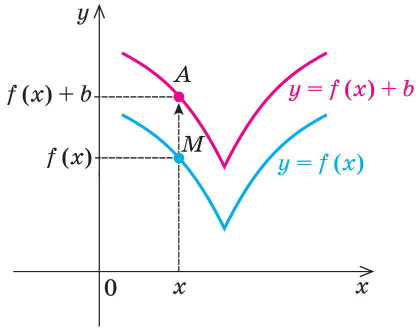


Рис. 43

4. Построение графика функции $y = f(x) + b$..

- График функции $y = f(x) + b$ состоит из всех точек A координатной плоскости с координатами $(x;\ y) = (x;\ f(x) + b)$, а график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x;\ f(x))$.

  Но если точка M имеет координаты $(x;\ y)$, а точка A — координаты $(x;\ y + b)$, то преобразование точек $(x;\ y) \to (x;\ y + b)$ — это параллельный перенос точки M вдоль оси Oy на b единиц (то есть на вектор $\left(\overline{0; b}\right)$).

  Поскольку каждая точка A графика функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом некоторой точки M графика $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b единиц (рис. 43), то

  график функции $y = f(x) + b$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy на b единиц. ○

Например, в четвертой строке таблицы 6 изображен график функции $y = x^2 + 2$ (выполнен параллельный перенос графика функции $y = x^2$ на $+2$ единицы вдоль оси Oy) и график функции $y = x^2 - 1$ (выполнен параллельный перенос графика $y = x^2$ на -1 вдоль оси Oy).

5. Построение графика функции $y = kf(x)$.

- График функции $y = kf(x)$ $(k > 0)$ состоит из всех точек $B(x;\ kf(x))$, а график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек $M(x;\ f(x))$ (рис. 44).

  Назовем *преобразованием растяжения вдоль оси Oy с коэффициентом k* (где $k > 0$) такое преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $(x;\ y)$ переходит в точку $(x;\ ky)$.

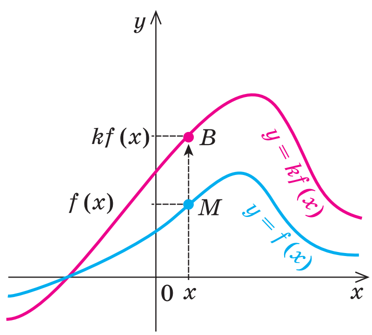


Рис. 44

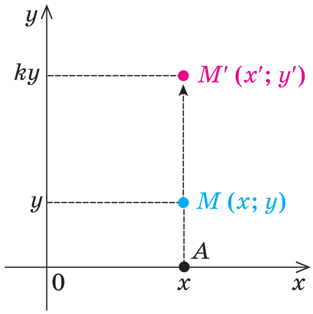


Рис. 45

Преобразование растяжения вдоль оси Oy задается формулами: $x' = x$; $y' = ky$. Эти формулы выражают координаты $(x'; y')$ точки M', в которую переходит точка $M\ (x; y)$ при преобразовании растяжения вдоль оси Oy (рис. 45). При этом преобразовании происходит растяжение отрезка AM в k раз, и в результате точка M переходит в точку M'. (Заметим, что иногда указанное преобразование графика функции $y = f(x)$ называют *растяжением* только *при* $k > 1$, а при $0 < k < 1$ его называют *сжатием вдоль оси* Oy в $\frac{1}{k}$ раз.)

Как видим, каждая точка B графика функции $y = kf(x)$ получается из точки M преобразованием растяжения вдоль оси Oy. При этом общая форма графика не изменяется: он растягивается или сжимается вдоль оси Oy. Например, если графиком функции $y = f(x)$ была парабола, то после растяжения или сжатия график остается параболой. Поэтому

график функции $y = kf(x)$ $(k > 0)$ получается из графика функции $y = f(x)$ его растяжением (при $k > 1$ растяжение в k раз) или сжатием (при $0 < k < 1$ сжатие в $\frac{1}{k}$ раз) вдоль оси Oy.

6. Построение графика функции $y = f(\alpha x)$.

Для построения графика функции $y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$ выберем как первую координату точки C этого графика значение $\frac{x}{\alpha}$. Тогда график функции $y = f(\alpha x)$ будет состоять из всех точек C с координатами $\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$, а график функции $y = f(x)$ — из всех точек $M\ (x; f(x))$ (рис. 46).

Назовем *преобразованием растяжения вдоль оси Ox с коэффициентом* α (где $\alpha > 0$) такое преобразование фигуры F, при котором каждая ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(\alpha x; y)$.

Преобразование растяжения вдоль оси Ox задается формулами: $x' = \alpha x$; $y' = y$. Эти формулы выражают координаты $(x'; y')$ точки M', в которую переходит точка $M(x; y)$ при преобразовании растяжения вдоль оси Ox (рис. 47). При этом преобразовании происходит растяжение отрезка BM в α раз, и в результате точка M переходит в точку M'. (Заметим, что иногда указанное преобразование называют растяжением (в $\frac{1}{\alpha}$ раз) только при $0 < \alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ его называют *сжатием вдоль оси* Ox (в α раз)). Как видим, каждая точка C графика функции $y = f(\alpha x)$ получается из точки M графика функции $y = f(x)$ преобразованием растяжения вдоль оси Ox (при этом общая форма графика не изменяется). Поэтому

график функции $y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$ получается из графика функции $y = f(x)$ его растяжением (при $0 < \alpha < 1$ растяжение в $\frac{1}{\alpha}$ раз) или сжатием (при $\alpha > 1$ сжатие в α раз) вдоль оси Ox. ○

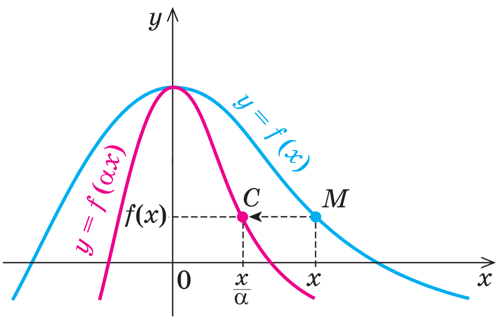


Рис. 46

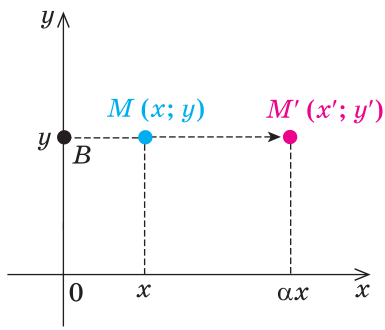
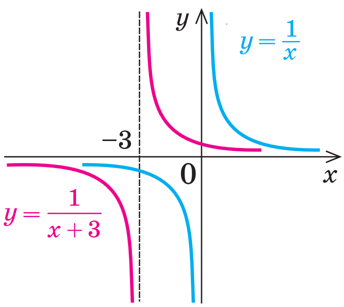


Рис. 47

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции $y = \frac{1}{x+3}$.

Решение



Комментарий

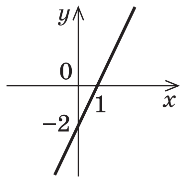
Мы можем построить график функции $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Тогда график функции $y = \frac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x-(-3))$ можно получить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на -3 единицы (то есть влево).

Задача 2 Постройте график функции $y = -|2x - 2|$.

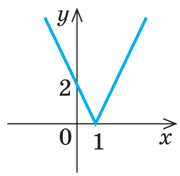
Решение

Последовательно строим графики:

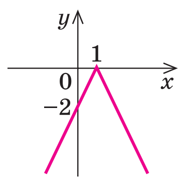
1. $y = 2x - 2$



2. $y = |2x - 2|$



3. $y = -|2x - 2|$



Комментарий

Составим план последовательного построения графика заданной функции.

1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = 2x - 2$ (прямая).
2. Затем можно построить график функции $y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$ (выше оси Ox график функции $y = 2x - 2$ остается без изменений, а часть графика ниже оси Ox отображается симметрично относительно оси Ox).
3. После этого можно построить график функции $$y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$$ (симметрия графика функции $y = \varphi(x)$ относительно оси Ox).

Задача 3* Постройте график функции $y = \sqrt{4 - |x|}$.

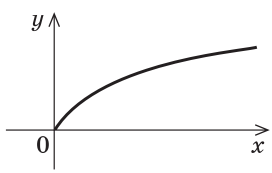
Решение

Запишем уравнение заданной функции так:

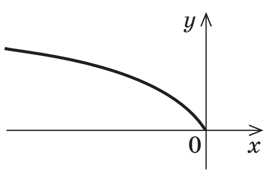
$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

Последовательно строим графики:

1. $y = \sqrt{x}$



2. $y = \sqrt{-x}$



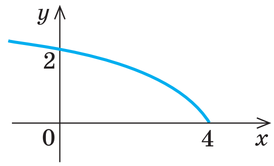
Комментарий

Составим план последовательного построения графика заданной функции. Для этого ее подкоренное выражение запишем так, чтобы можно было использовать преобразования графиков, представленные в таблице 4:

$$y = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

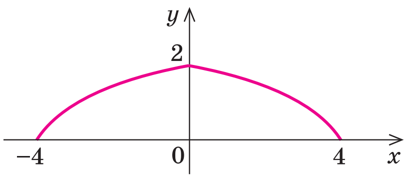
1. Мы можем построить график функции $y = f(x) = \sqrt{x}$.
2. Затем можно построить график функции $y = g(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ (симметрия графика функции $f(x)$ относительно оси Oy).

3. $y=\sqrt{-(x-4)}$



3. После этого можно построить график функции
$$y=\varphi(x)=\sqrt{-(x-4)}=g(x-4)$$
(параллельный перенос графика функции $g(x)$ вдоль оси Ox на 4 единицы).

4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$



4. Затем уже можно построить график заданной функции
$$y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$$
(справа от оси Oy соответствующая часть графика функции $y=\varphi(x)$ остается без изменений, и эта же часть отображается симметрично относительно оси Oy). ◁

Вопросы для контроля

1. На примерах объясните, как из графика функции $y = f(x)$ можно получить график функции:
1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = f(x - a)$;
4) $y = f(x) + c$; 5) $y = kf(x)$, где $k > 0$; 6) $y = f(\alpha x)$, где $\alpha > 0$;
7) $y = |f(x)|$; 8) $y = f(|x|)$.

2*. Обоснуйте геометрические преобразования, с помощью которых из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики указанных выше функций.

Упражнения

Построите графики функций и соответствий **(1–7)**:

1. 1) $y = |x - 5|$; 2) $y = |x| - 5$; 3) $y = ||x| - 5|$; 4*) $|y| = x - 5$.

2. 1°) $y = x^2 - 9$; 2) $y = |x^2 - 9|$; 3) $y = |x^2| - 9$; 4*) $|y| = x^2 - 9$.

3. 1°) $y = (x + 1)^2$; 2) $y = (|x| + 1)^2$;
3) $y = (x + 1)^2 - 3$; 4) $y = |(x + 1)^2 - 3|$.

4. 1°) $y=\frac{1}{x+2}$; 2) $y=\left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y=\frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y|=\frac{1}{x+2}$.

5. 1°) $y=-\frac{2}{x}$; 2°) $y=3-\frac{2}{x}$; 3) $y=-\frac{2}{x-1}$; 4) $y=-\frac{2}{|x|}$.

6. 1°) $y=\sqrt{x-3}$; 2°) $y=\sqrt{x}-3$; 3) $y=\sqrt{|x|-3}$; 4) $y=\left|\sqrt{x}-3\right|$;

5*) $y=\left|\sqrt{|x|}-3\right|$; 6*) $|y|=\sqrt{x-3}$; 7*) $|y|=\sqrt{x}-3$.

7. 1°) $y=-\sqrt{x}$; 2°) $y=-\sqrt{x}+4$; 3) $y=-\sqrt{|x|}$; 4) $y=-\sqrt{x-1}$.

8. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[0; 12]$ и имеет график, изображенный на рисунке 48. Постройте графики функций (и соответствий 9* и 10*):

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = |f(x)|$; 4) $y = f(|x|)$;

5*) $y = 2f(x)$; 6*) $y = f(2x)$; 7*) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 8*) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

9*) $|y| = f(x)$; 10*) $|y| = f(|x|)$.

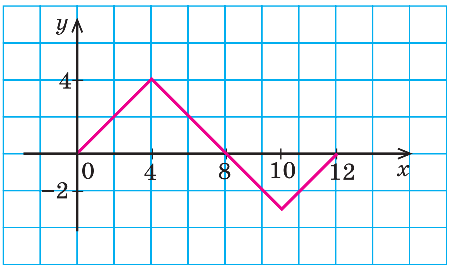


Рис. 48

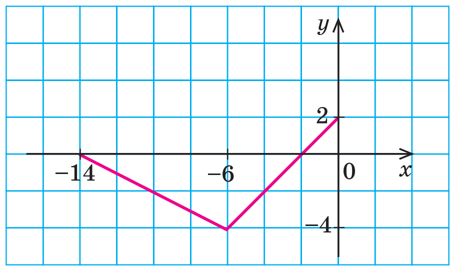
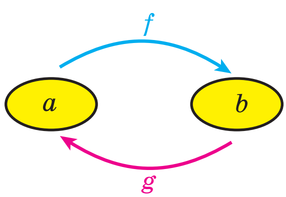


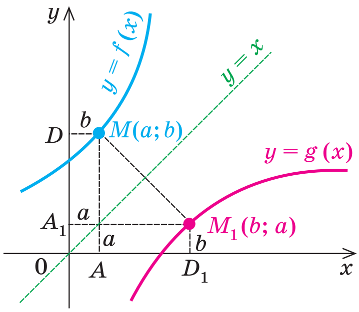
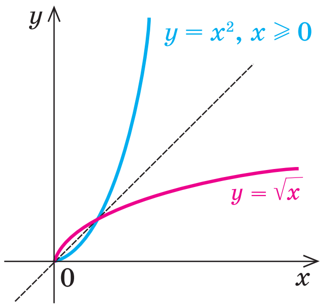
Рис. 49

9. Выполните задания упражнения 8 для функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-14; 0]$, график которой изображен на рисунке 49.

2.4. Обратная функция

Таблица 7

1. Понятие обратной функции
Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение в единственной точке ее области определения, то можно задать функцию $y = g(x)$, которая называется *обратной к функции* $y = f(x)$:

для каждого $a \in D(f)$, если $f(a) = b$, то $g(b) = a$
$E(f) = D(g)$; $D(f) = E(g)$
Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные

<table>
<tr><td colspan="2" align="right">Продолжение табл. 7</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">2. Свойства обратной функции</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1) Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2) Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то она имеет обратную функцию на этом промежутке, которая возрастает, если $f(x)$ возрастает, и убывает, если $f(x)$ убывает</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">3. Практический прием нахождения формулы функции, обратной к функции $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td align="center">Алгоритм</td><td align="center">Пример</td></tr>
<tr><td>1. Выяснить, будет ли функция $y = f(x)$ обратимой на всей области определения: для этого достаточно выяснить, имеет ли уравнение $y = f(x)$ единственный корень относительно переменной x.
Если нет, то попытаться выделить промежуток, где существует обратная функция (например, это может быть промежуток, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает).
2. Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.
3. В полученной формуле ввести традиционные обозначения: аргумент обозначить через x, а функцию — через y.</td><td>Найдите функцию, обратную к функции $y = 2x + 4$.
▶ Из равенства $y = 2x + 4$ можно однозначно выразить x через y:
$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$
Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x.
Обозначим в полученной формуле аргумент через x, а функцию — через y.
Получаем функцию $y = \frac{1}{2}x - 2$, обратную к функции $y = 2x + 4$. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Понятие обратной функции. Известно, что зависимость пути от времени движения тела, которое движется равномерно с постоянной скоростью v_0, выражается формулой $S = v_0 t$. Из этой формулы можно найти обратную зависимость — времени от пройденного пути $t = \frac{S}{v_0}$. Функцию $t(S) = \frac{S}{v_0}$ называют *обратной к функции* $S(t) = v_0 t$. Отметим, что в рассмотренном примере каждому значению t ($t \geqslant 0$) соответствует единственное значение S и, наоборот, каждому значению S ($S \geqslant 0$) соответствует единственное значение t.

Рассмотрим процедуру получения обратной функции в общем виде.

Пусть функция $f(x)$ принимает каждое свое значение в единственной точке ее области определения (такая функция называется *обратимой*). Тогда для каждого числа $y_0 = b$ (из области значений функции $f(x)$) существует единственное значение $x_0 = a$, такое, что $f(a) = b$. Рассмотрим новую функцию $g(x)$, которая каждому числу b из области значений функции $f(x)$ ставит в соответствие число a, то есть $g(b) = a$ для каждого числа b из области значений функции $f(x)$. В этом случае функция $g(x)$ называется обратной к функции $f(x)$, а функция $f(x)$ — обратной к функции $g(x)$. Поэтому говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные.

Из определения обратной функции вытекает, что область значений прямой функции $E(f)$ является областью определения обратной функции $D(g)$, а область определения прямой функции $D(f)$ является областью значений обратной функции $E(g)$.

То есть:

$$\boldsymbol{E(f) = D(g),\ D(f) = E(g).}$$

2. Свойства обратной функции

Свойство 1. Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Учитывая приведенную выше процедуру построения функции, обратной к функции $y = f(x)$, имеем: если $f(a) = b$, то по определению графика функции точка M с координатами $(a; b)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$. Аналогично, поскольку $g(b) = a$, то точка M_1 с координатами $(b; a)$ принадлежит графику функции $y = g(x)$. Точки $M(a; b)$ и $M_1(b; a)$ расположены на координатной плоскости симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 50). Действительно, прямая $y = x$ является осью симметрии системы координат. Таким образом, при симметрии отно-

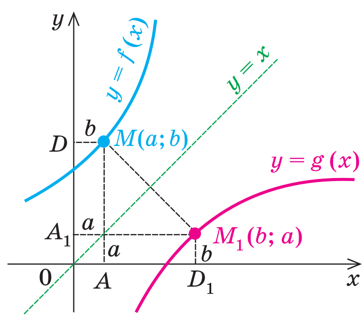


Рис. 50

сительно этой прямой ось Ox отображается на ось Oy, а ось Oy — на ось Ox. Тогда (например, при $a > 0$ и $b > 0$) прямоугольник $OAMD$ со сторонами $OA = a$ и $OD = b$ на осях координат отображается на прямоугольник $OA_1M_1D_1$ со сторонами на осях координат $OA_1 = OA = a$ и $OD_1 = OD = b$. Следовательно, при симметрии относительно прямой $y = x$ точка $M\ (a; b)$ отображается в точку $M_1\ (b; a)$ (а точка M_1 — в точку M). Таким образом, при симметрии относительно прямой $y = x$ любая точка $M\ (a; b)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$, имеет соответствующую точку $M_1\ (b;\ a)$, принадлежащую графику функции $y = g(x)$, а любая точка $M_1\ (b;\ a)$, которая принадлежит графику функции $y = g(x)$, имеет соответствующую точку $M\ (a; b)$, принадлежащую графику функции $y = f(x)$. То есть графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$. ○

Свойство 2. Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то она имеет обратную функцию на этом промежутке, которая возрастает, если $f(x)$ возрастает, и убывает, если $f(x)$ убывает.

● Действительно, если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то по свойству возрастающей (убывающей) функции каждое свое значение она принимает в единственной точке из этого промежутка (см. пример 6 к пункту 2.1), таким образом, она имеет обратную функцию $g(x)$ на этом промежутке. Обосновать, что функция $g(x)$ возрастает, если $f(x)$ возрастает, можно методом от противного.

Пусть числа a_1 и a_2 входят в область определения функции $f(x)$ и

$$a_2 > a_1. \tag{1}$$

Обозначим $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Если функция $f(x)$ возрастает, то $f(a_2) > f(a_1)$, то есть $b_2 > b_1$. По определению обратной функции $g(x)$ числа b_1 и b_2 входят в ее область определения и

$$g(b_1) = a_1,\ g(b_2) = a_2. \tag{2}$$

Если допустить, что функция $g(x)$ не является возрастающей, то из неравенства $b_2 > b_1$ не может вытекать неравенство $g(b_2) > g(b_1)$ (иначе функция $g(x)$ будет возрастающей), таким образом, для некоторых b_2 и b_1 может выполняться неравенство $g(b_2) \leqslant g(b_1)$. Но тогда по формулам (2) получаем $a_2 \leqslant a_1$, что противоречит условию (1). Таким образом, наше предположение неверно, и функция $g(x)$ возрастает, если функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично обосновывается, что в случае, когда функция $f(x)$ убывает, обратная к ней функция $g(x)$ тоже убывает. ○

3. Практический прием нахождения формулы функции, обратной к функции $y = f(x)$. Из определения обратной функции следует, что для получения обратной зависимости необходимо знать, как значение x

выражается через значение y. Это можно сделать, решив уравнение $y = f(x)$ относительно переменной x. Если заданная функция обратима, то уравнение будет иметь единственное решение для всех y из области значений функции $f(x)$, и мы получим формулу $x = g(y)$, которая задает обратную функцию. Но в этой формуле аргумент обозначен через y, а функция — через x. Если поменять обозначения на традиционные, то получим запись функции, обратной к функции $y = f(x)$.

Эти рассуждения вместе с соответствующим алгоритмом приведены в таблице 7 и реализованы в решении следующих задач.

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите функцию, обратную к функции $y=\frac{1}{x-1}$.

Решение	*Комментарий*
▶ Область определения: $x \neq 1$. Тогда из равенства $y=\frac{1}{x-1}$ имеем $xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x=\frac{y+1}{y}$. Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим функцию $y=\frac{x+1}{x}$, обратную к заданной. ◁	На всей области определения ($x \neq 1$) заданная функция обратима, поскольку из уравнения $y=\frac{1}{x-1}$ можно однозначно выразить x через y ($y \neq 0$ в области значений заданной функции). Полученная формула $x=\frac{y+1}{y}$ задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

Задача 2 Найдите функцию, обратную к функции $y = x^2$.

Решение	*Комментарий*
▶ Из равенства $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ получаем $x=\pm\sqrt{y}$. Тогда при $y>0$ одному значению y соответствуют два значения x. Таким образом, на всей области определения $x \in (-\infty; +\infty)$ функция $y = x^2$ не является обратимой, и для нее нельзя найти обратную функцию. ◁	Область значений заданной функции: $y \geqslant 0$. Но при $y > 0$ из равенства $y = x^2$ нельзя однозначно выразить x через y. Например, при $y = 4$ получаем $x = \pm 2$. Вследствие этого мы не можем значению $y = 4$ поставить в соответствие единственное число, чтобы построить обратную функцию.

Задача 3 Найдите функцию, обратную к функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$.

Решение	*Комментарий*
▶ Из равенства $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ получаем $x = \pm\sqrt{y}$. Учитывая, что по условию $x \geqslant 0$, имеем $x = \sqrt{y}$. Обозначим аргумент через x, а функцию — через y и получим, что функцией, обратной к функции $y = x^2$, которая задана только при $x \geqslant 0$, будет функция $y = \sqrt{x}$. ◁	Множество значений заданной функции: $y \geqslant 0$. При $x \geqslant 0$ заданная функция $y = x^2$ возрастает, таким образом, на промежутке $x \geqslant 0$ она имеет обратную функцию, а значит, на этом промежутке уравнение $x^2 = y$ мы сможем решить однозначно: при $x \geqslant 0$ имеем $x = \sqrt{y}$. Эта формула задает обратную функцию, но в ней аргумент обозначен через y, а функция — через x. Изменяя обозначения на традиционные, получаем окончательный результат.

З а м е ч а н и е. В примерах 2 и 3 мы фактически рассматриваем различные функции (они имеют разные области определения), хотя в обоих случаях эти функции задаются одной и той же формулой. Как известно, графиком функции $y = x^2$ (пример 2) является парабола, а графиком функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ (пример 3) является только правая ветвь этой параболы (рис. 51).

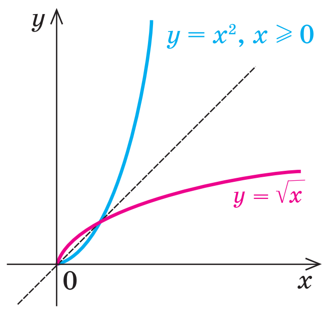


Рис. 51

Вопросы для контроля

1. При каком условии для заданной функции $y = f(x)$ можно построить обратную функцию?
2. Объясните построение графика обратной функции на примере функции $y = f(x)$, которая задана таблицей:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте обратную функцию $y = g(x)$ с помощью таблицы:

x				
$g(x)$				

3. Как расположены графики прямой и обратной функций, если они построены в одной системе координат? Проиллюстрируйте соответствующее свойство графиков на примере.
4. Обоснуйте взаимное расположение графиков прямой и обратной функций.
5. Существует ли обратная функция к функции $y = x^2$, где $x \leqslant 0$? Объясните ответ, опираясь на соответствующие свойства обратной функции. Если обратная функция существует, то задайте ее формулой вида $y = g(x)$.

Упражнения

1. Запишите формулу, которая задает функцию $y = g(x)$, обратную к заданной. Укажите область определения и множество значений функции $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

2. На одном рисунке постройте графики данной функции и функции, обратной к данной:

1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$.

3. Найдите функцию, обратную к данной на заданном промежутке, и постройте на одном рисунке графики данной функции и функции, обратной к данной:

1) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \geqslant 0$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \leqslant 0$;

3) $y = (x - 2)^2$ при $x \geqslant 2$; 4) $y = x^2 - 2$ при $x \leqslant 0$.

§ 3 УРАВНЕНИЯ

3.1. Уравнения-следствия и равносильные преобразования уравнений

Таблица 8

1. Понятие уравнения и его корней	
Определение	**Пример**
Равенство с переменной называется уравнением. В общем виде уравнение с одной переменной x записывают так: $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$. Под этой краткой записью понимают математическую запись задачи о нахождении значений аргумента, при которых значения двух данных функций равны	$2x = -1$ — линейное уравнение; $x^2 - 3x + 2 = 0$ — квадратное уравнение; $\sqrt{x+2} = x$ — иррациональное уравнение (содержит переменную под знаком корня)

Продолжение табл. 8

Корнем (или решением) *уравнения с одной переменной* называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство. **Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет**	$x = 2$ — корень уравнения $\sqrt{x+2} = x$, так как при $x = 2$ получаем верное равенство: $\sqrt{4} = 2$, то есть $2 = 2$
2. Область допустимых значений (ОДЗ)	
***Областью допустимых значений* (или областью определения) *уравнения* называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения**	Для уравнения $\sqrt{x+2} = x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется условием: $x + 2 \geqslant 0$, а область определения функции $g(x) = x$ — множество всех действительных чисел
3. Уравнения-следствия	
Если каждый корень первого уравнения является корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения. **Если из правильности первого равенства следует правильность каждого последующего, то получаем уравнения-следствия.** *При использовании уравнений-следствий не происходит потери корней исходного уравнения, но возможно появление посторонних корней.* Поэтому **при использовании уравнений-следствий проверка полученных корней подстановкой их в исходное уравнение является составной частью решения** (см. пункт 5 этой таблицы)	$\sqrt{x+2} = x.$ ▶ Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2,$ $x + 2 = x^2,$ $x^2 - x - 2 = 0,$ $x_1 = 2,\ x_2 = -1.$ *Проверка*. $x = 2$ — корень (см. выше); $x = -1$ — посторонний корень (при $x = -1$ получаем неверное равенство $1 = -1$). ◁ *Ответ*: 2.

Продолжение табл. 8

4. Равносильные уравнения	
Определение	**Простейшие теоремы**
Два уравнения называются *равносильными* на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни. *То есть каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.* (Схема решения уравнений с помощью равносильных преобразований приведена в пункте 5 этой таблицы)	**1. Если из одной части уравнения перенести в другую слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное заданному (на любом множестве)** **2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), то получим уравнение, равносильное заданному (на ОДЗ заданного уравнения)**

5. Схема поиска плана решения уравнений

Решение уравнений

с помощью уравнений-следствий

1 ↓ 2 Преобразования, гарантирующие сохранение верного равенства

Проверка корней подстановкой в исходное уравнение

с помощью равносильных преобразований

Учесть ОДЗ исходного уравнения

1 ↑↓ 2 Сохранять на ОДЗ верное равенство при прямых и обратных преобразованиях

применением свойств функций[1]

1 — исходное уравнение;

2 — уравнение, полученное в результате преобразования исходного;

↓, ↑ — символическое изображение направления выполненных преобразований

[1] Применение свойств функций к решению уравнений рассмотрено в пункте 3.2.

Объяснение и обоснование

1. Понятие уравнения и его корней. Уравнение в математике чаще всего понимают как аналитическую запись задачи о нахождении значений аргумента, при которых значения двух данных функций равны. Поэтому в общем виде уравнения с одной переменной x записывают так:

$$f(x) = g(x).$$

Часто уравнения определяют короче — как равенство с переменной.

Напомним, что *корнем (или решением) уравнения с одной переменной называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство. Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что их нет.*

Например, уравнение $2x = -1$ имеет единственный корень $x=-\frac{1}{2}$, а уравнение $|x| = -1$ не имеет корней, поскольку значение $|x|$ не может быть отрицательным числом.

2. Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Если задано уравнение $f(x)=g(x)$, то общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$ называется *областью допустимых значений* этого *уравнения*. (Иногда используются также термины «область определения уравнения» или «множество допустимых значений уравнения».) Например, для уравнения $x^2 = x$ областью допустимых значений являются все действительные числа. Это можно записать, например, так: ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$, поскольку функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$ имеют области определения $\boldsymbol{R}$.

Понятно, что каждый корень данного уравнения принадлежит как области определения функции $f(x)$, так и области определения функции $g(x)$ (иначе мы не сможем получить верное числовое равенство). Поэтому *каждый корень уравнения обязательно принадлежит ОДЗ этого уравнения.* Это позволяет в некоторых случаях применить анализ ОДЗ уравнения при его решении.

Например, в уравнении $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=x$ функция $g(x) = x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ только при условии, что под знаком квадратного корня будут стоять неотрицательные выражения. Следовательно, ОДЗ этого уравнения задается системой $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 1-x\geqslant 0, \end{cases}$ из которой получаем систему $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 1, \end{cases}$ не имеющую решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

Заметим, что нахождение ОДЗ данного уравнения может быть полезным для его решения, но не всегда является обязательным элементом решения уравнения.

3. Методы решения уравнений. Для решения уравнений используют методы *точного и приближенного решений*. А именно, для точного решения уравнений в курсе математики 5–6 классов использовались зависимости между компонентами и результатами действий и свойства числовых равенств; в курсе алгебры 7–9 классов — равносильные преобразования уравнений, а для приближенного решения уравнений — графический метод.

Графический метод решения уравнений не дает высокой точности нахождения корней уравнения, и с его помощью чаще всего можно получить только грубые приближения корней. Иногда удобно графически определить количество корней уравнения или найти границы, в которых находятся эти корни. В некоторых случаях можно графически доказать, что уравнение не имеет корней. По указанным причинам в школьном курсе алгебры и начал анализа под требованием «решить уравнение» понимается требование «используя методы точного решения, найти корни данного уравнения». Приближенными методами решения уравнений можно пользоваться только тогда, когда об этом говорится в условии задачи (например, если ставится задача решить уравнение графически).

В основном при решении уравнений разных видов нам придется применять один из двух методов решения. Первый из них состоит в том, что данное уравнение заменяется более простым уравнением, имеющим те же корни,— равносильным уравнением. В свою очередь, полученное уравнение заменяется еще более простым, равносильным ему, и т. д. В результате получаем простейшее уравнение, которое равносильно заданному и корни которого легко находятся. Эти корни и только они являются корнями данного уравнения.

Второй метод решения уравнений состоит в том, что данное уравнение заменяется более простым уравнением, среди корней которого находятся все корни данного, то есть так называемым уравнением-следствием. В свою очередь, полученное уравнение заменяется еще более простым уравнением-следствием, и так далее до тех пор, пока не получим простейшее уравнение, корни которого легко находятся. Тогда все корни данного уравнения находятся среди корней последнего уравнения. Поэтому, чтобы найти корни данного уравнения, достаточно корни последнего уравнения подставить в данное и с помощью такой проверки получить корни данного уравнения (и исключить так называемые *посторонние корни* — те корни последнего уравнения, которые не удовлетворяют заданному).

В следующем пункте будет также показано применение свойств функций к решению уравнений определенного вида.

Уравнения-следствия

Рассмотрим более детально, как можно решать уравнения с помощью уравнений-следствий. При решении уравнений главное — не потерять корни данного уравнения, и поэтому в первую очередь мы должны следить за тем, чтобы каждый корень исходного уравнения оставался корнем следующего. Фактически это и является определением уравнения-следствия:

в том случае, когда каждый корень первого уравнения является корнем второго, второе уравнение называется следствием первого.

Это определение позволяет обосновать такой ориентир: **для получения уравнения-следствия достаточно рассмотреть данное уравнение как верное числовое равенство и гарантировать (то есть иметь возможность обосновать), что каждое следующее уравнение мы можем получить как верное числовое равенство.**

Действительно, если придерживаться этого ориентира, то каждый корень первого уравнения обращает это уравнение в верное числовое равенство, но тогда и второе уравнение будет верным числовым равенством, то есть рассматриваемое значение переменной является корнем и второго уравнения, а это и означает, что второе уравнение является следствием первого.

Применим приведенный ориентир к уравнению $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (пока что не используя известное условие равенства дроби нулю).

Если правильно то, что дробь равна нулю, то обязательно ее числитель равен нулю. Таким образом, из заданного уравнения получаем уравнение-следствие $x^2 - 1 = 0$. Но тогда верно, что $(x - 1)(x + 1) = 0$. Последнее уравнение имеет два корня: $x = 1$ и $x = -1$. Подставляя их в заданное уравнение, видим, что только корень $x = 1$ удовлетворяет исходному уравнению. Почему это случилось?

Это происходит поэтому, что, используя уравнения-следствия, мы гарантируем только то, что корни заданного уравнения не теряются (каждый корень первого уравнения является корнем второго). Но второе уравнение, кроме корней первого уравнения, имеет еще и другой корень, который не является корнем первого уравнения. Для первого уравнения этот корень является *посторонним*, и, чтобы его отсеять, выполняется проверка подстановкой корней в исходное уравнение. (Более полно причины появления посторонних корней рассмотрены в таблице 9.) Таким образом, чтобы правильно применять уравнения-следствия для решения уравнений, необходимо помнить еще один ориентир: **при использовании уравнений-следствий возможно появление посторонних корней, и поэтому проверка подстановкой корней в исходное уравнение является составной частью решения.**

Схема применения этих ориентиров дана в таблице 8. В пункте 3 этой таблицы приведено решение уравнения

$$\sqrt{x+2}=x. \qquad (1)$$

Для решения этого уравнения с помощью уравнений-следствий достаточно данное уравнение рассмотреть как верное числовое равенство и учесть, что в случае когда два числа равны, то и их квадраты также будут равны:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2. \qquad (2)$$

То есть мы гарантируем, что если равенство (1) верно, то и равенство (2) также будет верным, а это и означает (как было показано выше), что уравнение (2) является следствием уравнения (1). Если мы хотя бы один раз использовали уравнения-следствия (а не равносильные преобразования), то можем получить посторонние корни, и тогда в решение обязательно входит проверка полученных корней подстановкой их в заданное уравнение.

Замечание. Переход от данного уравнения к уравнению-следствию можно обозначить специальным значком $\Rightarrow$, но его использование для записи решения не является обязательным. Вместе с тем, если этот значок записан, то это свидетельствует о том, что мы воспользовались уравнениями-следствиями, и поэтому обязательно в запись решения необходимо включить проверку полученных корней.

Равносильные уравнения

С понятием равносильности вы знакомы еще из курса алгебры 7 класса, где равносильными назывались те уравнения, которые имели одни и те же корни. Заметим, что равносильными считались и такие два уравнения, которые не имели корней. Формально будем считать, что и в этом случае уравнения имеют одни и те же корни, поскольку ответы к таким уравнениям одинаковы: «уравнения не имеют корней» (точнее: одинаковыми являются множества корней таких уравнений — они оба пустые, что обозначается символом $\varnothing$).

В курсе алгебры и начал анализа мы будем рассматривать более общее понятие равносильности, а именно: равносильность на определенном множестве.

Два уравнения называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же корни, то есть каждый корень первого уравнения является корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения является корнем первого.

Для уравнений, заданных на множестве всех действительных чисел (например, для линейных), мы можем однозначно дать ответ на вопрос: «Равносильны ли данные уравнения?» Например, уравнения $x + 3 = 0$ и $2x + 6 = 0$ — равносильные, поскольку оба имеют одинаковый корень $x = -3$ и других корней не имеют. Таким образом, каждое из них имеет те же решения, что и второе. При рассмотрении равносильности уравнений на множестве, которое отличается от множества всех действительных чисел, ответ на вопрос «Равносильны ли данные уравнения?» может существенно зависеть от того, на каком множестве мы рассматриваем эти уравнения. Например, если рассмотреть уравнения:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0, \qquad (3)$$

$$x^2 - 1 = 0, \qquad (4)$$

то, как было показано выше, уравнение (3) имеет единственный корень $x = 1$, а уравнение (4) — два корня: $x = 1$ и $x = -1$. Таким образом, на множестве всех действительных чисел эти уравнения не являются равносильными, поскольку у уравнения (4) есть корень $x = -1$, которого нет у уравнения (3). Но на множестве положительных действительных чисел эти уравнения равносильны, поскольку на этом множестве уравнение (3) имеет единственный положительный корень $x = 1$ и уравнение (4) также имеет единственный положительный корень $x = 1$. Следовательно, на множестве положительных чисел каждое из этих уравнений имеет те же решения, что и второе.

Укажем, что множество, на котором рассматривается равносильность уравнений, как правило, не задается искусственно (как в последнем случае), а чаще всего таким множеством является ОДЗ исходного уравнения. Договоримся, что далее

> **все равносильные преобразования уравнений (*а также* неравенств и систем уравнений и неравенств) мы будем выполнять на ОДЗ исходного уравнения (неравенства или системы).**

Отметим, что в том случае, когда ОДЗ заданного уравнения является множество всех действительных чисел, мы не всегда будем ее записывать (как не записывали ОДЗ при решении линейных или квадратных уравнений). И в других случаях главное — не записать ОДЗ в решение уравнения, а реально учесть ее при выполнении равносильных преобразований данного уравнения.

Например, для уравнения $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ задается неравенством $x + 2 \geqslant 0$. Когда мы переходим к уравнению $x + 2 = x^2$, то для всех его корней это уравнение является верным равенством. Тогда выражение x^2, стоящее в правой части этого равенства, всегда неотрицательно ($x^2 \geqslant 0$), таким образом, и равное ему выражение $x + 2$ также будет неотрицательным: $x + 2 \geqslant 0$. Но это и означает, что ОДЗ данного уравнения ($x + 2 \geqslant 0$) учтено автоматически для всех корней второго уравнения и поэтому при переходе от уравнения $\sqrt{x+2}=x$ к уравнению $x + 2 = x^2$ ОДЗ заданного уравнения можно не записывать в решение.

Для выполнения равносильных преобразований попробуем выделить общие ориентиры, аналогичные соответствующим ориентирам получения уравнений-следствий. Как указывалось выше, выполняя *равносильные преобразования уравнений*, необходимо **учесть ОДЗ данного уравнения** — это и есть первый ориентир для выполнения равносильных преобразований уравнений. По определению равносильности уравнений необходимо гарантировать, чтобы каждый корень первого уравнения был корнем второго и, наоборот, каждый корень второго уравнения был корнем первого. Для первой части этого требования мы уже выделили общий ориентир: достаточно гарантировать сохранение правильности равенства при переходе от первого уравнения ко второму.

Но тогда, чтобы выполнить вторую часть этого требования, достаточно второе уравнение рассмотреть как верное равенство (то есть взять такое значение переменной, которое является корнем второго уравнения) и гарантировать, что при переходе к первому верное равенство сохраняется (этот корень остается и корнем первого уравнения). Фактически из определения равносильности уравнений получаем, что *каждое из равносильных уравнений является следствием другого уравнения*). Таким образом, **при выполнении равносильных преобразований мы должны гарантировать сохранение правильности равенства на каждом шаге решения не только при прямых, но и при обратных преобразованиях** — это и является вторым ориентиром для решения уравнений с помощью равносильных преобразований. (Соответствующие ориентиры схематически представлены в пункте 5 табл. 8.)

Например, чтобы решить с помощью равносильных преобразований уравнение $\frac{x^2-1}{x+1}=0,$ достаточно учесть его ОДЗ: $x+1\neq 0$ и условие равенства дроби нулю (дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю). Также следует обратить внимание на то, что на ОДЗ все необходимые преобразования можно выполнить как в прямом, так и в обратном направлениях с сохранением правильности равенства.

Запись решения в этом случае может быть такой:

$\frac{x^2-1}{x+1}=0.$ ОДЗ: $x+1\neq 0$. Тогда $x^2-1=0$. Отсюда $x=1$ (удовлетворяет условию ОДЗ) или $x=-1$ (не удовлетворяет условию ОДЗ). *Ответ:* 1.

Для выполнения равносильных преобразований уравнений можно также пользоваться специальными теоремами о равносильности. В связи с уточнением определения равносильности уравнений обобщим также формулировки простейших теорем о равносильности, известных из курса алгебры 7 класса.

Теорема 1. ***Если из одной части уравнения перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное заданному (на любом множестве).***

Теорема 2. ***Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, которая определена и не равна нулю на ОДЗ заданного уравнения), то получаем уравнение, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).***

Обоснование этих теорем полностью аналогично обоснованию ориентиров для равносильных преобразований данного уравнения.

Замечание. Для обозначения перехода от данного уравнения к равносильному ему уравнению можно применять специальный значок $\Leftrightarrow$, но его использование при записи решений не является обязательным. Например, запись решения последнего из рассмотренных уравнений может быть такой.

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\neq 0, \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1, \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1, \\ x=1 \text{ или } x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$ *Ответ*: 1.

Задача 1 Решите уравнение $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$.

Решение	*Комментарий*
► ОДЗ: $x-2\neq 0$ и $x-1\neq 0$. На этой ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям: $$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0, \qquad (1)$$ $$\frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (2)$$ $$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (3)$$ $$2x+1=0, \qquad (4)$$ то есть $x=-\frac{1}{2}$. Учтем ОДЗ. При $x=-\frac{1}{2}$: $$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0,$$ $$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$ Таким образом, $x=-\frac{1}{2}$ — корень. *Ответ*: $-\frac{1}{2}$. ◁	Используем равносильные преобразования для решения данного уравнения. Для этого необходимо учесть ОДЗ, поэтому зафиксируем ее ограничения в начале решения. Укажем, что *в уравнениях ограничения ОДЗ можно только зафиксировать, но не решать, а в конце проверить, выполняются ли эти ограничения для найденных корней.* При переносе члена данного уравнения из одной части уравнения в другую с противоположным знаком получаем уравнение (1), равносильное заданному. Приводя к общему знаменателю, раскрывая скобки и приводя подобные члены, снова получаем верное равенство и можем обосновать, что при выполнении обратных действий равенство также не нарушается, таким образом, полученные уравнения (1)–(3) равносильны заданному (на его ОДЗ). *Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель дроби равен нулю, а знаменатель не равен нулю.* Но второе условие уже учтено в ограничениях ОДЗ, таким образом, получаем уравнение (4), равносильное заданному уравнению на его ОДЗ. Поскольку все преобразования были равносильными только с учетом ОДЗ, то мы должны проверить, удовлетворяет ли полученное число ограничениям ОДЗ.

4. Причины появления посторонних корней и потери корней при решении уравнений. Наиболее типичные случаи появления посторонних корней и потери корней приведены в таблице 9. Там же указано, как в каждом из этих случаев получить правильное (или полное) решение.

Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения
		1. Появление посторонних корней
Получение уравнений-следствий:	**1. Приведение подобных членов**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Перенесем из правой части уравнения в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ с противоположным знаком и приведем подобные члены. Получим $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$
а) переход к уравнению, ОДЗ которого шире, чем ОДЗ заданного уравнения;	**2. Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю** (при сокращении знаменателя)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22$, $x=-2$
	3. Возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. Возведем обе части уравнения в квадрат. $2x+1=x$, $x=-1$
б) выполнение преобразований, при которых происходит неявное умножение на нуль;	**Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2+x+1=0$. Умножим обе части уравнения на $x-1$. $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Получим $x^3-1=0$, $x=1$

Таблица 9

<table>
<tr><th></th><th>Где ошибка</th><th>Как получить правильное (или полное) решение</th><th>Пример правильного (или полного) решения</th></tr>
<tr><td colspan="4">при решении уравнения</td></tr>
<tr><td></td><td>$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения</td><td rowspan="4">Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение</td><td>$$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}.$$
▶ $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$.
Проверка показывает, что
$x_1 = 0$ — посторонний корень,
$x_2 = 6$ — корень.
Ответ: 6. ◁</td></tr>
<tr><td></td><td>$x = -2$ не является корнем заданного уравнения</td><td>$$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}.$$
▶ $4(x+3)+7(x+2)=4$;
$11x=-22$, $x=-2$.
Проверка показывает, что
$x=-2$ — посторонний корень.
Ответ: корней нет. ◁</td></tr>
<tr><td></td><td>$x = -1$ не является корнем заданного уравнения</td><td>$$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}.$$
▶ $2x+1=x$, $x=-1$.
Проверка показывает, что
$x=-1$ — посторонний корень.
Ответ: корней нет. ◁</td></tr>
<tr><td></td><td>$x = 1$ не является корнем заданного уравнения</td><td>В данном уравнении не было необходимости умножать на $x-1$.
$$x^2+x+1=0.$$
▶ $D=-3<0$.
Ответ: корней нет. ◁
Если применить умножение обеих частей уравнения на $x-1$, то проверка показывает, что $x=1$ — посторонний корень, то есть уравнение не имеет корней.</td></tr>
</table>

Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения	
		1. Появление посторонних корней	
в) применение к обеим частям уравнения функции, которая не является возрастающей или убывающей.	**Возведение обеих частей уравнения в четную степень или применение к обеим частям уравнения тригонометрических функций** (см. с. 365)	$x - 1 = 2x + 1.$ Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ Получим $3x^2 + 6x = 0,$ $x_1 = 0,\ x_2 = -2$	
		2. Потеря корней	
Явное или неявное *сужение ОДЗ заданного уравнения*, в частности выполнение преобразований, в ходе которых происходит неявное деление на нуль	**1. Деление обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2 = x.$ Поделив обе части уравнения на x, получим $x = 1$	
	2. Сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, ОДЗ которого уже, чем ОДЗ заданного уравнения	$x^2 = 1.$ Если к обеим частям уравнения прибавить $\sqrt{x}$, то получим уравнение $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ у которого только один корень $x = 1$	

Продолжение табл. 9

	Где ошибка	Как получить правильное (или полное) решение	Пример правильного (или полного) решения
	при решении уравнения		
	$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения	**Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение**	В данном уравнении не было необходимости возводить в квадрат. $x - 1 = 2x + 1.$ ▶ $x - 2x = 1 + 1$, $x = -2$. *Ответ:* -2. ◁ Если применить возведение в квадрат, то проверка показывает, что $x_2 = -2$ — корень, а $x_1 = 0$ — посторонний корень
	при решении уравнения		
	Потеряли корень $x = 0$, поскольку после деления на x фактически получили уравнение $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, ОДЗ которого: $x \neq 0$, то есть сузили ОДЗ заданного уравнения	**Те значения, на которые сузилась ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно**	$x^2 = x.$ ▶ 1. При $x = 0$ получаем $0^2 = 0$ — верное равенство, таким образом, $x = 0$ — корень. 2. При $x \neq 0$ получаем $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, $x = 1$. *Ответ:* 0; 1. ◁ (Конечно, *удобнее решать так*: $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0$ или $x = 1$.)
	Потеряли корень $x = -1$, поскольку ОДЗ данного уравнения: x — любое число, а $\sqrt{x}$ существует только при $x \geqslant 0$		В данном уравнении не было необходимости прибавлять к обеим частям $\sqrt{x}$. ▶ $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Ответ:* ± 1. ◁ (Если бы пришлось прибавить к обеим частям $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ данное уравнение необходимо рассмотреть отдельно, и тогда получим еще и корень $x = -1$.)

Вопросы для контроля

1. Что называется корнем уравнения? Приведите примеры.
2. Дайте определение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения. Приведите примеры.
3. Дайте определение уравнения-следствия данного уравнения. Приведите примеры. Объясните, в каком случае можно гарантировать, что в результате преобразований уравнения получили уравнение-следствие.
4. Дайте определение равносильных уравнений. Приведите примеры. Объясните, в каком случае можно гарантировать, что в результате преобразований уравнения получили уравнение, равносильное данному.
5. Сформулируйте основные теоремы о равносильности уравнений. Приведите примеры их использования.
6. Объясните, в результате каких преобразований данного уравнения можно получить посторонние для данного уравнения корни. Как можно исключить посторонние корни? Приведите примеры.
7. Объясните, в результате каких преобразований данного уравнения можно потерять корни данного уравнения. Приведите примеры. Объясните на примерах, как необходимо дополнить соответствующие преобразования, чтобы не потерять корни данного уравнения.

Упражнения

1. Найдите область допустимых значений (ОДЗ) уравнения:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$;
2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$;
3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$;
4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$.

2. Выясните: а) является ли второе уравнение следствием первого; б) являются ли эти уравнения равносильными (ответ обоснуйте):

1) $2x^2-8x-9=0$ и $x^2-4x-4{,}5=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ и $x^2-4=0$.

3°. Обоснуйте равносильность уравнений:
1) $5x-8=7-3x$ и $5x+3x=7+8$;
2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ и $2x-1=x$.

4°. Обоснуйте, что данные уравнения не являются равносильными:
1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ и $x^2=9$; 2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ и $2x-1=x$.

5°. Объясните, какие преобразования были использованы при переходе от первого уравнения ко второму и могут ли они приводить к нарушению равносильности:
1) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ и $3x+2x=6{,}8-1{,}1$;
2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ и $x-9+3x^2-1=0$;

3) $\dfrac{5}{3x-1}+x=3$ и $5 + x\,(3x - 1) = 3\,(3x - 1)$;

4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ и $x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4$.

6. Являются ли равносильными данные уравнения на ОДЗ первого из них:

1) $5 - x = x + 7$ и $5-x+\dfrac{1}{x-3}=x+7+\dfrac{1}{x-3}$;

2) $\dfrac{12-2x}{x-2}=\dfrac{x-5}{x-2}$ и $12 - 2x = x - 5$;

3) $6 - x = 10$ и $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2 + 2x - 3)\,(x^2 + 6) = 5\,(x^2 + 6)$ и $x^2 + 2x - 3 = 5$;

5) $x^2 - 1 = 6x - 1$ и $\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{6x-1}{x}$?

7. Решите уравнение и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению равносильности:

1) $\dfrac{8}{x}-\dfrac{5-x}{2}=\dfrac{8+3x}{x}-x$;

2) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{(x-2)^2+8}{x}=\dfrac{(4-x)\,(2-x)}{x}$;

3) $\dfrac{7}{x+3}-\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{x-4}{3+x}$;

4) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x-6}{3x^2-12}=\dfrac{1}{2-x}-1$.

8. Решите уравнение с помощью уравнений-следствий и укажите, какое преобразование могло привести к нарушению равносильности:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;

4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

9. При каком условии уравнения являются равносильными:

1) $\dfrac{f\,(x)}{2x-3}=g\,(x)$ и $f\,(x) = g\,(x)\,(2x - 3)$;

2) $f\,(x)+\sqrt{x}=g\,(x)+\sqrt{x}$ и $f\,(x) = g\,(x)$?

10. Может ли произойти потеря корней или появление посторонних корней, если:

1) уравнение $(x^2 + 7)\,f\,(x) = 4x^2 + 28$ заменить уравнением $f\,(x) = 4$;

2) уравнение $(x - 1)\,f\,(x) = (x - 1)\,g\,(x)$ заменить уравнением $f\,(x) = g\,(x)$;

3) уравнение $\dfrac{f\,(x)}{x+3}=\dfrac{g\,(x)}{x+3}$ заменить уравнением $f\,(x) = g\,(x)$;

4) уравнение $\dfrac{f\,(x)}{3x^2+5}=0$ заменить уравнением $f\,(x) = 0$?

11. Решите уравнение и обоснуйте, что построена цепочка равносильных уравнений:

1) $13 - (x - 1)^2 + (2x - 1)\,(x + 1) = (x + 2)^2$;

2) $(x - 1)^3 - (x - 3)^3 = 3x + 26$;

3) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6\,(x^2 + x + 1)$;

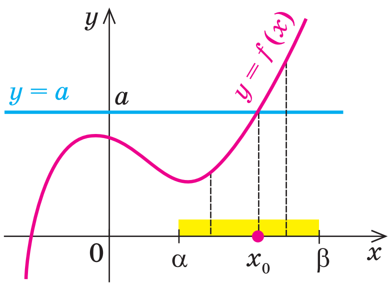
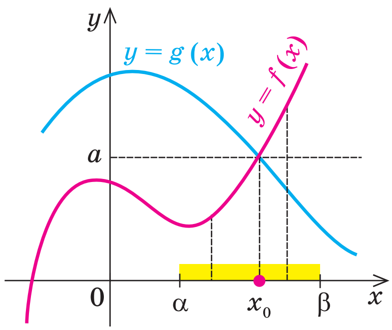
4) $(3x - 1)^2 + (6x - 3)\,(2x + 1) = (x - 1)^2 + 5\,(2x + 1)^2$.

3.2. Применение свойств функций к решению уравнений

Таблица 10

Ориентир	Пример
1. Конечная ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}.$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ 2-2x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geqslant 1,\\ x^2\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1.$ *Проверка.* $x=1$ — корень $\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}, 1=1\right)$, $x=-1$ — не корень $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$. *Ответ:* 1. ◁
2. Оценка левой и правой частей уравнения	
$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x)\\ \hline f(x)\geqslant a,\\ g(x)\leqslant a\end{array}}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a\end{cases}$ **Если надо решить уравнение вида $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ и $g(x)$ одновременно равны a**	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}.$ ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (так как $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Итак, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases}1-x^2=1,\\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ *Ответ:* 0. ◁
$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x)+f_2(x)+\\ \quad +\ldots+f_n(x)=0\\ \hline f_1(x)\geqslant 0,\\ f_2(x)\geqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)\geqslant 0\end{array}}\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)=0.\end{cases}$ *Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю*	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0.$ ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Итак, заданное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sqrt{x-2}=0,\\ \lvert x^2-2x\rvert=0,\\ (x^2-4)^2=0.\end{cases}$ Из первого уравнения получаем $x=2$, что удовлетворяет всей системе *Ответ:* 2. ◁

Продолжение табл. 10

<table>
<tr><td colspan="2">3. Использование возрастания и убывания функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема решения уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку левой и правой частей уравнения)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Теоремы о корнях уравнения</td></tr>
<tr><td>1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $\sqrt{x} + 2x^3 = 3$ имеет единственный корень $x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 2\cdot 1^3 = 3\right.$, то есть $3 = 3$), поскольку функция $f(x) = \sqrt{x} + 2x^3$ возрастает на всей области определения $x \geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет единственный корень $x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 1^3 = 3 - 1\right.$, то есть $2 = 2$), поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geqslant 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает (на множестве $\boldsymbol{R}$, а следовательно, и при $x \geqslant 0$)</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Конечная ОДЗ. Напомним, что в случае, когда дано уравнение $f(x) = g(x)$, общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$ называется *областью допустимых значений* этого уравнения. Понятно, что каждый корень заданного уравнения принадлежит как области определения функции $f(x)$, так и области определения функции $g(x)$. Таким образом, *каждый корень уравнения обязательно принадлежит ОДЗ этого уравнения.* Это позволяет в некоторых случаях за счет анализа ОДЗ получить решение уравнения.

Например, если дано уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то его ОДЗ можно записать с помощью системы $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ 4-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получаем $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ то есть $x = 2$. Таким образом, ОДЗ данного уравнения состоит только из одного значения $x = 2$. Но если только для одного числа необходимо выяснить, является ли оно корнем данного уравнения, то для этого достаточно подставить это значение в уравнение. В результате получаем верное числовое равенство $(0 = 0)$. Следовательно, $x = 2$ — корень данного уравнения. Других корней у этого уравнения быть не может, поскольку все корни уравнения находятся в его ОДЗ, а там нет других значений, кроме $x = 2$.

Рассмотренный пример позволяет выделить ориентир для решения аналогичных уравнений:

если ОДЗ уравнения (а также неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.

Замечание. *В том случае, когда ОДЗ — пустое множество (не содержит ни одного числа), мы можем сразу дать ответ, что данное уравнение не имеет корней.*

Например, если необходимо решить уравнение $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}+5x$, то его ОДЗ задается системой $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$ то есть системой $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ которая не имеет решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

2. Оценка левой и правой частей уравнения. Некоторые уравнения можно решить с помощью оценки левой и правой частей уравнения.

Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, и нам удалось выяснить, что для всех допустимых значений x значение $f(x) \geqslant a$, а значение $g(x) \leqslant a$.

- Рассмотрим два случая: 1) $f(x) > a$; 2) $f(x) = a$.
  Если $f(x) > a$, то равенство $f(x) = g(x)$ не может выполняться, потому что $g(x) \leqslant a$, то есть при $f(x) > a$ данное уравнение корней не имеет. Остается только случай $f(x) = a$, но, учитывая необходимость выполнения равенства $f(x) = g(x)$, имеем, что тогда и $g(x) = a$. Таким образом, мы обосновали, что выполнение равенства $f(x) = g(x)$ (при условии $f(x) \geqslant a$ и $g(x) \leqslant a$) гарантирует одновременное выполнение равенств $f(x) = a$ и $g(x) = a$ (и наоборот, если одновременно

выполняются равенства $f(x) = a$ и $g(x) = a$, то выполняется и равенство $f(x) = g(x)$). Как было показано в п. 3.1, это и означает, что уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$ Коротко это можно записать так:

$f(x) = g(x)$
$f(x) \geqslant a,$ $g(x) \leqslant a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$$

Пример использования такого приема решения уравнений приведен в пункте 2 таблицы 10.

Аналогично предыдущим рассуждениям обосновывается и ориентир по решению уравнения $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$, в котором все функции-слагаемые неотрицательны ($f_1(x) \geqslant 0$; $f_2(x) \geqslant 0$; ...; $f_n(x) \geqslant 0$).

Если предположить, что $f_1(x) > 0$, то сумма всех функций, стоящих в левой части этого уравнения, может равняться нулю только тогда, когда сумма $f_2(x) + \ldots + f_n(x)$ будет отрицательной. Но это невозможно, поскольку по условию все функции неотрицательные. Таким образом, при $f_1(x) > 0$ данное уравнение не имеет корней. Эти же рассуждения можно повторить для любой другой функции-слагаемого. Остается единственная возможность — все функции-слагаемые равны нулю (очевидно, что в этом случае равенство $f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ обязательно будет выполняться). Таким образом, *сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю.*

Например, чтобы решить уравнение $x^4 + |x - 1| = 2x^2 - 1$, достаточно перенести все члены в одну сторону, записать уравнение в виде $(x^2 - 1)^2 + |x - 1| = 0$ и учесть, что функции $(x^2 - 1)^2$ и $|x - 1|$ неотрицательные. Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ |x - 1| = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения получаем $x = 1$, что удовлетворяет и всей системе. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

3. Использование возрастания и убывания функций к решению уравнений опирается на такое свойство: *возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения.*

Полезно помнить специальные теоремы о корнях уравнения.

Теорема 1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Графически утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 52. Прямая $y = a$ пересекает график возрастающей на промежутке $[\alpha; \beta]$ функции $y = f(x)$ только в одной точке. Это и означает, что уравнение $f(x) = a$ не может иметь больше одного корня на промежутке $[\alpha; \beta]$. Докажем это утверждение аналитически.

● Если на промежутке $[\alpha; \beta]$ уравнение имеет корень x_0, то $f(x_0) = a$. Других корней быть не может, поскольку для возрастающей функции $f(x)$ при $x > x_0$ получаем неравенство $f(x) > f(x_0) = a$, а при $x < x_0$ — неравенство $f(x) < f(x_0) = a$. Таким образом, при $x \neq x_0$ $f(x) \neq a$. Аналогично и для убывающей функции при $x \neq x_0$ получаем $f(x) \neq a$. ○

Теорема 2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Графически утверждение теоремы проиллюстрировано на рисунке 53.

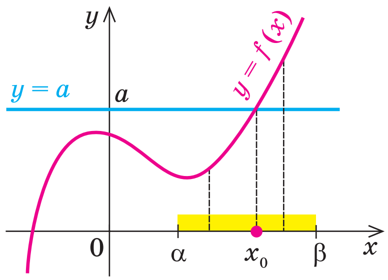


Рис. 52

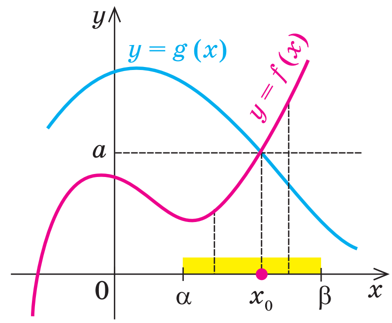


Рис. 53

● Если на промежутке $[\alpha; \beta]$ уравнение имеет корень x_0, то $f(x_0) = g(x_0) = a$. Других корней быть не может, поскольку, например, для возрастающей функции $f(x)$ и убывающей функции $g(x)$ при $x > x_0$ имеем $f(x) > a$, а $g(x) < a$, таким образом, $f(x) \neq g(x)$. Аналогично и при $x < x_0$ $f(x) \neq g(x)$. ○

Каждая из этих теорем утверждает, что *в рассмотренном промежутке данное уравнение может иметь не более чем один корень,* то есть *или это уравнение совсем не имеет корней, или оно имеет единственный корень.* Если нам удалось подобрать один корень такого уравнения, то других корней в заданном промежутке уравнение не имеет.

Например, чтобы решить уравнение $x^3 + x = 10$, достаточно заметить, что функция $f(x) = x^3 + x$ является возрастающей на всей числовой прямой (как сумма двух возрастающих функций) и что $x = 2$ — корень[1]

[1] Корень $x = 2$ получен подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые подставляются в данное уравнение.

этого уравнения ($2^3 + 2 = 10$; $10 = 10$). Таким образом, данное уравнение $f(x) = 10$ имеет единственный корень $x = 2$.

Заметим, что каждая из этих теорем гарантирует единственность корня уравнения (если он есть) только на промежутке возрастания (или убывания) соответствующей функции. Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, то приходится рассматривать каждый из них отдельно.

Пример Решим с помощью теоремы 2 уравнение $x^3 + x = \frac{2}{x}$.

▶ Сначала следует учесть его ОДЗ: $x \neq 0$ и вспомнить, что функция $y = \frac{2}{x}$ на всей области определения не является ни убывающей, ни возрастающей (п. 2.2), но она убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Поэтому рассмотрим каждый из этих промежутков отдельно.

1) При $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x = 1$ $\left(1^3 + 1 = \frac{2}{1}, 2 = 2\right)$. Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает при $x > 0$ (как было показано выше, она возрастает на множестве $\boldsymbol{R}$), а функция $g(x) = \frac{2}{x}$ убывает на промежутке $x > 0$. Таким образом, данное уравнение $f(x) = g(x)$ при $x > 0$ имеет единственный корень $x = 1$.

2) При $x < 0$ данное уравнение имеет корень $x = -1$ $\left((-1)^3 + (-1) = \frac{2}{-1}, -2 = -2\right)$. Функция $f(x) = x^3 + x$ возрастает при $x < 0$, а функция $g(x) = \frac{2}{x}$ убывает на этом промежутке. Поэтому данное уравнение $f(x) = g(x)$ при $x < 0$ имеет единственный корень $x = -1$.

В ответ следует записать все найденные корни (хотя на каждом из промежутков корень единственный, но всего корней — два). Итак, данное уравнение имеет только два корня: 1 и -1. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2 - (x - 1)^2$.

Решение	*Комментарий*
▶ ОДЗ: $x \neq 0$. На ОДЗ $x^4 > 0$. Тогда функция $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^4} \geqslant 2$ (как сумма двух взаимно обратных положительных чисел), а функция $g(x) = 2 - (x - 1)^2 \leqslant 2$.	Если раскрыть скобки и привести обе части уравнения к общему знаменателю, то для нахождения корней полученного уравнения придется решать полное уравнение восьмой степени, все корни которого мы не сможем найти.

Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^4+\dfrac{1}{x^4}=2, \\ 2-(x-1)^2=2. \end{cases}$

Из второго уравнения системы получаем $x = 1$, что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, система (а значит, и данное уравнение) имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: 1. ◁

Попытаемся оценить области значений функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Поскольку на ОДЗ ($x \neq 0$) $x^4 > 0$, то в левой части уравнения стоит *сумма двух взаимно обратных положительных чисел*, которая *всегда больше или равна* 2. В правой части из 2 вычитается неотрицательное число $(x - 1)^2$. Таким образом, при всех значениях x получаем значение, меньшее или равное 2. Равенство между левой и правой частями возможно тогда и только тогда, когда обе части равны 2.

Задача 2 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x}+x^3=\sqrt{y}+y^3, \\ x^2+3y^2=36. \end{cases}$

Решение	*Комментарий*

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$ Рассмотрим функцию $f(t)=\sqrt{t}+t^3$. На своей области определения ($t \geqslant 0$) эта функция является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций). Тогда первое уравнение заданной системы, которое имеет вид $f(x) = f(y)$, равносильно уравнению $x = y$. Таким образом, на ОДЗ заданная система равносильна системе $\begin{cases} x=y, \\ x^2+3y^2=36. \end{cases}$

Подставляя $x = y$ во второе уравнение системы, имеем $4y^2 = 36$, $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Учитывая, что на ОДЗ $y \geqslant 0$, получаем $y = 3$. Тогда $x = y = 3$.

Ответ: (3; 3). ◁

Иногда свойства функций удается применить при решении систем уравнений. Если заметить, что в левой и правой частях первого уравнения заданной системы стоят значения одной и той же функции, которая является возрастающей (как сумма двух возрастающих функций), то *равенство $f(x) = f(y)$ для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку возрастающая функция может принимать одинаковые значения только при одном значении аргумента.* (Заметим, что такое же свойство будет иметь место и для убывающей функции.)

Замечание. Утверждение, обоснованное в комментарии к задаче 2, может быть использовано при решении аналогичных задач. Коротко его можно сформулировать так: *если функция $f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве* $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно использовать свойства функций при решении уравнений.

2*. Обоснуйте правильность ориентиров по решению уравнений с использованием свойств функций, приведенных в таблице 10.

Упражнения

Решите уравнения **(1–4)**, используя свойства соответствующих функций.

1°. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{8-4x}+x+2$;

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3$;

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3$.

2°. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4$; 2) $1+\left|x^5+3x\right|=\sqrt{1-x^2}$;

3*) $x^6+\dfrac{1}{x^6}=1-2x-x^2$; 4*) $\sqrt{2x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|$.

3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0$;

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0$;

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0$;

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0$;

5) $x^2+y^2+5=4x+2y$;

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25$.

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2$; 2) $x+\sqrt{x}+x^9=3$;

3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x$; 4) $\sqrt{x-2}+x=\dfrac{40}{x-1}$;

5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\dfrac{10}{x}$; 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}$.

5*. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$

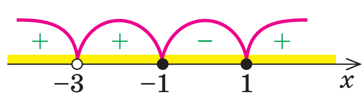
3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8. \end{cases}$

§ 4 НЕРАВЕНСТВА: РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОБЩИЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Таблица 11

1. Понятия неравенства с одной переменной и его решений	
Определение	Пример
Если два выражения с переменной соединить одним из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то получим *неравенство с переменной*. В общем виде неравенство с одной переменной x (например, для случая «больше») записывают так: $f(x) > g(x)$	$3x < 1$ — линейное неравенство; $x^2 - 3x + 2 > 0$ — квадратное неравенство; $\frac{x-5}{2x+4} < 1$ — дробное неравенство
Решением неравенства с переменной **называется значение переменной, которое обращает заданное неравенство в верное числовое неравенство.** *Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет*	$x = 4$ — одно из решений неравенства $2x - 3 > x$, так как при $x = 4$ получаем верное неравенство: $2 \cdot 4 - 3 > 4$, то есть $5 > 4$
2. Область допустимых значений (ОДЗ)	
Областью допустимых значений **(или областью определения)** ***неравенства*** **называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, которые стоят в левой и правой частях неравенства**	Для неравенства $\sqrt{x+2} < x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant -2$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x+2}$ определяется условием: $x + 2 \geqslant 0$, а областью определения функции $g(x) = x$ является множество всех действительных чисел
3. Равносильные неравенства	
Определение	Простейшие теоремы
Два неравенства называются ***равносильными*** **на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения**	**1. Если из одной части неравенства перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное заданному (на любом множестве)**

Продолжение табл. 11

<table>
<tr><td>то есть каждое решение первого неравенства является решением второго и наоборот, каждое решение второго неравенства является решением первого</td><td>2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства), не меняя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства)</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного неравенства)</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Метод интервалов (решения неравенств вида $f(x) \gtrless 0$)</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>1. Найти ОДЗ.
2. Найти нули функции $f(x) = 0$.
3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции $f(x)$ а каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ.
4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства</td><td>Решите неравенство $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.
▶ Пусть $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$.
1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, то есть, $x \neq -3$.
2. Нули функции: $f(x) = 0$.
$\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$, $x^2 - 1 = 0$,
$x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (входят в ОДЗ)
3. 
Ответ: $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$.</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 11

5. Схема поиска решения неравенств

Решение неравенств

с помощью равносильных преобразований	**с помощью метода интервалов ($f(x) \gtrless 0$)**
Учесть ОДЗ исходного неравенства	1. Найти ОДЗ. 2. Найти нули функции: $f(x) = 0$. 3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции на каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ. 4. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства.
1 $\downarrow\uparrow$ 2 Сохранять на ОДЗ верное неравенство при прямых и обратных преобразованиях.	

1 — исходное неравенство;

2 — неравенство, полученное в результате преобразования исходного;

$\downarrow$, $\uparrow$ — символическое изображение выполненных преобразований (с указанием направления их выполнения)

Объяснение и обоснование

1. Понятия неравенства с переменной и его решений. Если два выражения с переменной соединить одним из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то получаем неравенство с переменной.

Аналогично уравнению, неравенство с переменной (например, со знаком $>$) чаще всего понимают как аналитическую запись задачи о нахождении тех значений аргументов, при которых значение одной из заданных функций больше, чем значение другой заданной функции. Поэтому в общем виде неравенство с одной переменной x (например, для случаев «больше») записывают так: $f(x) > g(x)$.

Напомним, что *решением неравенства называется значение переменной, которое обращает это неравенство в верное числовое неравенство.*

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Например, решениями неравенства $3x < 6$ являются все значения $x < 2$, для неравенства $x^2 > -1$ решениями являются все действительные числа ($\boldsymbol{R}$), а неравенство $x^2 < -1$ не имеет решений, поскольку значение x^2 не может быть отрицательным числом, меньшим -1.

2. Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства определяется аналогично ОДЗ уравнения. Если задано неравенство $f(x) > g(x)$, то общая область определения функций $f(x)$ и $g(x)$ называется областью допустимых значений этого неравенства (иногда используются также термины «область определения неравенства» или «множество допустимых значений неравенства»). Например, для неравенства $x^2 < x$ областью допустимых значений являются все действительные числа (это можно записать, например, так: ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$), поскольку функции $f(x) = x^2$ и $g(x) = x$ имеют области определения $\boldsymbol{R}$.

Понятно, что каждое решение заданного неравенства входит как в область определения функции $f(x)$, так и в область определения функции $g(x)$ (иначе мы не сможем получить верное числовое неравенство). Таким образом, *каждое решение неравенства обязательно входит в ОДЗ этого неравенства*. Это позволяет в некоторых случаях применить анализ ОДЗ неравенства для его решения.

Например, в неравенстве $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x} > x$ функция $g(x) = x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ — только при условии, что под знаком квадратного корня будут стоять неотрицательные выражения. Таким образом, ОДЗ этого неравенства задается системой $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ из которой получаем систему $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ не имеющую решений. Таким образом, ОДЗ заданного неравенства не содержит ни одного числа, поэтому это неравенство не имеет решений.

В основном при решении неравенств различных видов приходится применять один из двух методов решения: равносильные преобразования неравенств или так называемый метод интервалов.

3. Равносильные неравенства. С понятием равносильности неравенств вы знакомы еще из курса алгебры 9 класса. Как и для случая равносильных уравнений, равносильность неравенств мы будем рассматривать на определенном множестве.

> ***Два неравенства называются равносильными на некотором множестве, если на этом множестве они имеют одни и те же решения, то есть каждое решение первого неравенства является решением второго, и наоборот, каждое решение второго неравенства является решением первого.***

Договоримся, что в дальнейшем **все равносильные преобразования неравенств будем выполнять на ОДЗ заданного неравенства.** В случае когда ОДЗ заданного неравенства является множество всех действительных чисел, мы не всегда будем его записывать (как не записывали ОДЗ при решении линейных или квадратных неравенств). И в других случаях главное — не записать ОДЗ при решении неравенства, а действительно учесть ее при выполнении равносильных преобразований заданного неравенства.

Общие ориентиры выполнения равносильных преобразований неравенств аналогичны соответствующим ориентирам выполнения равносильных преобразований уравнений.

Как указывалось выше, выполняя *равносильные преобразования неравенств*, необходимо **учитывать ОДЗ заданного неравенства** — это и есть первый ориентир для выполнения равносильных преобразований неравенств.

По определению равносильности неравенств необходимо обеспечить, чтобы каждое решение первого неравенства было решением второго, и наоборот, каждое решение второго неравенства было решением первого. Для этого достаточно **обеспечить сохранение верного неравенства на каждом шаге решения не только при прямых, но и при обратных преобразованиях.** Это и есть второй ориентир для решения неравенств с помощью равносильных преобразований. Действительно, каждое решение неравенства обращает его в верное числовое неравенство, и если верное неравенство сохраняется, то решение каждого из неравенств будет также и решением другого, таким образом, неравенства будут равносильны (соответствующие ориентиры схематически представлены в пункте 5 табл. 11).

Например, чтобы решить с помощью равносильных преобразований неравенство

$$\frac{x-3}{x+1}>0, \qquad (1)$$

достаточно учесть его ОДЗ: $x + 1 \neq 0$ и условие положительности дроби (*дробь будет положительной тогда и только тогда, когда числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки*), а также учесть, что на ОДЗ все необходимые преобразования можно выполнить как в прямом, так и в обратном направлении с сохранением верного неравенства.

Решение	*Комментарий*
▶ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0. \end{cases}$ (2) Тогда получаем $\begin{cases} x>3, \\ x>-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<3, \\ x<-1. \end{cases}$ Таким образом, $x > 3$ или $x < -1$. *Ответ:* $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. ◁	Заметим, что при записи условия положительности дроби — совокупности систем (2) — мы неявно учли ОДЗ неравенства (1). Действительно, если $x + 1 > 0$ или $x + 1 < 0$, то $x + 1 \neq 0$, поэтому в явном виде ОДЗ заданного неравенства не записано при оформлении решения.

Кроме выделенных общих ориентиров, для выполнения равносильных преобразований неравенств можно также пользоваться специальными теоремами о равносильности. В связи с уточнением определения равносильности неравенств обобщим также формулировки простейших теорем о равносильности неравенств, известных из курса алгебры 9 класса.

1. Если из одной части неравенства перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное заданному (на любом множестве).

2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и положительна на ОДЗ заданного неравенства), не изменяя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и отрицательна на ОДЗ заданного неравенства) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное заданному (на ОДЗ заданного).

Обоснование этих теорем полностью аналогично обоснованию ориентиров для равносильных преобразований заданного неравенства.

Замечание. Для обозначения перехода от заданного неравенства к неравенству, равносильному ему, можно применять специальный значок $\Leftrightarrow$, но его использование при оформлении решений не является обязательным (хотя иногда мы будем его использовать, чтобы подчеркнуть, что было выполнено именно равносильное преобразование).

4. Метод интервалов. Решение неравенств методом интервалов опирается на свойства функций, связанные с изменением знаков функции. Объясним эти свойства, используя графики известных нам функций, например функций $y=\frac{1}{x}$ и $y = 2x - 2$ (рис. 54).

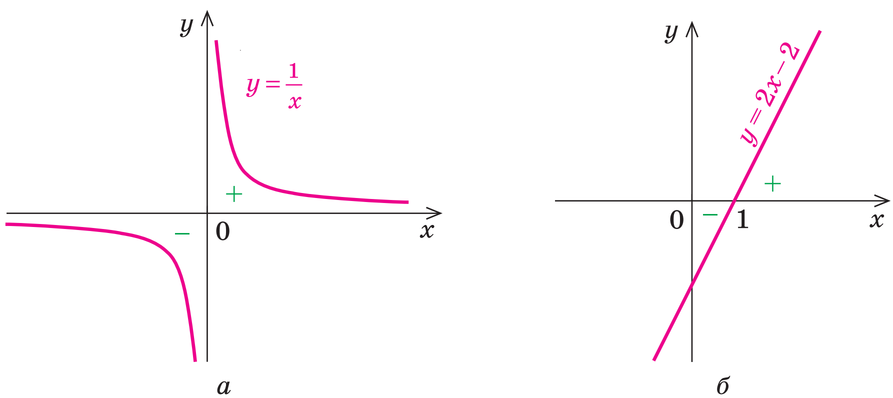


Рис. 54

Рассматривая эти графики, замечаем, что функция может изменить свой знак только в двух случаях:

1) если график разрывается (как в случае функции $y=\frac{1}{x}$ (рис. 54, *а*) — график разрывается в точке 0 и знак функции изменяется в точке 0);
2) если график без разрыва переходит из нижней полуплоскости в верхнюю (или наоборот). Но тогда график пересекает ось Ox (как в случае функции $y = 2x - 2$) (рис. 54, *б*). На оси Ox значения функции равны нулю. (Напомним, что значения аргумента, при которых функция равна нулю, называют *нулями функции*.) Таким образом, **любая функция может поменять свой знак только в нулях или в точках, где разрывается график функции** (в так называемых *точках разрыва* функции[1]).

Точки, в которых разрывается график функции $f(x)$, мы выделяем, как правило, когда находим область определения этой функции. Например, если $f(x)=\frac{1}{x}$, то ее область определения $x \neq 0$, и именно в точке 0 график этой функции разрывается (рис. 54, *а*). Если же на каком-нибудь промежутке области определения график функции не разрывается и функция не равна нулю, то по приведенному выше выводу она не может на этом промежутке поменять свой знак[2]. Таким образом, если отметить нули функции на ее области определения, то область определения разобьется на промежутки, внутри которых знак функции измениться не может (и поэтому этот знак можно определить в любой точке из этого промежутка).

В таблице 12 приведено решение дробно-рационального неравенства $\frac{2x+4}{x-1}>0$ методом интервалов; комментарий, объясняющий каждый этап решения; *план решения неравенств вида* $f(x) \gtrless 0$ *методом интервалов*.

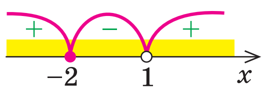
Таблица 12

Пример	Комментарий	План решения
$\frac{2x+4}{x-1}>0$ $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$ 1. ОДЗ: $x - 1 \neq 0$, то есть $x \neq 1$	Рассмотрим функцию, стоящую в левой части этого неравенства, и обозначим ее через $f(x)$: $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$ Решением неравенства $f(x)>0$ могут быть только числа, которые входят	**1. Найти ОДЗ неравенства**

[1] Подробнее это понятие будет рассмотрено в 11 классе.

[2] В 11 классе мы уточним формулировку этого свойства (так называемых непрерывных функций). Для всех известных вам функций (линейных, квадратичных, степенных, дробно-рациональных) это свойство имеет место.

Продолжение табл. 12

	в область определения функции $f(x)$, то есть числа, входящие в ОДЗ неравенства. Поэтому первым этапом решения неравенства методом интервалов будет нахождение его ОДЗ	
2. Нули $f(x)$: ($f(x) = 0$). $\frac{2x+4}{x-1} = 0$, тогда $x = -2$.	Нас интересуют те промежутки области определения функции $f(x)$, на которых эта функция положительна. Как было отмечено выше, элементарная функция $f(x)$ может поменять знак в своих нулях, поэтому вторым этапом решения неравенства $f(x) > 0$ будет нахождение нулей функции (для этого приравниваем функцию $f(x)$ к нулю и решаем полученное уравнение)	**2. Найти нули $f(x)$ ($f(x) = 0$)**
3. 	Если теперь отметить нули на области определения функции $f(x)$, то область определения разбивается на промежутки, внутри каждого из которых функция $f(x)$ не меняет свой знак. Поэтому знак функции на каждом промежутке можно определить в любой точке этого промежутка. Это и является третьим этапом решения	**3. Отметить нули на ОДЗ и найти знак функции в каждом промежутке, на которые разбивается ОДЗ**
4. *Ответ:* $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$. ◁	Из рисунка видно, что решением неравенства является объединение промежутков $(-\infty;\ -2) \cup (1;\ +\infty)$	**4. Записать ответ, учитывая знак неравенства**

Приведем пример решения более сложного дробно-рационального неравенства методом интервалов и с помощью равносильных преобразований.

Пример Решите неравенство $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$.

I способ (метод интервалов)

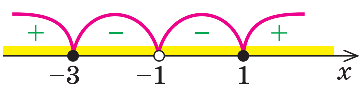
Решение

Пусть $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

1. ОДЗ: $x \neq -1$.
2. Нули $f(x)$: $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0$,

   $x^2 + 2x - 3 = 0$,

   $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ (принадлежат ОДЗ).
3. Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.



4. *Ответ:* $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Комментарий

Данное неравенство имеет вид $f(x) \leqslant 0$, и для его решения можно применить метод интервалов. Для этого используем план, приведенный выше и в таблице 11.

При нахождении нулей $f(x)$ следим за тем, чтобы найденные значения принадлежали ОДЗ (или выполняем проверку найденных корней уравнения $f(x) = 0$).

Записывая ответ к нестрогому неравенству, следует учесть, что все нули функции должны войти в ответ (в данном случае — числа -3 и 1).

II способ (с помощью равносильных преобразований)

Комментарий

Выберем для решения метод равносильных преобразований неравенства. При выполнении равносильных преобразований мы должны учесть ОДЗ данного неравенства, то есть учесть ограничение $(x + 1)^2 \neq 0$.

Но если $x \neq -1$, то $(x + 1)^2 > 0$, и тогда в данной дроби знаменатель положителен. Если выполняется данное неравенство, то числитель дроби $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ (и наоборот, если выполняется последнее неравенство, то на ОДЗ дробь $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$), то есть данное неравенство равносильно на ОДЗ неравенству $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$.

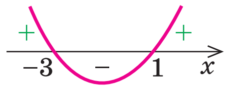
Чтобы решить полученное квадратное неравенство, найдем корни квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 3$ и построим эскиз графика функции $y = x^2 + 2x - 3$. Решение квадратного неравенства: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Поскольку все преобразования были равносильными только на ОДЗ, то мы должны выбрать те решения квадратного неравенства, которые удовлетворяют ограничению ОДЗ.

Решение

► ОДЗ: $(x + 1)^2 \neq 0$, то есть $x \neq -1$.

Тогда $(x + 1)^2 > 0$ и данное неравенство на его ОДЗ равносильно неравенству $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$. Поскольку $x^2 + 2x - 3 = 0$ при $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (эти значения x принадлежат ОДЗ), получаем $-3 \leqslant x \leqslant 1$ (см. рисунок).



Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах смысл понятий: «решение неравенства», «решить неравенство», «область допустимых значений неравенства», «равносильные неравенства».
2. Сформулируйте известные вам теоремы о равносильности неравенств. Проиллюстрируйте их на примерах.
3. Сформулируйте план решения неравенств методом интервалов. Проиллюстрируйте использование этого плана на примере.
4. Объясните на примере, как можно выполнять равносильные преобразования неравенств в тех случаях, которые не описываются известными теоремами о равносильности неравенств.

Упражнения

Решите неравенство **(1—2)** двумя способами: с помощью равносильных преобразований и с помощью метода интервалов.

1°. 1) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-4} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{2}{x+2} < \dfrac{1}{x-3}$;

3) $\dfrac{x^2-25}{(x+5)(x-4)} \leqslant 0$; 4) $\dfrac{x^2+12}{x^2-2x-8} \geqslant 1$.

2*. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$;

3) $\dfrac{81}{x} \geqslant x^3$; 4) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$.

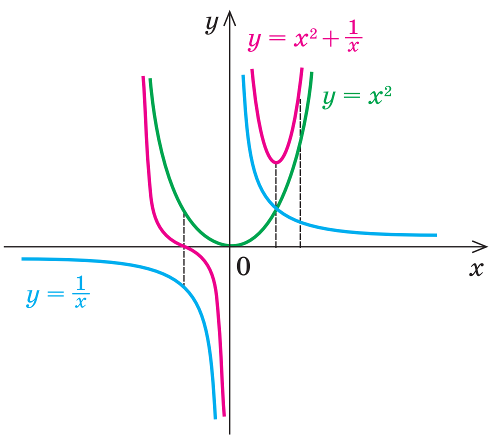
3°. Найдите область определения функции:

1) $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{\dfrac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$;

3) $y = \sqrt{5-x-\dfrac{6}{x}}$; 4) $y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

§ 5 ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Таблица 13

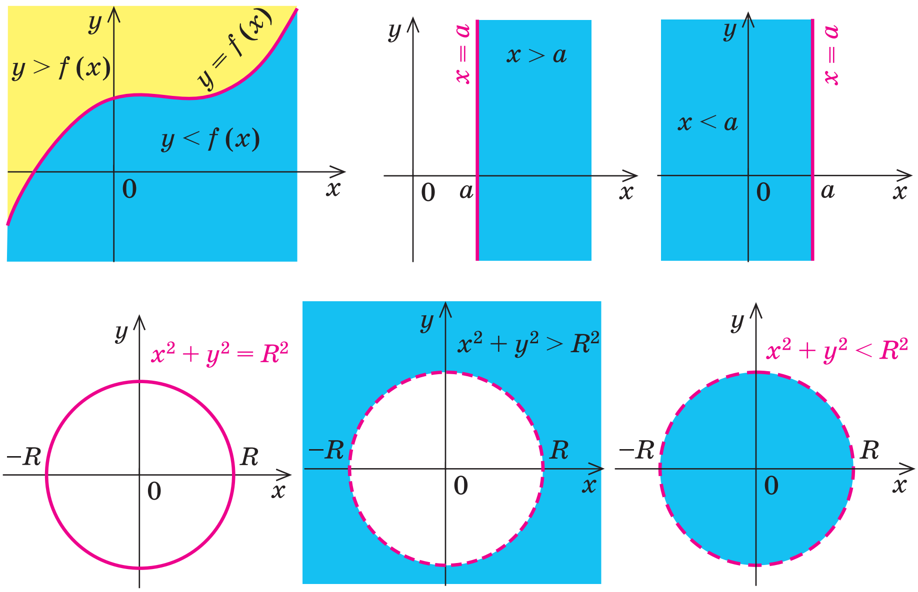
<table>
<tr><td colspan="2">1. Построение графиков функции вида $y = f(x) + g(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если нам известны графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, то эскиз графика функции $y = f(x) + g(x)$ можно построить так: изобразить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $g(x)$, а потом построить искомый график по точкам, выполняя для каждого значения x (из области определения функции $f(x) + g(x)$) необходимые операции с отрезками, изображающими соответствующие ординаты $f(x)$ и $g(x)$.
Аналогично можно построить и схематические графики функций
$$y = f(x) \cdot g(x) \text{ и } y = \frac{1}{f(x)}$$</td></tr>
<tr><td>Пример</td><td>Комментарий</td></tr>
<tr><td>Постройте график функции
$$y = x^2 + \frac{1}{x}.$$

</td><td>Построим в одной системе координат графики функций-слагаемых: $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$ (на рисунке они показаны соответственно зеленой и синими линиями). Для каждого значения x (кроме $x = 0$, которое не принадлежит области определения заданной функции) справа от оси Oy прибавляем соответствующие отрезки — значения функций $f(x)$ и $g(x)$ (обе функции имеют одинаковые знаки), слева от оси Oy — вычитаем (функции имеют противоположные знаки). На рисунке розовой линией изображен график функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 13

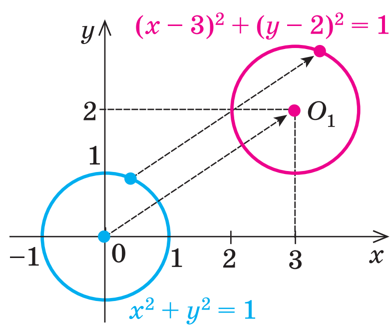
2. Графики уравнений и неравенств с двумя переменными

О п р е д е л е н и е. ***Графиком уравнения*** **(*неравенства*) *с двумя переменными* x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами (x; y), где пара чисел (x; y) является решением соответствующего уравнения.**

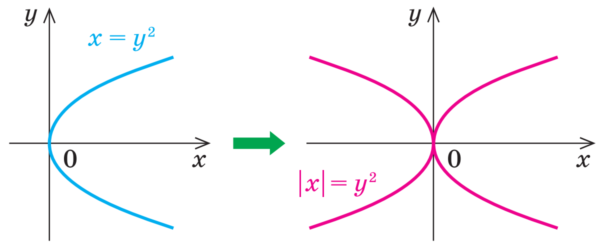
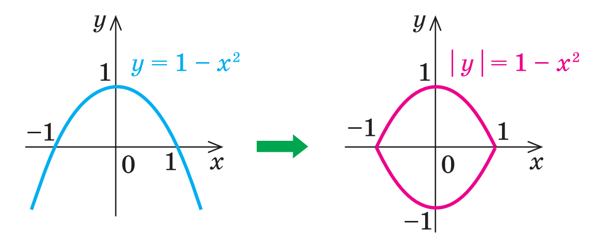
Графики некоторых уравнений и неравенств



3. Геометрические преобразования графика уравнения $F(x; y) = 0$

Преобразование	Пример
$\boldsymbol{F(x - a; y - b) = 0}$ *Параллельный перенос* графика уравнения $F(x; y) = 0$ *на вектор* $\overline{n}(a; b)$	

Продолжение табл. 13

$\boldsymbol{F(\lvert x \rvert; y) = 0}$ Часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ *справа от оси* Oy (и на самой оси) *остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси* Oy.	
$\boldsymbol{F(x; \lvert y \rvert) = 0}$ Часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ *выше оси* Ox (и на самой оси) *остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси* Ox.	

Объяснение и обоснование

1. Построение графиков функций вида $y = f(x) + g(x)$. Если известны графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, то можно построить ориентировочный вид графика функции $y = f(x) + g(x)$, или $y = f(x) \cdot g(x)$, или $y = \frac{1}{f(x)}$. Для этого достаточно изобразить в одной системе координат графики функций $f(x)$ и $g(x)$, а потом построить искомый график по точкам, выполняя для каждого значения x (из области определения заданной функции) необходимые операции над отрезками (или над длинами этих отрезков), которые изображают соответствующие ординаты функций $f(x)$ и $g(x)$.

Пример построения графика функции вида $y = f(x) + g(x)$ приведен в таблице 13, а графика функции вида $y = \frac{1}{f(x)}$ — далее в задаче 1 (в последнем случае удобно строить графики функций $y = f(x)$ и $y = \frac{1}{f(x)}$ не в одной системе координат, а в разных, расположенных так, чтобы их оси ординат находились на одной прямой).

Заметим, что такой способ построения графика функции не всегда дает возможность определить все характерные особенности поведения графика (часто это можно сделать только в результате специального исследования функции, которое будет рассмотрено в учебнике для 11 класса), но во многих случаях приведенный способ позволяет получить определенное представление о виде графика заданной функции.

2. Графики уравнений и неравенств с двумя переменными. С понятием графика уравнения с двумя переменными вы ознакомились в курсе алгебры. Аналогично вводится и понятие графика неравенства с двумя переменными. Поэтому можно дать общее определение этих графиков:

Графиком уравнения (неравенства) с двумя переменными x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y)$, где пара чисел $(x; y)$ является решением соответствующего уравнения (неравенства).

● Для построения графика неравенства $y > f(x)$ (или $y < f(x)$) достаточно иметь график функции $y = f(x)$. Действительно, по определению график функции $y = f(x)$ состоит из всех точек M координатной плоскости с координатами $(x; y) = (x; f(x))$. Тогда для каждого значения x точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > f(x)$, будут находиться выше точки M (рис. 55, *а*), а точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y < f(x)$, будут находиться ниже точки M (рис. 55, *б*). Таким образом,

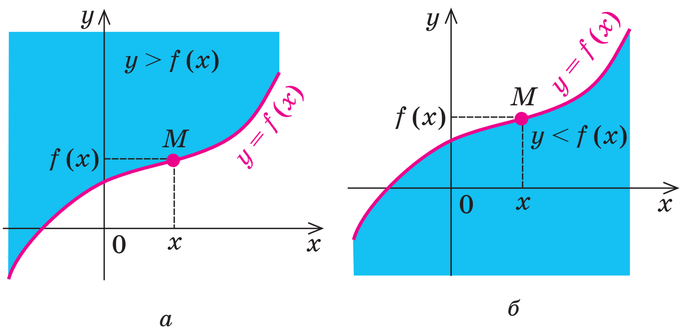


Рис. 55

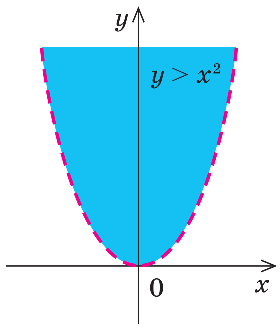


Рис. 56

график неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, находящихся выше графика функции $y = f(x)$, а график неравенства $y < f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, находящихся ниже графика функции $y = f(x)$. ○

Например, на рисунке 56 изображен график неравенства $y > x^2$, а на рисунке 57 — график неравенства $y \leqslant x^2$. Поскольку точки графика $y = x^2$ не принадлежат графику неравенства $y > x^2$, то на первом графике парабола $y = x^2$ изображена штриховой линией; а так как точки графика $y = x^2$ принадлежат графику неравенства $y \leqslant x^2$, то на втором графике парабола $y = x^2$ изображена сплошной линией.

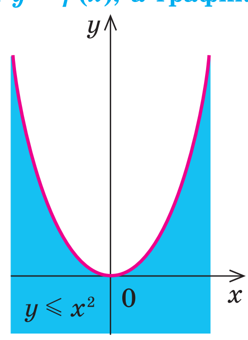


Рис. 57

Аналогично, если на координатной плоскости есть прямая $x = a$, то **графиком неравенства $x > a$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся справа от этой прямой, а графиком неравенства $x < a$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся слева от этой прямой.**

Например, на рисунке 58 изображен график неравенства $x > 2$, а на рисунке 59 — график неравенства $x \leqslant -1$.

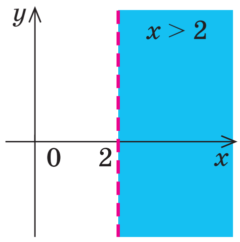


Рис. 58

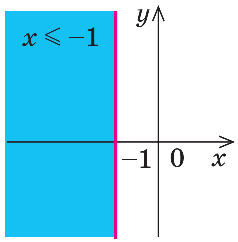
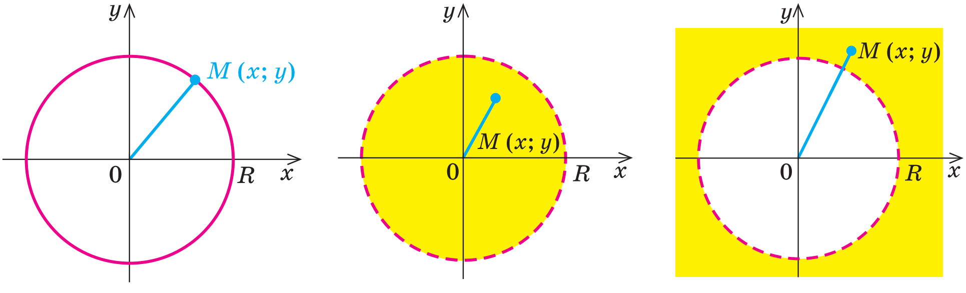


Рис. 59

Отметим, что в том случае, когда на координатной плоскости есть изображение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, то

графиком неравенства $x^2 + y^2 < R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся внутри окружности, а графиком неравенства $x^2 + y^2 > R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся вне окружности.

● Действительно, если на координатной плоскости рассмотреть точку $M(x, y)$, то $OM^2 = x^2 + y^2$ (O — начало координат). Если $x^2 + y^2 = R^2$ (где $R > 0$), то $OM^2 = R^2$, таким образом, $OM = R$ — точка M лежит на окружности радиуса R с центром в начале координат (рис. 60, *а*). Если $x^2 + y^2 < R^2$, то $OM^2 < R^2$, таким образом, $OM < R$. То есть неравенству $x^2 + y^2 < R^2$ удовлетворяют координаты всех точек (и только этих точек), которые находятся внутри круга, ограниченного окружностью радиуса R с центром в начале координат (рис. 60, *б*).



а *б* *в*

Рис. 60

Если $x^2 + y^2 > R^2$, то $OM^2 > R^2$, таким образом, $OM > R$. То есть неравенству $x^2 + y^2 > R^2$ удовлетворяют координаты всех точек (и только этих точек), которые находятся вне круга, ограниченного окружностью радиуса R с центром в начале координат (рис. 60, *в*).

Аналогично, если на плоскости есть изображение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, то графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся внутри этой окружности, а графиком неравенства $(x - a)^2 + (y - b)^2 > R^2$ будут все точки координатной плоскости, находящиеся вне окружности. Например, на рисунке 61 изображен график неравенства $x^2 + y^2 > 9$, а на рисунке 62 — график неравенства $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 16$. ○

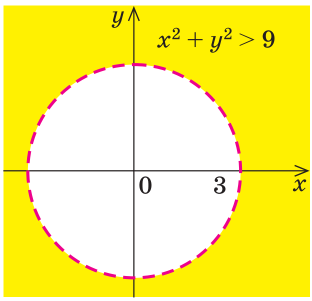


Рис. 61

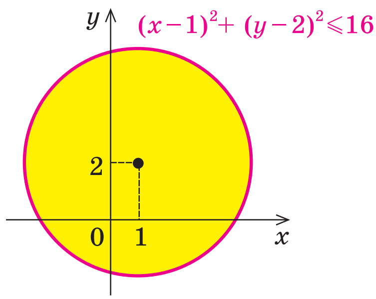


Рис. 62

3. Геометрические преобразования графика уравнения $F(x; y) = 0$.

● По определению график уравнения

$$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$

состоит из всех точек $M(x_0; y_0)$ координатной плоскости, координаты $(x_0; y_0)$ которых являются решениями этого уравнения. Это означает, что при подстановке пары чисел $(x_0; y_0)$ в данное уравнение оно обращается в верное числовое равенство, таким образом, $F(x_0; y_0) = 0$ — верное равенство.

Рассмотрим точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$. Если координаты этой точки подставить в уравнение

$$F(x - a; y - b) = 0, \qquad (2)$$

то получим верное равенство $F(x_0; y_0) = 0$. Поэтому координаты точки M_1 являются решениями уравнения (2), значит, точка M_1 принадлежит графику уравнения $F(x - a; y - b) = 0$.

Точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ можно получить из точки $M(x_0; y_0)$ параллельным переносом ее на вектор $\overline{n}(a; b)$. Поскольку каждая точка M_1 графика уравнения $F(x - a; y - b) = 0$ получается из точки M графика уравнения $F(x; y) = 0$ параллельным переносом ее на вектор $\overline{n}(a; b)$ (рис. 63), то и весь

график уравнения $F(x - a;\ y - b) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ параллельным переносом его на вектор $\overline{n}(a; b)$. ○

● Для обоснования связи между графиками $F(x;\ y) = 0$ и $F(|x|;\ y) = 0$ достаточно заметить, что при $x \geqslant 0$ уравнение $F(|x|;\ y) = 0$ совпадает с уравнением $F(x;\ y) = 0$, таким образом, совпадают и их графики справа от оси Oy и на самой оси. Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ (где $x_0 \geqslant 0$) — одна из общих точек этих графиков. Тогда $F(x_0;\ y_0) = 0$ — верное равенство.

Рассмотрим точку $M_1(-x_0;\ y_0)$. Если координаты этой точки подставить в уравнение $F(|x|;\ y) = 0$ и учесть, что $x_0 \geqslant 0$, то получим верное равенство $F(x_0;\ y_0) = 0$. Поэтому координаты точки M_1 являются решениями уравнения $F(|x|;\ y) = 0$, значит, точка M_1 принадлежит графику этого уравнения. Учитывая, что точки M и M_1 симметричны относительно оси Oy (рис. 64):

график уравнения $F(|x|;\ y) = 0$ можно получить из графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ следующим образом: часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ справа от оси Oy (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy. ○

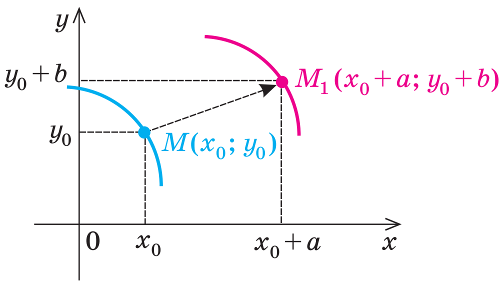


Рис. 63

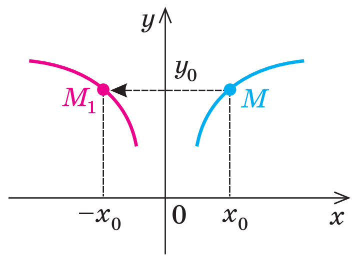


Рис. 64

Аналогично обосновывается, что

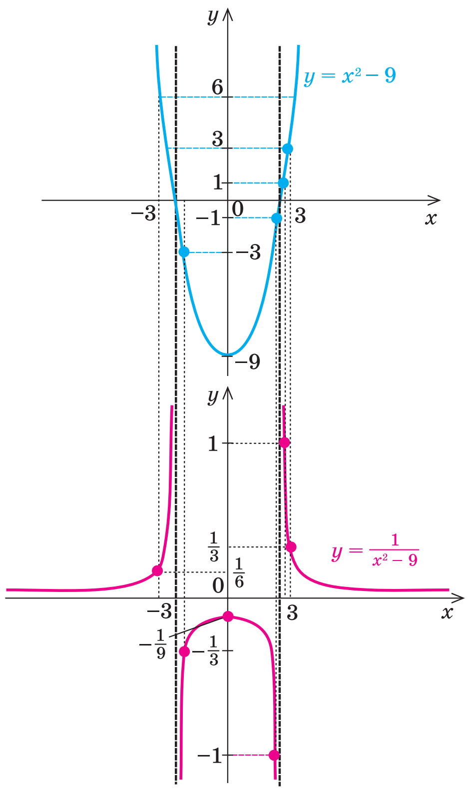
для построения графика уравнения $F(x;\ |y|) = 0$ часть графика уравнения $F(x;\ y) = 0$ выше оси Ox (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть графика отображается симметрично оси Ox.

В таблице 13 приведены простейшие примеры использования геометрических преобразований графиков уравнений. Указанные соотношения приходится применять в заданиях типа: построить график уравнения или неравенства или изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению (неравенству).

Примеры решения задач

Задача 1 Постройте график функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

Решение	*Комментарий*
$x^2 - 9 = 0$ при $x = \pm 3$. Поэтому область определения заданной функции: $x^2 - 9 \neq 0$, то есть $x \neq \pm 3$.	Построим две системы координат так, чтобы оси ординат были у них на одной прямой. В тех точках, где функция $f(x) = x^2 - 9$ равна нулю ($x = \pm 3$), не существует графика функции $y = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x^2 - 9}$. Поэтому проведем через эти точки вертикальные прямые, которые не пересекают график функции $y = \dfrac{1}{f(x)}$.



Затем для каждого значения x разделим 1 на соответствующее значение ординаты $f(x)$ (используя то, что ординаты $f(x)$ отмечены на верхнем графике). На рисунке розовой линией изображен результат — график функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$. (Для построения этого графика масштаб по осям Ox и Oy выбран разный.)

Задача 2 Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} x^2+y\leqslant 0, \\ x-y<2. \end{cases}$$

Решение	*Комментарий*

▶ Заданная система равносильна системе $\begin{cases} y\leqslant -x^2, \\ y>x-2. \end{cases}$

Изобразим штриховкой графики неравенств системы (первого — вертикальной штриховкой, второго — горизонтальной):

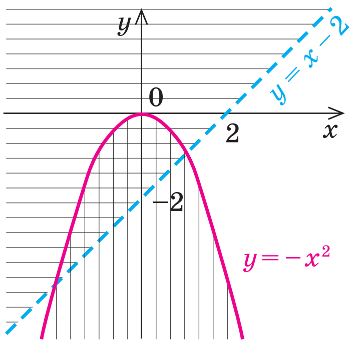


Рис. 65

Тогда множество точек, координаты которых удовлетворяют системе, будет таким:

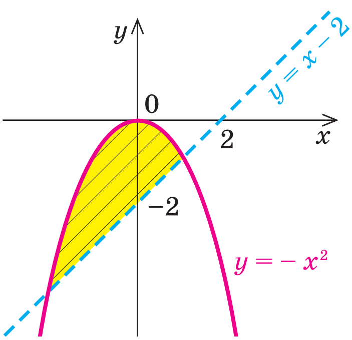


Рис. 66 ◁

Перепишем заданную систему так, чтобы было удобно изображать графики данных неравенств (то есть запишем неравенства в виде $y>f(x)$ или $y<f(x)$). Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leqslant -x^2$, является объединением точек параболы $y=-x^2$ и точек координатной плоскости, находящихся ниже параболы (на рис. 65 это множество обозначено вертикальной штриховкой). Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y>x-2$, состоит из точек координатной плоскости, находящихся выше прямой $y=x-2$ (на рисунке это множество обозначено горизонтальной штриховкой).

Системе неравенств удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые принадлежат пересечению множеств точек, заданных каждым из неравенств данной системы (на рисунке пересечению множеств соответствует та область, где штриховки наложились одна на другую).

Заметим, что в подобных заданиях можно не выполнять промежуточных рисунков, а сразу штриховать искомое множество точек координатной плоскости (выше прямой $y=x-2$ и ниже параболы $y=-x^2$ вместе с той частью параболы, которая лежит выше прямой; рис. 66).

Задача 3* Постройте график уравнения $|x - y| + 2|x + y| = x + 6$.

Ориентир

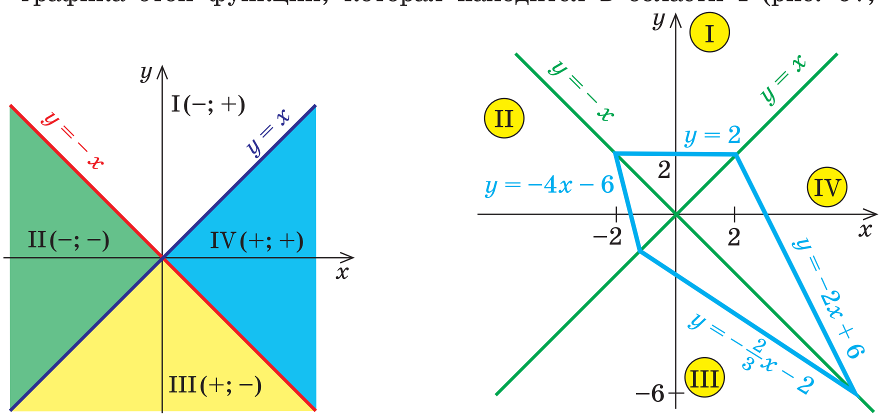
Для упрощения выражения с несколькими модулями с двумя переменными можно найти нули подмодульных выражений (то есть приравнять их к нулю) и разбить область определения рассматриваемого выражения на несколько частей, в каждой из которых знаки всех модулей раскрываются однозначно.

Используя этот ориентир, получаем *план решения* примера.

Приравняем к нулю подмодульные выражения $x - y = 0$ (отсюда $y = x$) и $x + y = 0$ (отсюда $y = -x$). Прямые $y = x$ и $y = -x$ разбивают координатную плоскость на четыре области. В каждой из этих областей знак каждого модуля раскрывается однозначно, после преобразования полученного равенства строим соответствующую часть графика заданного уравнения.

Решение

1. Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$.
2. $x - y = 0$ при $y = x$; $x + y = 0$ при $y = -x$.
3. Прямые $y = x$ и $y = -x$ разбивают координатную плоскость на четыре части, в каждой из которых обозначены знаки первого и второго подмодульных выражений (рис. 67, *а*). (Будем считать, что каждая область берется вместе с лучами, которые ее ограничивают.) Действительно, если точки находятся в области I или на ее границе, то их координаты удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ которую можно записать так: $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда в области I первое подмодульное выражение отрицательно, а второе — положительно, поэтому данное уравнение имеет вид $-(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = 2$. Строим ту часть графика этой функции, которая находится в области I (рис. 67, *б*).



а *б*

Рис. 67

Аналогично для точек области II: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$

Таким образом, в области II данное уравнение имеет вид $-(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -4x - 6$. Строим ту часть графика этой функции, которая находится в области II.

Если точки находятся в области III, то $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 0, \end{cases}$ из данного уравнения получаем $(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

Если точки находятся в области IV, то $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0, \end{cases}$ из данного уравнения имеем $(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Отсюда $y = -2x + 6$.

Окончательный вид графика уравнения приведен на рисунке 67, *б*. ◁

Вопросы для контроля

1. Объясните на примерах, как можно, имея графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить эскиз графика функции $y = f(x) + g(x)$ и функции $y = \frac{1}{f(x)}$.
2. Что называется графиком уравнения с двумя переменными? Что называется графиком неравенства с двумя переменными? Приведите примеры.
3. Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график неравенства $y > f(x)$ и неравенства $y < f(x)$? Приведите примеры.
4. Как, зная график уравнения $F(x; y) = 0$, можно построить график уравнения $F(x - a; y - b) = 0$ и уравнений $F(|x|; y) = 0$ и $F(x; |y|) = 0$? Приведите примеры.
5. Обоснуйте правила геометрических преобразований графика уравнения $F(x; y) = 0$ для получения графиков уравнений $F(x - a; y - b) = 0$, $F(|x|; y) = 0$, $F(x; |y|) = 0$.
6. Объясните на примере, как можно найти на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств с двумя переменными.

Упражнения

1. Постройте эскиз графика функции:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = x - \frac{1}{x}$; 3) $y = x^3 + \frac{1}{x}$; 4) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

2. Постройте график уравнения:

1) $|y| = x - 2$; 2) $|y| = x^2 - x$; 3) $|x| = -y^2$;
4) $|x| + |y| = 2$; 5) $|x| - |y| = 2$.

3. Постройте график неравенства:

1) $y > x^2 - 3$; 2) $y < \frac{1}{x}$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;

4) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 4$.

4. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y > x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x, \\ y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x + 4. \end{cases}$

5. Постройте график уравнения:

1) $|x - y| - |x + y| = y + 3$;

2) $|x - 2y| + |2x - y| = 2 - y$;

3) $|3x + y| + |x - y| = 4$.

§ 6 МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

При решении математических задач иногда возникает потребность обосновать, что определенное свойство выполняется для произвольного натурального числа n.

Проверить данное свойство для каждого натурального числа мы не можем — их количество бесконечно. Приходится рассуждать так: 1) я могу проверить, что это свойство выполняется при $n = 1$; 2) я могу показать, что для каждого следующего значения n оно тоже выполняется, таким образом, свойство будет выполняться для каждого следующего числа, начиная с единицы, то есть для всех натуральных чисел.

Такой способ рассуждений при доказательстве математических утверждений называется *методом математической индукции*. Он является одним из универсальных методов доказательства математических утверждений, в которых содержатся слова «для любого натурального n» (возможно, не сформулированные явно). Доказательство с помощью этого метода всегда состоит из двух этапов:

1) *начало индукции*: проверяется, выполняется ли рассматриваемое утверждение при $n = 1$;
2) *индуктивный переход*: доказывается, что если данное утверждение выполняется для k, то оно выполняется и для $k + 1$.

Таким образом, начав с $n = 1$, мы на основании доказанного индуктивного перехода получаем, что сформулированное утверждение справедливо и для $n = 2, 3, \ldots$, то есть для любого натурального n.

На практике этот метод удобно применять по схеме, приведенной в таблице 14.

Таблица 14

Схема доказательства утверждений с помощью метода математической индукции	Пример
	Докажите, что для любого натурального n: $$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$ ▶ Для удобства записи обозначим $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)$.
1. ***Проверяем***, **выполняется ли данное утверждение при $n = 1$ (иногда начинают с $n = p$).**	1. При $n = 1$ равенство выполняется: $1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3$, то есть $2 = 2$.
2. ***Предполагаем***, **что заданное утверждение справедливо при $n = k$, где $k \geqslant 1$ (другой вариант — при $n \leqslant k$).**	2. Предполагаем, что заданное равенство верно при $n = k$, где $k \geqslant 1$, то есть $S_k = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) =$ $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$ (1)
3. ***Доказываем*** **(опираясь на предположение) справедливость нашего утверждения и при $n = k + 1$.**	3. Докажем, что равенство выполняется и при $n = k + 1$, то есть докажем, что $S_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) +$ $+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$ Учитывая, что $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, и подставляя S_k из равенства (1), получаем $S_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=$ $=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$ что и требовалось доказать.
4. ***Делаем вывод***, **что данное утверждение справедливо для любого натурального числа n (для любого $n \geqslant p$).**	4. Итак, заданное равенство верно для любого натурального n. ◁

Примеры решения задач

Задача 1 Докажите, что $10^n - 9n - 1$ делится на 81 при любом натуральном n.

Комментарий

Поскольку утверждение необходимо доказать для любого натурального n, то используем метод математической индукции по схеме, приведенной в таблице 14. При выполнении индуктивного перехода (от $n = k$

к $n = k + 1$), представим выражение, полученное при $n = k + 1$, как сумму двух выражений: того, что получили при $n = k$, и еще одного выражения, которое делится на 81.

Доказательство

1. ▶Проверяем, выполняется ли данное утверждение при $n = 1$. Если $n = 1$, данное выражение равно 0, то есть делится на 81. Таким образом, данное свойство выполняется при $n = 1$.
2. Предполагаем, что данное утверждение выполняется при $n = k$, то есть что $10^k - 9k - 1$ делится на 81.
3. Докажем, что данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$, то есть что $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ делится на 81.
   $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k$.
   Выражение в скобках — это значение заданного выражения при $n = k$, которое по предположению индукции делится на 81. Следовательно, каждое слагаемое последней суммы делится на 81, тогда и вся сумма, то есть $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$, делится на 81. Таким образом, данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$.
4. Следовательно, $10^n - 9n - 1$ делится на 81 при любом натуральном n. ◁

Задача 2 Докажите, что $2^n > 2n + 1$, если $n \geqslant 3$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Комментарий

Поскольку утверждение должно выполняться, начиная с $n = 3$, то проверку проводим именно для этого числа. Записывая предположение индукции, удобно воспользоваться тем, что по определению понятия «больше» $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$. Доказывая неравенство при $n = k + 1$, снова используем то же определение и доказываем, что разность между его левой и правой частями положительна.

Доказательство

1. При $n = 3$ получаем $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, то есть $8 > 7$ — верное неравенство. Таким образом, при $n = 3$ данное неравенство выполняется.
2. Предполагаем, что данное неравенство выполняется при $n = k$ (где $k \geqslant 3$):
   $$2^k > 2k + 1, \text{ то есть } 2^k - 2k - 1 > 0. \tag{1}$$
3. Докажем, что данное неравенство выполняется и при $n = k + 1$, то есть докажем, что $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
   Рассмотрим разность:
   $2^{k+1} - (2(k + 1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 = 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$
   (поскольку выражение в скобках по неравенству (1) положительно и при $k \geqslant 3$ выражение $2k - 1$ также положительно). Следовательно, $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$, то есть данное неравенство выполняется и при $n = k + 1$.
4. Итак, данное неравенство выполняется при всех натуральных $n \geqslant 3$.

Упражнения

Докажите с помощью метода математической индукции **(1—12)**.

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ при всех натуральных n ($n \in \boldsymbol{N}$).

2. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

4. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ обозначается $n!$ (читается: «n факториал»). Докажите, что $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

6. $4^n > 7n-5$, если $n \in \boldsymbol{N}$.

7. $2^n > n^3$, если $n \geqslant 10$.

8. Докажите, что 9^n-8n-1 делится на 16 при любом натуральном n.

9. Докажите, что $5^n+2\cdot 3^n-3$ делится на 8 при любом натуральном n.

10. Докажите, что 7^n+3^n-2 делится на 8 при любом натуральном n.

11. Докажите, что $2^{3n+3}-7n+41$ делится на 49 при любом натуральном n.

12. Докажите, что когда $a_1=2$, $a_2=8$, $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$, то $a_n=3^n-1$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

§ 7 МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

7.1. Определение многочленов от одной переменной и их тождественное равенство

Рассмотрим одночлен и многочлен, которые зависят только от одной переменной, например, от переменной x.

По определению одночлена числа и буквы (в нашем случае одна буква — x) в нем связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень. Если в этом одночлене произведение всех чисел записать перед буквой, а произведение всех степеней буквы записать как целую неотрицательную степень этой буквы (то есть записать одночлен в стандартном виде), то получим выражение вида ax^n, где a — некоторое число. Поэтому *одночлен от одной переменной x — это выражение вида ax^n, где a — некоторое число, n — целое неотрицательное число*. Если $a \neq 0$, то показатель степени n переменной x называется *степенью одночлена*. Например, $25x^6$ — одночлен шестой степени, $\frac{2}{3}x^2$ — одночлен второй степени. Если одночлен является числом, не равным нулю, то его степень считается равной нулю. *Для одночлена, заданного числом* 0, *понятие степени не определяется* (поскольку $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

По определению многочлен от одной переменной x — это сумма одночленов от одной переменной x. Поэтому

многочленом от одной переменной x называется выражение вида

$$\boldsymbol{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,} \qquad \textbf{(1)}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0}$ ***— некоторые числа.***

Если $a_n \neq 0$, то этот многочлен называют *многочленом n-й степени* от переменной x. При этом член $a_n x^n$ называют *старшим членом многочлена* $f(x)$, число a_n — *коэффициентом при старшем члене*, а член a_0 — *свободным членом*. Например, $5x^3 - 2x + 1$ — многочлен третьей степени, у которого свободный член равен 1, а коэффициент при старшем члене равен 5.

Заметим, что иногда нумерацию коэффициентов многочлена начинают с начала записи выражения (1), и тогда общий вид многочлена $f(x)$ записывают так:

$$f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — некоторые числа.

Теорема 1. ***Одночлены*** $\boldsymbol{ax^n}$***, где*** $\boldsymbol{a \neq 0}$***, и*** $\boldsymbol{bx^m}$***, где*** $\boldsymbol{b \neq 0}$***, тождественно равны тогда и только тогда, когда*** $\boldsymbol{a = b}$ ***и*** $\boldsymbol{n = m}$***. Одночлен*** $\boldsymbol{ax^n}$ ***тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда*** $\boldsymbol{a = 0}$***.***

Поскольку равенство одночленов

$$ax^n = bx^m \qquad (2)$$

выполняется при всех значениях x (по условию эти одночлены тождественно равны), то, подставляя в это равенство $x = 1$, получаем, что $a = b$. Сокращая обе части равенства (2) на a (где $a \neq 0$ по условию), получаем $x^n = x^m$. При $x = 2$ из этого равенства имеем: $2^n = 2^m$. Поскольку $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ раз}}$, а $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m \text{ раз}}$, то равенство $2^n = 2^m$ возможно только тогда, когда $n = m$. Таким образом, из тождественного равенства $ax^n = bx^m$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) получаем, что $a = b$ и $n = m$.

Если известно, что $ax^n = 0$ для всех x, то при $x = 1$ получаем $a = 0$. Поэтому одночлен ax^n тождественно равен нулю при $a = 0$ (тогда $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv 0$[1]).

Далее любой одночлен вида $0 \cdot x^n$ будем заменять на 0.

Теорема 2. ***Если многочлен*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***тождественно равен нулю (то есть принимает нулевые значения при всех значениях*** $\boldsymbol{x}$***), то все его коэффициенты равны нулю.***

[1] Значком ≡ обозначено тождественное равенство многочленов.

Для доказательства используем метод математической индукции. Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$.

При $n = 0$ имеем $f(x) = a_0 \equiv 0$, поэтому $a_0 = 0$. То есть в этом случае утверждение теоремы выполняется.

Предположим, что при $n = k$ это утверждение также выполняется: если многочлен $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$, то $a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

Докажем, что данное утверждение выполняется и при $n = k + 1$. Пусть

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \qquad (3)$$

Поскольку равенство (3) выполняется при всех значениях x, то, подставляя в это равенство $x = 0$, получаем, что $a_0 = 0$. Тогда равенство (3) обращается в следующее равенство: $a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x \equiv 0$. Вынесем x в левой части этого равенства за скобки и получим

$$x\,(a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1) = 0. \qquad (4)$$

Равенство (4) должно выполняться при всех значениях x. Для того чтобы оно выполнялось при $x \neq 0$, должно выполняться тождество

$$a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 \equiv 0.$$

В левой части этого тождества стоит многочлен со степенями переменной от x^0 до x^k. Тогда по предположению индукции все его коэффициенты равны нулю: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. Но мы также доказали, что $a_0 = 0$, поэтому наше утверждение выполняется и при $n = k + 1$. Таким образом, утверждение теоремы справедливо для любого целого неотрицательного n, то есть для всех многочленов.

Многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю, обычно называют *нулевым многочленом*, или *нуль-многочленом*, и обозначают $0(x)$ или просто 0 (поскольку $0(x) = 0$).

Теорема 3. ***Если два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, то они совпадают (то есть их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях равны).***

Пусть многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, а многочлен $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$. Рассмотрим многочлен $f(x) - g(x)$. Поскольку многочлены $f(x)$ и $g(x)$ по условию тождественно равны, то многочлен $f(x) - g(x)$ тождественно равен 0. Таким образом, все его коэффициенты равны нулю.

Но $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\,x + (a_2 - b_2)\,x^2 + \ldots$.

Тогда $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ... Отсюда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Как видим, если допустить, что у какого-то из двух данных многочленов степень выше, чем у второго многочлена (например, n больше m), то коэффициенты разности будут равны нулю. Поэтому начиная с $(m + 1)$-го номера все коэффициенты a_i также будут равны нулю. То есть действительно многочлены $f(x)$ и $g(x)$

имеют одинаковую степень и соответственно равные коэффициенты при одинаковых степенях. ○

Теорема 3 является основанием так называемого метода неопределенных коэффициентов. Покажем его применение на следующем примере.

Задача Докажите, что выражение $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$ является полным квадратом.

▶ Данное выражение может быть записано в виде многочлена четвертой степени, поэтому оно может быть полным квадратом только многочлена второй степени вида $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Получаем тождество:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (ax^2 + bx + c)^2. \qquad (5)$$

Раскрывая скобки в левой и правой частях этого тождества и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему равенств. Этот этап решения удобно оформлять в следующем виде:

x^4	$1 = a^2$
x^3	$2 + 4 + 6 + 8 = 2ab$
x^2	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = b^2 + 2ac$
x^1	$2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2bc$
x^0	$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 16 = c^2$

Из первого равенства получаем $a = 1$ или $a = -1$.

При $a = 1$ из второго равенства имеем $b = 10$, а из третьего — $c = 20$. Как видим, при этих значениях a, b и c последние два равенства также выполняются. Следовательно, тождество (5) выполняется при $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$ (аналогично можно также получить $a = -1$, $b = -10$, $c = -20$).

Таким образом, $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x+8) + 16 = (x^2 + 10x + 20)^2$. ◁

Упражнения

1. Зная, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тождественно равны, найдите значение коэффициентов a, b, c, d:

1) $f(x) = 2x^2 - (3 - a)x + b$, $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$;

2) $f(x) = (a + 1)x^3 + 2$, $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c - 1)x + d$.

2. Найдите такие числа a, b, c, чтобы данное равенство $a(x^2 - 1) + b(x - 2) + c(x + 2) = 2$ выполнялось при любых значениях x.

3. Докажите тождество:

1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$;

2) $1 + x^4 = \left(1 + x\sqrt{2} + x^2\right)\left(1 - x\sqrt{2} + x^2\right)$.

4. Докажите, что данное выражение является полным квадратом:
1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$;
2) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$.

5. Найдите такие a и b, чтобы при любых значениях x выполнялось равенство: $3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b)$.

6. Запишите алгебраическую дробь $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$ как сумму двух алгебраических дробей вида $\frac{a}{3x - 1}$ и $\frac{b}{5x + 2}$.

7.2. Действия над многочленами. Деление многочлена на многочлен с остатком

Сложение и умножение многочленов от одной переменной выполняется с помощью известных правил сложения и умножения многочленов. В результате выполнения действий сложения или умножения над многочленами от одной переменной всегда получаем многочлен от той же переменной.

Из определения произведения двух многочленов вытекает, что *старший член произведения двух многочленов равен произведению старших членов множителей, а свободный член произведения равен произведению свободных членов множителей. Отсюда получаем, что степень произведения двух многочленов равна сумме степеней множителей.*

При сложении многочленов одной степени получаем многочлен этой же степени, хотя иногда можно получить многочлен меньшей степени.

Например, $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$.

При сложении многочленов разных степеней всегда получаем многочлен, степень которого равна большей степени слагаемого.

Например, $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$.

Деление многочлена на многочлен определяется аналогично делению целых чисел. Напомним, что целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число q, что $a = b \cdot q$.

Определение. Многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен), если существует такой многочлен $Q(x)$, что

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

Как и для целых чисел, операция деления многочлена на многочлен выполняется не всегда, поэтому во множестве многочленов вводится операция *деления с остатком*. Говорят, что

многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ (где $B(x)$ — не нулевой многочлен) с остатком, если существует такая пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, что $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем степень остатка $R(x)$ меньше степени делителя $B(x)$ (в этом случае многочлен $Q(x)$ называют *неполным частным*.)

Например, поскольку $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)\,x + 2$, то при делении многочлена $x^3 - 5x + 2$ на многочлен $x^2 - 5$ получаем неполное частное x и остаток 2.

Иногда деление многочлена на многочлен удобно выполнять «уголком», как и деление многозначных чисел, пользуясь следующим алгоритмом.

Задача Разделим многочлен $A\,(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B\,(x) = x^2 - 2x + 3$.

▶
$$\begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} x^4 - 2x^3 + 3x^2 \phantom{{}+ 8x - 20} & x^2 - 3x - 8 \\ \hline -3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\ -3x^3 + 6x^2 - 9x \phantom{{}- 20} & \\ \hline -8x^2 + 17x - 20 & \\ -8x^2 + 16x - 24 & \\ \hline x + 4 & \end{array}$$
◁

Докажем, что полученный результат действительно является результатом деления $A\,(x)$ на $B\,(x)$ с остатком.

● Если обозначить результат выполнения первого шага алгоритма через $f_1(x)$, второго шага — через $f_2(x)$, третьего — через $f_3(x)$, то операцию деления, выполненную выше, можно записать в виде системы равенств:

$$f_1\,(x) = A\,(x) - x^2 \cdot B\,(x); \tag{1}$$

$$f_2\,(x) = f_1\,(x) - (-3x) \cdot B\,(x); \tag{2}$$

$$f_3\,(x) = f_2\,(x) - (-8) \cdot B\,(x). \tag{3}$$

Сложим почленно равенства (1), (2), (3) и получим

$$A\,(x) = (x^2 - 3x - 8)\,B\,(x) + f_3\,(x). \tag{4}$$

Учитывая, что степень многочлена $f_3(x) = x + 4$ меньше степени делителя $B\,(x) = x^2 - 2x + 3$, обозначим $f_3(x) = R\,(x)$ (остаток), а $x^2 - 3x - 8 = Q\,(x)$ (неполное частное). Тогда из равенства (4) имеем: $A\,(x) = B\,(x) \cdot Q\,(x) + R\,(x)$, то есть $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x - 8) + x + 4$, а это и означает, что мы разделили $A\,(x)$ на $B\,(x)$ с остатком.

Очевидно, что приведенное обоснование можно провести для любой пары многочленов $A\,(x)$ и $B\,(x)$ в случае их деления столбиком. Поэтому описанный выше алгоритм позволяет для любых делимого $A\,(x)$ и делителя $B\,(x)$ (где $B\,(x)$ — не нулевой многочлен) найти неполное частное $Q\,(x)$ и остаток $R\,(x)$.

Отметим, что в случае, когда степень делимого $A\,(x)$ меньше степени делителя $B\,(x)$, считают, что неполное частное $Q\,(x) = 0$, а остаток $R\,(x) = A\,(x)$.

Упражнения

1. Выполните деление многочлена на многочлен:
1) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ на $x - 2$; 2) $x^{10} + 1$ на $x^2 + 1$;
3) $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$ на $x^2 + 2x + 3$.

2. Выполните деление многочлена на многочлен с остатком:
1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ на $x^2 + x + 2$;
2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ на $x^2 - x - 2$.

3. При каких значениях a и b многочлен $A(x)$ делится без остатка на многочлен $B(x)$?
1) $A(x) = x^3 + ax + b$, $B(x) = x^2 + 5x + 7$;
2) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 4$;
3) $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b$, $B(x) = x^2 - x + 2$.

4. Найдите неполное частное и остаток при делении многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ методом неопределенных коэффициентов:
1) $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $B(x) = x^2 - 1$;
2) $A(x) = x^3 - 19x - 30$, $B(x) = x^2 + 1$.

7.3. Теорема Безу. Корни многочлена. Формулы Виета

Рассмотрим деление многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - a)$. Поскольку степень делителя равна 1, то степень остатка, который мы получим, должна быть меньше 1, то есть в этом случае остатком будет некоторое число R. Таким образом, если разделить многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - a)$, то получим

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Это равенство выполняется тождественно, то есть при любом значении x. При $x = a$ имеем $f(a) = R$. Полученный результат называют теоремой Безу[1].

Теорема 1 (теорема Безу). ***Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $f(a)$ (то есть значению многочлена при $x = a$).***

Задача 1 Докажите, что $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ делится на $x - 1$ без остатка.

▶ Подставив в $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ вместо x значение 1, получаем: $f(1) = 0$. Таким образом, остаток от деления $f(x)$ на $(x - 1)$ равен 0, то есть $f(x)$ делится на $(x - 1)$ без остатка. ◁

Определение. ***Число α называют корнем многочлена $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$.***

Если многочлен $f(x)$ делится на $(x - \alpha)$, то α — корень этого многочлена.

[1] Безу Этьен (1730–1783) — французский математик, внесший значительный вклад в развитие теории алгебраических уравнений.

Действительно, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha)$, то $f(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ и поэтому $f(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot Q(\alpha)=0$. Таким образом, α — корень многочлена $f(x)$.

Справедливо и обратное утверждение. Оно является *следствием теоремы Безу*.

Теорема 2. ***Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится на двучлен $(x-\alpha)$ без остатка.***

По теореме Безу остаток от деления $f(x)$ на $(x-\alpha)$ равен $f(\alpha)$. Но по условию α — корень $f(x)$, таким образом, $f(\alpha)=0$.

Обобщением теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. ***Если многочлен $f(x)$ имеет попарно разные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то он делится без остатка на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$.***

Для доказательства используем метод математической индукции.

При $n=1$ утверждение доказано в теореме 2.

Допустим, что утверждение справедливо при $n=k$. То есть если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно разные корни многочлена $f(x)$, то он делится на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)$. Тогда

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)\cdot Q(x). \qquad (1)$$

Докажем, что утверждение теоремы справедливо и при $n=k+1$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ — попарно разные корни многочлена $f(x)$. Поскольку α_{k+1} — корень $f(x)$, то $f(\alpha_{k+1})=0$. Принимая во внимание равенство (1), которое выполняется согласно допущению индукции, получаем:

$$f(\alpha_{k+1})=(\alpha_{k+1}-\alpha_1)(\alpha_{k+1}-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\cdot Q(\alpha_{k+1})=0.$$

По условию все корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ разные, поэтому ни одно из чисел $\alpha_{k+1}-\alpha_1, \alpha_{k+1}-\alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}-\alpha_k$ не равно нулю. Тогда $Q(\alpha_{k+1})=0$. Таким образом, α_{k+1} — корень многочлена $Q(x)$. Тогда по теореме 2 многочлен $Q(x)$ делится на $(x-\alpha_{k+1})$, то есть $Q(x)=(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x)$ и из равенства (1) имеем

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})\cdot Q_1(x).$$

Это означает, что $f(x)$ делится на произведение

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1}),$$

то есть теорема доказана и при $n=k+1$.

Таким образом, теорема справедлива для любого натурального n.

Следствие. ***Многочлен степени n имеет не больше n разных корней.***

Допустим, что многочлен n-й степени имеет $(n+1)$ разных корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Тогда $f(x)$ делится на произведение $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\times\times(x-\alpha_{n+1})$ — многочлен степени $(n+1)$, но это невозможно. Поэтому многочлен n-й степени не может иметь больше чем n корней.

Пусть теперь многочлен n-й степени $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ имеет n разных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда этот многочлен делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1) \times (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. Это произведение является многочленом той же n-й степени. Таким образом, в результате деления можно получить только многочлен нулевой степени, то есть число. Таким образом,

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b\,(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n). \quad (2)$$

Если раскрыть скобки в правой части равенства (2) и приравнять коэффициенты при старших степенях, то получим, что $b = a_n$, то есть

$$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)} \quad (3)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (3), получаем соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями, которые называют **формулами Виета**:

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};\\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n};\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.\end{gathered}} \quad (4)$$

Например, при $n = 2$ имеем:

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},}$$

а при $n = 3$:

$$\boxed{\begin{gathered}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3};\\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3};\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}.\end{gathered}} \quad (5)$$

Выполнение таких равенств является необходимым и достаточным условием того, чтобы числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ были корнями многочлена

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Формулы (3) и (4) справедливы не только для случая, когда все корни многочлена $f(x)$ разные. Введем *понятие кратного корня многочлена*.

Если многочлен $f(x)$ делится без остатка на $(x - \alpha)^k$, но не делится без остатка на $(x - \alpha)^{k+1}$, то говорят, что число α является корнем кратности k многочлена $f(x)$.

Например, если произведение $(x + 2)^3(x - 1)^2(x + 3)$ записать в виде многочлена, то для этого многочлена число (-2) является корнем кратности 3, число 1 — корнем кратности 2, а число (-3) — корнем кратности 1.

При использовании формул Виета в случае кратных корней необходимо каждый корень записать такое количество раз, которое равно его кратности.

Задача 2 Проверьте справедливость формул Виета для многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

▶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x + 2) - 4(x + 2) = (x + 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x + 2)^2$. Поэтому $f(x)$ имеет корни: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$ (поскольку -2 — корень кратности 2).

Проверим справедливость формулы (5).

В нашем случае: $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -4$, $a_0 = -8$. Тогда

$$2+(-2)+(-2)=-\frac{2}{1};\quad 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)=\frac{-4}{1};\quad 2\cdot(-2)\cdot(-2)=-\frac{-8}{1}.$$

Как видим, все равенства выполняются, поэтому формулы Виета справедливы для данного многочлена. ◁

Задача 3 Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$.

▶ Обозначим корни уравнения $x^2 - 8x + 4 = 0$ через x_1 и x_2. Тогда корнями искомого уравнения должны быть числа $\alpha_1 = x_1^2$ и $\alpha_2 = x_2^2$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$, где

$$p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) = -\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right),\quad q = \alpha_1\alpha_2 = x_1^2x_2^2 = \left(x_1x_2\right)^2.$$

По формулам Виета имеем $x_1 + x_2 = 8$ и $x_1x_2 = 4$. Отсюда находим, что $q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16$, а $p = -\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = -(8^2 - 2\cdot 4) = -56$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид $x^2 - 56x + 16 = 0$. ◁

Упражнения

1. Найдите остаток от деления многочлена $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ на $x + 2$.
2. Найдите коэффициент a, зная, что остаток от деления многочлена $x^3 - ax^2 + 5x - 3$ на $x - 1$ равен 6.
3. Многочлен $f(x)$ при делении на $x - 1$ дает остаток 4, а при делении на $x - 3$ дает остаток 6. Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^2 - 4x + 3$.

4. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ делится без остатка на $x + 2$, а при делении на $x - 1$ имеет остаток, который равен 3?

5. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $3x^2 - 5x + 2$ равен $7x + 1$. Найдите остаток от деления этого многочлена на двучлены $x - 1$ и $3x - 2$.

6. Запишите формулы Виета при $n = 4$.

7. Составьте кубический многочлен, который имеет корни 5, −2, 1 и коэффициент при старшем члене −2. Решите задачу двумя способами.

8. При каких значениях a сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - (a + 2)x + 3a$ равна 12?

9. Какую кратность имеет корень 2 для многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$?

10. Составьте кубический многочлен, который имеет корень 3 кратности 2 и корень (−1), а коэффициент при старшем члене 2.

11. Найдите такие a и b, чтобы число 3 было корнем кратности не меньше чем 2 для многочлена $f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$.

12. Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$.

13. Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

14. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения $x^2 + 6x + 3 = 0$.

7.4. Схема Горнера

Делить многочлен $f(x)$ на двучлен $(x - a)$ иногда удобно с помощью специальной схемы, которую называют *схемой Горнера*.

Пусть многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ необходимо разделить на двучлен $(x - a)$. В результате деления многочлена n-й степени на многочлен первой степени получим некоторый многочлен $Q(x)$ $(n - 1)$-й степени (то есть $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, где $b_0 \neq 0$) и остаток R. Тогда $f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$, то есть

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (x - a) \cdot (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + R.$$

Левая и правая части полученного равенства тождественно равны, поэтому, перемножив многочлены, стоящие в правой части, можем приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x:

x^n	$a_0 = b_0$
x^{n-1}	$a_1 = b_1 - ab_0$
x^{n-2}	$a_2 = b_2 - ab_1$
....	....
x^1	$a_{n-1} = b_{n-1} - ab_{n-2}$
x^0	$a_n = R - ab_{n-1}$

Найдем из этих равенств коэффициенты b_0, b_1, ..., b_{n-1} и остаток R:
$b_0 = a_0$, $b_1 = ab_0 + a_1$, $b_2 = ab_1 + a_2$, ..., $b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$, $R = ab_{n-1} + a_n$.
Как видим, первый коэффициент неполного частного равен первому коэффициенту делимого. Остальные коэффициенты неполного частного и остаток находятся одинаково: для того чтобы найти коэффициент b_{k+1} неполного частного, достаточно предыдущий найденный коэффициент b_k умножить на a и добавить k-й коэффициент делимого. Эту процедуру целесообразно оформлять в виде специальной схемы-таблицы, которую называют *схемой Горнера*.

	a_0 $\oplus$	a_1 $\oplus$	a_2 $\oplus$	...	a_{n-1} $\oplus$	a_n
a $\otimes$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	...	b_{n-1}	R остаток

Задача 1 Разделите по схеме Горнера многочлен $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$ на двучлен $x - 2$.

▶ Запишем сначала все коэффициенты многочлена $f(x)$ (если в данном многочлене пропущена степень 2, то соответствующий коэффициент считаем равным 0), а потом найдем коэффициенты неполного частного и остаток по указанной схеме:

	3	−2	0	−4	1
2 $\otimes$	3 $\oplus$	4 $\oplus$	8 $\oplus$	12 $\oplus$	25 остаток

Таким образом, $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$. ◁

Задача 2 Проверьте, является ли $x = -3$ корнем многочлена
$$f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42.$$

▶ По теореме Безу остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$, поэтому найдем с помощью схемы Горнера остаток от деления $f(x)$ на $x - (-3) = x + 3$.

	2	6	4	−2	−42
−3	2	0	4	−14	0 (остаток $= f(-3)$)

Поскольку $f(-3) = 0$, то $x = -3$ — корень многочлена $f(x)$. ◁

Упражнения

1. Используя схему Горнера, найдите неполное частное и остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $B(x) = x + 1$;
2) $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$; $B(x) = x - 5$;
3) $A(x) = x^3 - 15x^2 + 10x + 24$; $B(x) = x + 3$.

2. Используя схему Горнера, проверьте, делится ли многочлен $f(x)$ на двучлен $q(x)$:
1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$; $q(x) = x + 2$;
2) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$; $q(x) = x - 2$.

3. Разделите многочлен $A(x)$ на двучлен $B(x)$:
1) $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$; $B(x) = x - 7$;
2) $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$; $B(x) = 2x - 1$.

7.5. Нахождение рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами

Теорема 4. ***Если многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$, то p является делителем свободного члена (a_0), а q — делителем коэффициента при старшем члене a_n.***

Если $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Подставляем $\frac{p}{q}$ вместо x в $f(x)$ и из последнего равенства имеем

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на q^n $(q \neq 0)$. Получаем

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (2)$$

В равенстве (2) все слагаемые, кроме последнего, делятся на p. Поэтому $a_0 q^n = -(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1})$ делится на p.

Но когда мы записываем рациональное число в виде $\frac{p}{q}$, то эта дробь считается несократимой, то есть p и q не имеют общих делителей. Произведение $a_0 q^n$ может делиться на p (если p и q — взаимно простые числа) только тогда, когда a_0 делится на p. Таким образом, p — делитель свободного члена a_0.

Аналогично все слагаемые равенства (2), кроме первого, делятся на q. Тогда $a_n p^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)$ делится на q. Поскольку p и q взаимно простые числа, то a_n делится на q, следовательно, q — делитель коэффициента при старшем члене.

Отметим два следствия из этой теоремы. Если взять $q = 1$, то корнем многочлена будет целое число p — делитель a_0. Таким образом, имеет место:

Следствие 1. ***Любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.***

Если в заданном многочлене $f(x)$ коэффициент $a_n = 1$, то делителями a_n могут быть только числа ± 1, то есть $q = \pm 1$, и имеет место:

Следствие 2. ***Если коэффициент при старшем члене уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни этого уравнения (если они существуют) — целые числа.***

Задача 1 Найдите рациональные корни многочлена $2x^3 - x^2 + 12x - 6$.

Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена. Тогда p необходимо искать среди делителей свободного члена, то есть среди чисел ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, а q — среди делителей старшего коэффициента: ± 1, ± 2.

Таким образом, рациональные корни многочлена необходимо искать среди чисел $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, $\pm\frac{3}{2}$, ± 2, ± 3, ± 6. Проверять, является ли данное число корнем многочлена, целесобразно с помощью схемы Горнера. При $x = \frac{1}{2}$ имеем следующую таблицу.

	2	−1	12	−6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

Кроме того, по схеме Горнера можно записать, что

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 + 12\right).$$

Многочлен $2x^2 + 12$ не имеет действительных корней (а тем более рациональных), поэтому заданный многочлен имеет единственный рациональный корень $x = \frac{1}{2}$. ◁

Задача 2 Разложите многочлен $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ на множители.

Ищем целые корни многочлена среди делителей свободного члена: ± 1, ± 2. Подходит 1. Делим $P(x)$ на $x - 1$ с помощью схемы Горнера.

	2	3	−2	−1	−2
1	2	5	3	2	0

Тогда $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$. Ищем целые корни кубического многочлена $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ среди делителей его свободного члена: ± 1, ± 2. Подходит (-2). Делим на $x + 2$.

	2	5	3	2
−2	2	1	1	0

Имеем $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$.

Квадратный трехчлен $2x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней и на линейные множители не раскладывается.

Ответ: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$. ◁

Отметим, что во множестве действительных чисел не всегда можно найти все корни многочлена (например, квадратный трехчлен $x^2 + x + 1$ не имеет действительных корней). Таким образом, многочлен n-й степени не всегда можно разложить на произведение линейных множителей. Но многочлен нечетной степени всегда можно разложить на произведение линейных и квадратных множителей, а многочлен четной степени — на произведение квадратных трехчленов.

Например, многочлен четвертой степени раскладывается на произведение двух квадратных трехчленов. Для нахождения коэффициентов этого разложения иногда можно применить *метод неопределенных коэффициентов*.

Задача 3 Разложите на множители многочлен $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6$.

▶ Попытка найти рациональные корни ничего не дает: многочлен не имеет рациональных (целых) корней.

Попытаемся разложить этот многочлен на произведение двух квадратных трехчленов. Поскольку старший коэффициент многочлена равен 1, то и у квадратных трехчленов возьмем старшие коэффициенты равными 1. То есть будем искать разложение нашего многочлена в виде:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d), \qquad (3)$$

где a, b, c и d — неопределенные (пока что) коэффициенты. Многочлены, стоящие в левой и правой частях этого равенства, тождественно равны, поэтому и коэффициенты при одинаковых степенях x у них равны. Раскроем скобки в правой части равенства и приравняем соответствующие коэффициенты. Это удобно записать так:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = x^4 + cx^3 + dx^2 + ax^3 + acx^2 + adx + bx^2 + bcx + bd.$$

Получаем систему

$$\left.\begin{array}{c|l} x^4 & 1 = 1, \\ x^3 & 1 = a + c, \\ x^2 & 3 = ac + b + d, \\ x^1 & 1 = bc + ad, \\ x^0 & 6 = bd. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Попытка решить эту систему методом подстановки приводит к уравнению 4-й степени, поэтому попробуем решить систему (4) в целых числах. Из последнего равенства системы (4) получаем, что b и d могут быть только делителями числа 6. Все возможные варианты запишем в таблицу.

b	1	−1	2	−2
d	6	−6	3	−3

Коэффициенты b и d в равенстве (3) равноправны, поэтому мы не рассматриваем случаи $b = 6$ и $d = 1$ или $b = -6$ и $d = -1$ и т. д.

Для каждой пары значений b и d из третьего равенства системы (4) найдем ac: $ac = 3 - (b + d)$, а из второго равенства имеем $a + c = 1$. Зная $a + c$ и ac, по теореме, обратной теореме Виета, находим a и c как корни квадратного уравнения. Найденные таким образом значения a, b, c, d подставим в четвертое равенство системы (4) $bc + ad = 1$, чтобы выбрать те числа, которые являются решениями системы (4). Удобно эти рассуждения оформить в виде таблицы:

b	1	−1	2		−2
d	6	−6	3		−3
$a + c = 1$	1	1	1		1
$ac = 3 - (b + d)$	−4	10	−2		8
a	нецелое	не существует	2	−1	не существует
c	нецелое	не существует	−1	2	не существует
$bc + ad = 1$	—	—	$bc + ad = 4$ $4 \neq 1$	$bc + ad = 1$ $1 = 1$	—

Как видим, системе (4) удовлетворяет набор целых чисел $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$. Тогда равенство (3) имеет вид

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \qquad (5)$$

Поскольку квадратные трехчлены $x^2 - x + 2$ и $x^2 + 2x + 3$ не имеют не только рациональных, но и действительных корней, то равенство (5) дает окончательный ответ. ◁

Упражнения

1. Найдите целые корни многочлена:
1) $x^3 - 5x + 4$; 2) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$;
3) $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$; 4) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$.

2. Найдите рациональные корни уравнения:
1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$; 4) $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$.

3. Разложите многочлен на множители:
1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$; 2) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
3) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 4) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$.

4. Найдите действительные корни уравнения:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

5*. Разложите многочлен на множители методом неопределенных коэффициентов:
1) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$; 2) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$.

6*. Разложите многочлен на множители, заранее записав его с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$:
1) $x^4 + 4x - 1$; 2) $x^4 - 4x^3 - 1$; 3) $x^4 + 4a^3x - a^4$.

§ 8 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Таблица 15

1. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак модуля

по определению

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ при } a > 0, \\ 0, \text{ при } a = 0, \\ -a, \text{ при } a < 0, \end{cases}$$

с использованием геометрического смысла

$|a|$ — *расстояние на числовой прямой от точки* 0 *до точки* a.

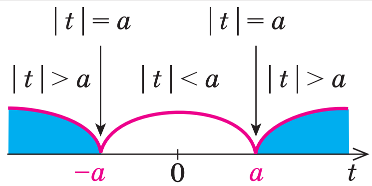
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

по общей схеме

1. **Найти ОДЗ.**
2. **Найти нули всех подмодульных функций.**
3. **Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки.**
4. **Найти решение в каждом промежутке (и проверить, входит ли это решение в рассматриваемый промежуток).**

с использованием специальных соотношений

2. Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **или** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **или** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **или** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Обобщение

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **или** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Продолжение табл. 15

3. Использование специальных соотношений
1. $\|u\| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $\|u\| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $\|u\| > \|v\| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. Тогда $\|u\| - \|v\| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов.*
5. $\|u\|+\|v\|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $\|u\|+\|v\|=-u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $\|u\| + \|v\| = \|u + v\| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $\|u\| + \|v\| = \|u - v\| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $\|x - a\| + \|x - b\| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$.

Объяснение и обоснование

Решать любое уравнение или неравенство, содержащее знак модуля можно одним из трех основных способов: по определению модуля, исходя из геометрического смысла модуля или по общей схеме. Некоторые уравнения или неравенства, содержащие знак модуля, могут быть также решены с использованием специальных соотношений (табл. 15).

В зависимости от выбранного способа решения получаем разные записи решения.

Задача Решите уравнение $|2x - 4| = 6$.

I способ (по определению модуля)

Решение	*Комментарий*
► 1) Если $$2x - 4 \geqslant 0, \quad (1)$$ то получаем уравнение $$2x - 4 = 6.$$ Тогда $x = 5$, что удовлетворяет и условию (1). 2) Если $$2x - 4 < 0, \quad (2)$$ то получаем уравнение $$-(2x - 4) = 6.$$ Тогда $x = -1$, что удовлетворяет и условию (2). *Ответ:* 5; −1. ◁	Чтобы раскрыть знак модуля по определению, рассмотрим два случая: $2x - 4 \geqslant 0$ и $2x - 4 < 0$. По определению *модулем положительного (неотрицательного) числа является само это число, а модулем отрицательного числа является противоположное ему число.* Поэтому при $2x - 4 \geqslant 0$ $\|2x - 4\| = 2x - 4$, а при $2x - 4 < 0$ $\|2x - 4\| = -(2x - 4)$. В каждом случае решаем полученное уравнение и выясняем, удовлетворяет ли каждый из найденных корней тому условию, при котором мы его находили.

II способ (использование геометрического смысла модуля)

Решение	*Комментарий*
$2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$, $2x = 10$ или $2x = -2$, $x = 5$ или $x = -1$. *Ответ:* 5; −1.	С геометрической точки зрения $\lvert 2x - 4 \rvert$ — это расстояние от точки 0 до точки $2x - 4$. По условию уравнения оно равно 6, но расстояние 6 может быть отложено от 0 как вправо (получаем число 6), так и влево (получаем число −6). Таким образом, равенство $\lvert 2x - 4 \rvert = 6$ возможно тогда и только тогда, когда $2x - 4 = 6$ или $2x - 4 = -6$.

Замечание. При решении уравнения с использованием геометрического смысла модуля знак модуля раскрывается неявно, то есть определение модуля в явном виде не применяется.

Общая схема решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, — это фактически немного измененный метод интервалов. Поясним содержание этой схемы на примере уравнения с двумя модулями вида

$$\lvert f(x) \rvert + \lvert g(x) \rvert = a \quad (a > 0).$$

- Чтобы решить это уравнение, необходимо раскрыть знаки модулей, а для этого необходимо знать, где функции $f(x)$ и $g(x)$ будут положительными, а где — отрицательными. То есть фактически мы должны решить неравенства

$$f(x) \gtreqless 0, \qquad (1)$$

$$g(x) \gtreqless 0. \qquad (2)$$

Каждое из этих неравенств мы умеем решать методом интервалов. Перестроим прием решения неравенств методом интервалов таким образом, чтобы он давал возможность одновременно решать каждое из последних неравенств. Как известно, решение неравенства (1) методом интервалов начинается с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции $f(x)$), а решение неравенства (2) — с нахождения его ОДЗ (то есть области определения функции $g(x)$). Чтобы начать одновременно решать оба неравенства, необходимо найти общую область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть **найти ОДЗ данного уравнения** (это и есть *первый из ориентиров* необходимой схемы). Чтобы продолжить решение неравенств $f(x) \gtreqless 0$ и $g(x) \gtreqless 0$ методом интервалов, необходимо найти нули функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть **найти нули всех подмодульных функций** (это и есть *второй ориентир*). Если далее применить схему метода интервалов одновременно для двух неравенств, необходимо **на ОДЗ отметить нули подмодульных функций и разбить ОДЗ на промежутки** (это *третий ориентир*).

В каждом из полученных промежутков знаки функций $f(x)$ и $g(x)$ не могут измениться. Тогда мы можем **найти знаки подмодульных функций на каждом промежутке** (в любой точке этого промежутка), **раскрыть знаки модулей и найти решение данного уравнения в каждом из этих промежутков** (это и есть *четвертый ориентир* общей схемы). ◁

Обоснование возможности применения приведенной схемы к решению неравенств, содержащих знак модуля, проводится аналогично.

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\left|\dfrac{x}{x-1}\right| + |x-2| = 2.$

▶ 1. ОДЗ: $x \neq 1$.

2. Нули подмодульных функций: $\dfrac{x}{x-1} = 0$ ($x = 0$) и $x - 2 = 0$ ($x = 2$).

3. Нули 0 и 2 разбивают ОДЗ на четыре промежутка, в которых подмодульные функции имеют знаки[1], показанные на рисунке 67.

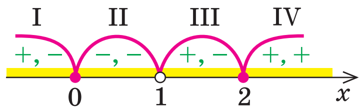


Рис. 67

4. Находим решения данного уравнения в каждом из промежутков (поскольку знаки подмодульных функций одинаковы на промежутках I и III, удобно для решения объединить эти промежутки).

<u>Промежутки I и III:</u> $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Учитывая знаки подмодульных функций на этих промежутках и определение модуля, получаем, что в этих промежутках данное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{x}{x-1} - (x-2) = 2$. Отсюда $x = 0$ или $x = 2$. В рассмотренные промежутки полученные значения не входят, таким образом, в этих промежутках корней нет.

<u>Промежуток II:</u> $x \in [0; 1)$. (Следует обратить внимание на то, чтобы не пропустить значение $x = 0$, которое принадлежит ОДЗ.) В этом промежутке получаем уравнение $-\dfrac{x}{x-1} - (x-2) = 2$. Отсюда $x = 0$ — корень, поскольку принадлежит этому промежутку.

<u>Промежуток IV:</u> $x \in [2; +\infty)$. (И в этом промежутке необходимо не забыть значение $x = 2$.) Получаем уравнение $\dfrac{x}{x-1} + x - 2 = 2$. Отсюда $x = 2$ — корень, поскольку принадлежит этому промежутку.

Объединяя все решения, которые мы получили в каждом промежутке, имеем решение данного уравнения на всей ОДЗ.

Ответ: 0; 2. ◁

---

[1] На рисунке 67 в каждом из промежутков первый знак — это знак функции $\dfrac{x}{x-1}$, а второй — знак функции $x - 2$. При выполнении рисунка удобно сначала отметить на числовой прямой ОДЗ, а потом нули подмодульных функций на ОДЗ.

Проиллюстрируем также получение и использование специальных соотношений, приведенных в таблице 15.

Обоснуем, например, соотношение 5: $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

● Запишем заданное равенство в виде $u + v = |u| + |v|$ и проанализируем его, опираясь на известные из 6 класса правила действий над числами с одинаковыми и с разными знаками. Чтобы сложить два числа u и v, мы сложили их модули, таким образом, эти числа имеют одинаковые знаки. Если бы эти числа были оба отрицательными, то и их сумма была бы тоже отрицательна, но $u + v = |u| + |v| \geqslant 0$. Тогда получаем, что числа u и v — оба неотрицательные. Наоборот, если $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \end{cases}$ то выполняется равенство $u + v = |u| + |v|$. Таким образом, действительно уравнение $|u| + |v| = u + v$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ ○

Задача 2* Решите уравнение $|x - 5| + |2x + 5| = 3x$.

Решение	*Комментарий*
▶ Поскольку $3x = (x - 5) + (2x + 5)$, то данное уравнение имеет вид $|u| + |v| = u + v$, но это равенство может выполняться тогда и только тогда, когда числа u и v — оба неотрицательные. Таким образом, данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \geqslant -\frac{5}{2}. \end{cases}$ Таким образом, $x \geqslant 5$. *Ответ:* $[5; +\infty)$. ◁	Если обозначить $x - 5 = u$ и $2x + 5 = v$, то $u + v = 3x$ и данное уравнение имеет вид $|u| + |v| = u + v$, а по соотношению 5 такое уравнение равносильно системе $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ Заметим, что данное уравнение можно решать и по общей схеме, но тогда решение будет более громоздким.

При решении *неравенств, содержащих знак модуля*, рассуждения, связанные с раскрытием знаков модулей, полностью аналогичны рассуждениям, которые использовались при решении уравнений, содержащих знак модуля.

Задача 3 Решите неравенство $|2x - 5| \leqslant 7$.

Решение	*Комментарий*
▶ Учитывая геометрический смысл модуля, получаем, что заданное неравенство равносильно неравенству	Неравенство вида $|f(x)| \leqslant a$ (где $a > 0$) удобно решать, используя геометрический смысл модуля.

$$-7 \leqslant 2x - 5 \leqslant 7. \qquad (1)$$

Тогда $-2 \leqslant 2x \leqslant 12$, таким образом,

$$-1 \leqslant x \leqslant 6.$$

Ответ: $[-1; 6]$. ◁

Поскольку заданное неравенство — это неравенство вида $|t| \leqslant 7$, а модуль числа — это расстояние на координатной прямой от точки, изображающей данное число, до точки 0, то заданному неравенству удовлетворяют все точки, находящиеся в промежутке $[-7; 7]$. Таким образом, $-7 \leqslant t \leqslant 7$. Если возникают затруднения с решением двойного неравенства (1), то его заменяют на равносильную систему $\begin{cases} 2x-5 \geqslant -7, \\ 2x-5 \leqslant 7. \end{cases}$

Задача 4 Решите неравенство

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1. \qquad (1)$$

▶ 1. ОДЗ: $|x - 2| - 1 \neq 0$. Тогда $|x - 2| \neq 1$, то есть $x - 2 \neq \pm 1$, таким образом: $x \neq 3$ или $x \neq 1$.

2. Нули подмодульных функций: $x - 3 = 0$ ($x = 3$ — не принадлежит ОДЗ) и $x - 2 = 0$ ($x = 2$).

3. Нуль 2 разбивает ОДЗ на четыре промежутка, на которых подмодульные функции имеют знаки, показанные на рисунке 68 (на каждом из промежутков первый знак — это знак функции $x - 3$, а второй — знак функции $x - 2$).

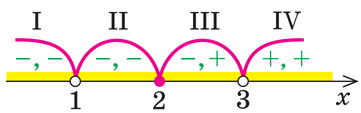


Рис. 68

4. Находим решения заданного неравенства в каждом из промежутков (поскольку знаки подмодульных функций являются одинаковыми на промежутках I и II, удобно для решения объединить эти промежутки).
<u>Промежутки I и II:</u> $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$. Учитывая знаки подмодульных функций в этих промежутках и определение модуля, получаем, что при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ заданное неравенство равносильно неравенству $\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geqslant 1$. Тогда $\frac{3-x}{1-x} \geqslant 1$, то есть $\frac{2}{1-x} \geqslant 0$. Отсюда $x < 1$.
В промежутки, которые мы рассмотрели, входят все значения $x < 1$, таким образом, в этом случае решением будет $x < 1$.
<u>Промежуток III:</u> $x \in [2; 3)$. На этом промежутке получаем неравенство $\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geqslant 1$, то есть $\frac{-(x-3)}{x-3} \geqslant 1$. Но при любом значении x из промежутка III последнее неравенство обращается в неверное неравенство ($-1 \geqslant 1$). Таким образом, в промежутке III неравенство (1) решений не имеет.

Промежуток IV: $x \in (3; +\infty)$. В этом промежутке получаем неравенство $\frac{x-3}{x-2-1} \geqslant 1$, то есть $\frac{x-3}{x-3} \geqslant 1$. Как видим, при любом x из IV промежутка неравенство (1) обращается в верное числовое неравенство $(1 \geqslant 1)$. Таким образом, решением неравенства (1) в IV промежутке есть любое число из этого промежутка $(x > 3)$.

Объединяя все решения, полученные в каждом из промежутков, имеем решение данного неравенства на всей ОДЗ: $x < 1$ или $x > 3$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Укажем, что для решения некоторых неравенств, содержащих знак модуля, удобно применять также специальные соотношения, приведенные в таблице 15.

Задача 5* Решите неравенство $\frac{(|x-1|-|x+3|)(|2x|-|x+6|)}{|1-x|-|x+2|} < 0.$

▶ Поскольку $|a| \geqslant 0$ и функция $y = t^2$ монотонно возрастает на множестве неотрицательных чисел, то все разности модулей в неравенстве можно заменить на разности их квадратов (то есть воспользоваться соотношением 4: $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$). Получаем неравенство, равносильное заданному

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2} < 0.$$

Раскладывая на множители все разности квадратов, имеем:

$$\frac{(-4)\,(2x+2)\,(x-6)\,(3x+6)}{(-1-2x)\,3} < 0.$$

Далее методом интервалов получаем $-2 < x < -1$ или $-\frac{1}{2} < x < 6$ (рис. 70).

Ответ: $-2 < x < -1$ или $-\frac{1}{2} < x < 6$ ◁

Общая схема, предложенная в таблице 15, может быть использована не только при решении уравнений или неравенств, содержащих знак модуля, но и при преобразовании выражений, содержащих знак модуля.

Например, для построения графика функции $f(x) = |x+1| + |x-1|$ удобно сначала по общей схеме раскрыть знаки модулей, а уже потом строить график функции $f(x)$.

Оформление решения подобного примера может быть таким.

Задача 6 Постройте график функции $f(x) = |x+1| + |x-1|$.

▶ 1. Область определения функции: все $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нули подмодульных функций: $x = -1$ и $x = 1$.
3. Отмечаем нули на области определения и разбиваем область определения на промежутки (на рисунке 71 также указаны знаки подмодульных функций в каждом из промежутков).

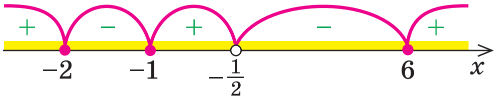


Рис. 70

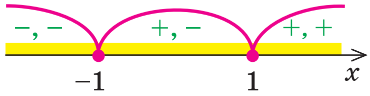


Рис. 71

4. Тогда

$$f(x)=\begin{cases}-(x+1)-(x-1), \text{ если } x\leqslant -1,\\ x+1-(x-1), \quad \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1+x-1, \quad \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$$

Таким образом, $f(x)=\begin{cases}-2x, \text{ если } x\leqslant -1,\\ 2, \quad \text{если } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, \quad \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$

Строим график этой функции (рис. 72).

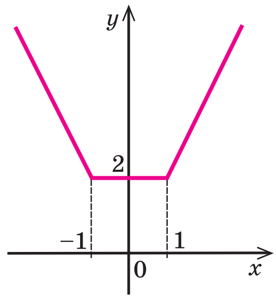


Рис. 72

Вопросы для контроля

1. Объясните, какими способами можно решать уравнения и неравенства, содержащие знак модуля. Проиллюстрируйте эти способы на примерах.
2. Обоснуйте специальные соотношения, приведенные в таблице 15. Проиллюстрируйте их применение к решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.
3. Обоснуйте обобщения использования геометрического смысла модуля, приведенные в таблице 15. Проиллюстрируйте их применение к решению уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

Упражнения

Решите уравнения и неравенства, содержащие знак модуля **(1–15)**.

1. 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.
2. 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.
3. 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.
4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$; 3) $|x+5|+|x-8|=13$.
5. 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$; 3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.
6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.
7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

16. Постройте график функции:
1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$.

§ 9 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

9.1. Решение уравнений и неравенств с параметрами

Если в запись уравнения или неравенства, кроме переменной и числовых коэффициентов, входят также буквенные коэффициенты — параметры, то при решении таких уравнений можно пользоваться следующим ориентиром.

Любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решения необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.

На этапе поиска плана решения уравнения или неравенства с параметрами или в ходе решения часто удобно сопровождать соответствующие рассуждения схемами, по которым легко проследить, в какой момент мы не смогли однозначно выполнить необходимые преобразования, на сколько случаев пришлось разбить решение и чем отличается один случай от другого. Чтобы на таких схемах (или в записях громоздких решений) не потерять какой-то ответ, целесообразно помещать окончательные ответы в прямоугольные рамки. Записывая окончательный ответ, следует учитывать, что ответ должен быть записан для всех возможных значений параметра.

Задача 1 Решите неравенство с переменной x: $3ax + 2 \geqslant x + 5a$.

Комментарий

Заданное неравенство является линейным относительно переменной x, поэтому используем известный алгоритм решения линейного неравенства:

1) переносим члены с переменной x в одну сторону, а без x — в другую:
$$3ax - x \geqslant 5a - 2;$$

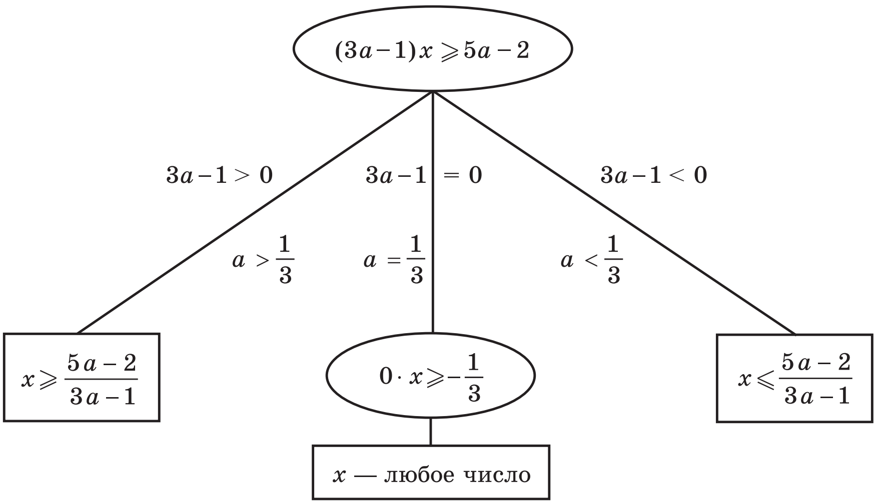
2) выносим в левой части за скобки общий множитель x (то есть приводим неравенство к виду $Ax \geqslant B$): $(3a - 1)\ x \geqslant 5a - 2$.

Для решения последнего неравенства мы хотели бы разделить обе его части на $(3a - 1)$. Но если обе части неравенства разделить на положительное число, то знак неравенства не изменится, а если на отрицательное, то знак неравенства необходимо изменить на противоположный. Кроме того, следует учесть, что на нуль делить нельзя. Следовательно, начиная с этого момента нужно рассмотреть три случая: $3a - 1 > 0$, $3a - 1 < 0$, $3a - 1 = 0$.

Приведенные выше рассуждения можно наглядно записать так:
$$3ax + 2 \geqslant x + 5a.$$

Решение

▶ $3ax - x \geqslant 5a - 2$



Ответ: 1) при $a > \frac{1}{3}$ $x \geqslant \frac{5a-2}{3a-1}$; 2) при $a < \frac{1}{3}$ $x \leqslant \frac{5a-2}{3a-1}$;

3) при $a = \frac{1}{3}$ x — любое число. ◁

При решении более сложных уравнений или неравенств следует помнить, что уравнения и неравенства с параметрами чаще всего решают с помощью равносильных преобразований, а все равносильные преобразования уравнений или неравенств выполняют на области допустимых значений (ОДЗ) заданного уравнения или неравенства (то есть на общей области определения для всех функций, которые входят в запись уравнения или неравенства). Поэтому, прежде чем записать ответ, *нужно обязательно учесть ОДЗ заданного уравнения или неравенства.*

Задача 2 Решите уравнение $\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$, где x — переменная.

Комментарий

Заданные дробные выражения существуют тогда и только тогда, когда знаменатели заданных дробей не равны нулю, следовательно, ОДЗ уравнения: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

Умножим обе части заданного уравнения на выражение $x\,(x-3)$ — общий знаменатель дробей — и получим целое уравнение, которое при условии $x\,(x-3) \neq 0$ (то есть на ОДЗ заданного уравнения) равносильно заданному: $x^2 = x\,(x-3) + a\,(x-3)$. Из этого уравнения получаем $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, то есть $ax - 3x = 3a$. Тогда $(a-3)\,x = 3a$.

Для того чтобы найти значение переменной x, хотелось бы разделить обе части последнего уравнения на $(a-3)$, но при $a = 3$ пришлось бы делить на 0, что невозможно. Следовательно, начиная с этого момента нужно рассмотреть два случая.

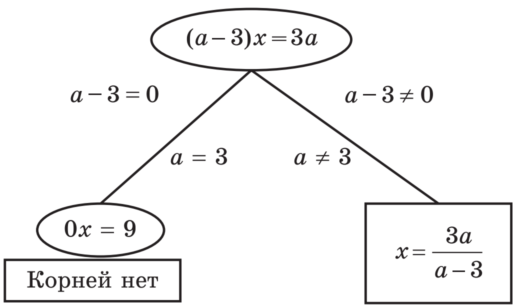
Решение в соответствии с приведенными выше рассуждениями можно наглядно записать в виде схемы.

$$\frac{x}{x-3}=1+\frac{a}{x}$$

Решение

▶ ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq 0$.

$x^2 = x\,(x-3) + a\,(x-3)$, $x^2 = x^2 - 3x + ax - 3a$, $ax - 3x = 3a$.



Выясним, при каких значениях a найденные корни не входят в ОДЗ уравнения, то есть при каких значениях a получаем $x = 3$ и $x = 0$.

$\frac{3a}{a-3}=3$, тогда $3a = 3\,(a-3)$, $3a = 3a - 9$ — решений нет. Следовательно, при всех значениях a корень $\frac{3a}{a-3}$ не равен 3.

$\frac{3a}{a-3}=0$, тогда $a = 0$. Следовательно, при $a = 0$ имеем $x = 0$ — посторонний корень (не входит в ОДЗ), то есть при $a = 0$ заданное уравнение не имеет корней.

Ответ: 1) при $a = 3$ и $a = 0$ корней нет; 2) при $a \neq 3$, $a \neq 0$ $x=\frac{3a}{a-3}$. ◁

Задача 3 Решите уравнение $\frac{ax-1}{x-a}=\frac{4}{x}$ относительно переменной x.

Комментарий

Будем выполнять равносильные преобразования заданного уравнения. Для этого найдем его ОДЗ (знаменатели дробей не равны нулю). Если теперь обе части уравнения умножить на произведение выражений, которые стоят в знаменателях дробей (и которое не равно нулю на ОДЗ уравнения), то получим уравнение $ax^2 - 5x + 4a = 0$, равносильное заданному (на ОДЗ заданного). Но последнее уравнение будет квадратным только при $a \neq 0$, потому для его решения следует рассмотреть два случая ($a = 0$ и $a \neq 0$).

Если $a \neq 0$, то для исследования полученного квадратного уравнения нужно рассмотреть еще три случая: $D = 0$, $D < 0$, $D > 0$ — и в каждом из них проверить, входят найденные корни в ОДЗ или нет. При $D = 0$ удобно использовать, что значение корня соответствующего квадратного уравнения совпадает с абсциссой вершины параболы $y = ax^2 - 5x + 4a$, то есть $x=x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2a}$. Рассматривая случай $D > 0$, следует помнить также предыдущее ограничение: $a \neq 0$.

Поскольку корни уравнения (1) записываются достаточно громоздкими формулами (см. решение), то вместо подстановки полученных корней в ограничение ОДЗ можно подставить «запрещенные» значения x в уравнение (1) и выяснить, при каких значениях параметра a мы получим те значения x, которые не входят в ОДЗ, а затем проверить полученные значения параметра.

Решение

▶ ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq a$. На этой ОДЗ заданное уравнение равносильно уравнениям: $ax^2 - x = 4x - 4a$,

$$ax^2 - 5x + 4a = 0. \qquad (1)$$

1. Если $a = 0$, то из уравнения (1) получаем $x = 0$ — не входит в ОДЗ, следовательно, при $a = 0$ корней нет.
2. Если $a \neq 0$, то уравнение (1) — квадратное. Его дискриминант $D = 25 - 16a^2$. Рассмотрим три случая:

1) $D = 0$, то есть $25 - 16a^2 = 0$, $a=\pm\frac{5}{4}$. Тогда уравнение (1) имеет одно значение корня: $x=\frac{5}{2a}$. Если $a=\frac{5}{4}$, то корень $x = 2$ уравнения (1)

входит в ОДЗ и является корнем заданного уравнения. Если $a=-\frac{5}{4}$, то корень $x = -2$ уравнения (1) тоже входит в ОДЗ и является корнем заданного уравнения.

2) $D < 0$, то есть $25 - 16a^2 < 0$, следовательно, $a<-\frac{5}{4}$ или $a>\frac{5}{4}$. Тогда уравнение (1) не имеет корней.

3) $D > 0$, то есть $25 - 16a^2 > 0$, следовательно, $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, но $a \neq 0$. Тогда уравнение (1) имеет два корня:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}. \qquad (2)$$

Выясним, при каких значениях a найденные корни не входят в ОДЗ, то есть при каких значениях a получаем $x = 0$ и $x = a$.

Подставляя в уравнение (1) $x = 0$, получаем $a = 0$, но при $a = 0$ заданное уравнение не имеет корней.

Подставляя в уравнение (1) $x = a$, получаем $a^3 - 5a + 4a = 0$, то есть $a^3 - a = 0$, $a\,(a^2 - 1) = 0$. Тогда $a = 0$ (заданное уравнение не имеет корней), или $a = \pm 1$. Проверим эти значения a.

При $a = 1$ ОДЗ записывается так: $x \neq 0$, $x \neq 1$. Из формулы корней (2) имеем $x_1 = 4$ (входит в ОДЗ) и $x_2 = 1$ (не входит в ОДЗ). Следовательно, при $a = 1$ заданное уравнение имеет только один корень: $x = 4$.

При $a = -1$ ОДЗ записывается так: $x \neq 0$, $x \neq -1$, а из формулы корней (2) получим: $x_1 = -4$ (входит в ОДЗ) и $x_2 = -1$ (не входит в ОДЗ). Следовательно, при $a = -1$ заданное уравнение имеет только один корень: $x = -4$.

Таким образом, формулу корней (2) можно использовать, если $-\frac{5}{4}<a<\frac{5}{4}$, только при $a \neq 0$ и $a \neq \pm 1$.

Ответ: 1) если $a=\frac{5}{4}$, то $x = 2$;

2) если $a=-\frac{5}{4}$, то $x = -2$;

3) если $a = 1$, то $x = 4$;

4) если $a = -1$, то $x = -4$;

5) если $a\in\left(-\frac{5}{4};\ -1\right)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup\left(1;\ \frac{5}{4}\right)$, то $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16a^2}}{2a}$;

5) если $a\in\left(-\infty;\ \frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{4};\ +\infty\right)$ или $a = 0$, то корней нет. ◁

Замечание. Чтобы облегчить запись ответа в этом и аналогичных примерах, можно пользоваться таким приемом. *Перед записью ответа в сложных или громоздких случаях изобразим ось параметра (a)* *и отметим на ней все особые значения параметра, которые появились в процессе решения. Под осью параметра (левее от нее) выпишем все полученные решения (кроме решения «корней нет») и напротив каждого ответа отметим, при каких значениях параметра этот ответ можно использовать* (рис. 73). *После этого ответ записывают для каждого из особых значений параметра и для каждого из полученных промежутков оси параметра.* В частности, перед записью ответа в рассмотренном примере, на черновике удобно изобразить такую схему (рис. 73).

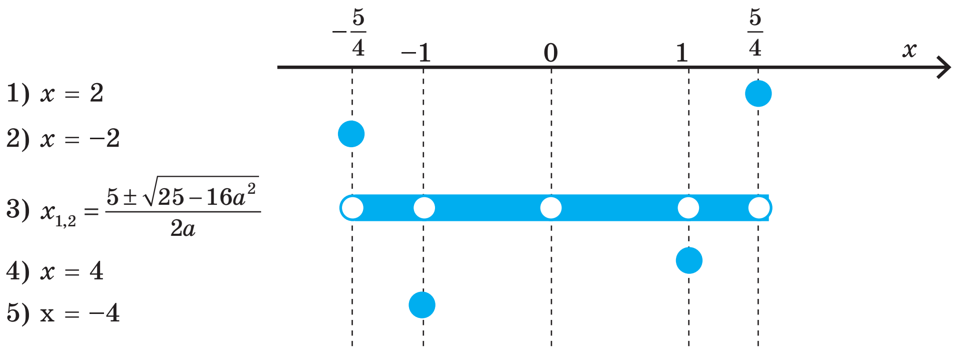


Рис. 73

7.2. Исследовательские задачи с параметрами

Некоторые исследовательские задачи с параметрами удается решить по такой схеме: 1) *решить заданное уравнение или неравенство;* 2) *исследовать полученное решение.*

Задача 1 Найдите все значения a, при которых уравнение $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7} = 0$ имеет единственный корень.

Решение	*Комментарий*
▶ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ получаем равносильное уравнение $(x + a)(x - 5a) = 0.$ Тогда $x + a = 0$ или $x - 5a = 0$. Получаем $x = -a$ или $x = 5a$. Учтем ОДЗ. Для этого выясним, когда $x = -7$: $-a = -7$ при $a = 7$, $5a = -7$ при $a = -\frac{7}{5}$. Тогда при $a = 7$ получаем: $x = -a = -7$ — посторонний корень; $x = 5a = 35$ — единственный корень.	Поскольку дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, то на ОДЗ ($x + 7 \neq 0$) заданное уравнение равносильно уравнению $(x + a)(x - 5a) = 0$. Дальше учитываем, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю (а второй имеет смысл). После этого выясним, при каких значениях a найденные корни не

При $a=-\frac{7}{5}$ получаем: $x = 5a = -7$ — посторонний корень; $x=-a=\frac{7}{5}$ — единственный корень. Также заданное уравнение будет иметь единственный корень, если $-a = 5a$, то есть при $a = 0$ (тогда $x = -a = 0$ и $x = 5a = 0 \neq -7$).

Ответ: $a = 7$, $a=-\frac{7}{5}$, $a = 0$. ◁

входят в ОДЗ, то есть $x = -7$: приравниваем корни к -7 и находим соответствующие значения a. При найденных значениях a один из двух полученных корней будет посторонним ($x = -7$), и уравнение будет иметь единственный корень (одно значение корня). Кроме того, заданное уравнение будет иметь единственный корень еще и в том случае, когда два полученных корня ($x = -a$ и $x = 5a$) будут совпадать (и, конечно, будут входить в ОДЗ).

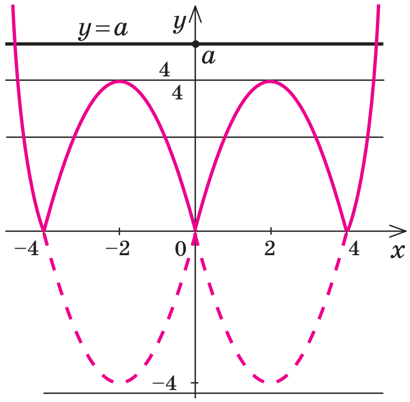
Исследование количества решений уравнений и их систем. При решении некоторых задач с параметрами можно пользоваться таким ориентиром: *если в задаче с параметрами речь идет о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа заданной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения.*

Наиболее простым соответствующее исследование является в том случае, когда заданное уравнение можно преобразовать к виду $f(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a). Отметим, что, заменяя заданное уравнение на уравнение $f(x) = a$, нужно следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и заданное, а следовательно, и количество корней у них будет одинаковым. Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a. (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

Задача 2 Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 4|x|| = a$ в зависимости от значения параметра a?

Решение	*Комментарий*
► Построим графики функций $y = \|x^2 - 4\|x\|\|$ и $y = a$. Анализируя взаимное размещение полученных графиков, получаем *ответ*: 1) при $a < 0$ уравнение корней не имеет;	Поскольку в этом задании речь идет о количестве решений уравнения, то для анализа заданной ситуации попробуем использовать графическую иллюстрацию решения. 1. Строим график функции $y = \|x^2 - 4\|x\|\|$

2) при $a = 0$ уравнение имеет 3 корня;
3) при $0 < a < 4$ уравнение имеет 6 корней;
4) при $a = 4$ уравнение имеет 4 корня;
5) при $a > 4$ уравнение имеет 2 корня.



◁

(учитывая, что $x^2 = |x|^2$, построение может происходить, например, по таким этапам:

$$x^2 - 4x \to |x|^2 - 4|x| \to$$
$$\to |x^2 - 4|x||).$$

2. Строим график функции $y = a$.
3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков и записываем ответ (количество корней уравнения $f(x) = a$ равно количеству точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$).

Отметим, что значительное количество исследовательских заданий не удается решить путем непосредственных вычислений (или такие вычисления являются очень громоздкими). Поэтому часто приходится сначала обосновывать какое-то свойство заданного уравнения или неравенства, а затем, пользуясь этим свойством, уже давать ответ на вопрос задачи.

Например, принимая во внимание четность функций, которые входят в запись заданного уравнения, можно использовать такой ориентир.

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является четной или нечетной, то вместе с каждым корнем α мы можем указать еще один корень этого уравнения $(-\alpha)$.

Задача 3 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

Решение	*Комментарий*
▶ Функция $f(x) = x^4 - a|x|^3 + a^2 - 4$ является четной ($D(f) = \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$). Если $x = \alpha$ — корень уравнения (1), то $x = -\alpha$ тоже является корнем этого уравнения. Поэтому единственный корень у заданного уравнения может быть только тогда,	Замечаем, что в левой части заданного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир, приведенный выше. Действительно, если $x = \alpha$ — корень уравнения $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — правильное числовое равенство. Учитывая

когда $\alpha = -\alpha$, то есть $\alpha = 0$. Следовательно, единственным корнем заданного уравнения может быть только $x = 0$. Если $x = 0$, то из уравнения (1) получаем $a^2 - 4 = 0$, тогда $a = 2$ или $a = -2$. При $a = 2$ уравнения (1) превращается в уравнение $x^4 - 2\,|\,x\,|^3 = 0$. Тогда $|x|^4 - 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| - 2) = 0$. Получаем $|x|^3 = 0$ (тогда $|x| = 0$, то есть $x = 0$) или $|x| - 2 = 0$ (тогда $|x| = 2$, то есть $x = \pm 2$).
Следовательно, при $a = 2$ уравнение (1) имеет три корня и условие задачи не выполняется. При $a = -2$ уравнение (1) превращается в уравнение $x^4 + 2\,|x|^3 = 0$. Тогда $|x|^4 + 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| + 2) = 0$. Поскольку $|x| + 2 \neq 0$, то получаем $|x|^3 = 0$. Тогда $|x| = 0$, то есть $x = 0$ — единственный корень. Следовательно, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.
Ответ: $a = -2$. ◁

четность функции $f\,(x)$, имеем $f\,(-\alpha) = f\,(\alpha) = 0$. Следовательно, $x = -\alpha$ — тоже корень уравнения $f\,(x) = 0$. Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни α и $-\alpha$ совпадают. Тогда $x = \alpha = -\alpha = 0$.

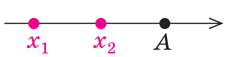
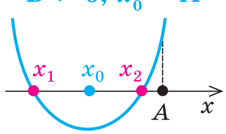
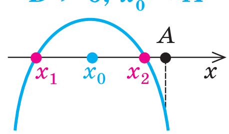
Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). (Это значение $a = 2$ и $a = -2$.)

Поскольку значение $a = 2$ и $a = -2$ мы получили из условия, что $x = 0$ — корень уравнения (1), то необходимо проверить, на самом ли деле при этих значениях a заданное уравнение будет иметь единственный корень. При решении полученных уравнений целесообразно использовать, что $x^4 = |\,x\,|^4$.

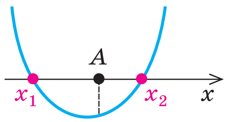
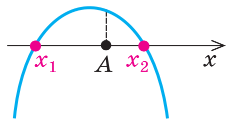
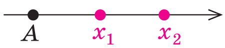
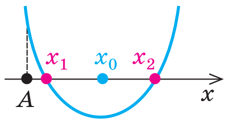
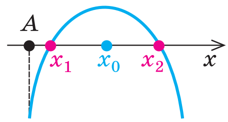
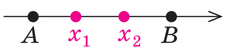
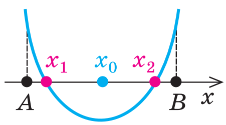
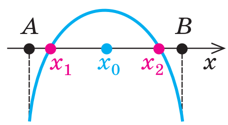
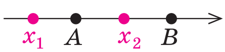
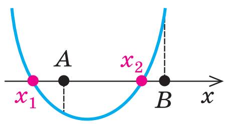
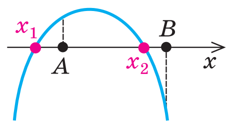
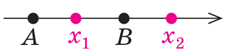
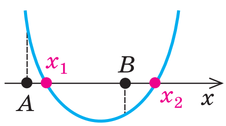
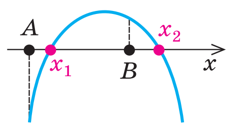
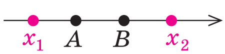
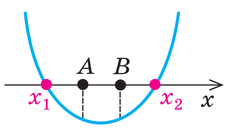
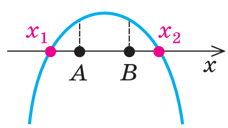
9.3. Использование условий расположения корней квадратного трехчлена $f\,(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ относительно заданных чисел A и B

Решение некоторых исследовательских задач с параметрами можно свести к использованию необходимых и достаточных условий расположения корней квадратного трехчлена. Основные из этих условий приведены в таблице 16 (в таблице использованы традиционные обозначения: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$).

Таблица 16

<table>
<tr><th rowspan="2">Расположение корней</th><th colspan="3">Необходимые и достаточные условия расположения корней</th></tr>
<tr><th>при $a > 0$</th><th>при $a < 0$</th><th>в общем случае ($a \neq 0$)</th></tr>
<tr><td>1. $x_1 < A$
$x_2 < A$
</td><td>$f\,(A) > 0$
$D \geqslant 0;\ x_0 < A$
</td><td>$f\,(A) < 0$
$D \geqslant 0;\ x_0 < A$
</td><td>$\begin{cases} a \cdot f\,(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < A \end{cases}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 16

Расположение корней	Необходимые и достаточные условия расположения корней		
	при $a > 0$	при $a < 0$	в общем случае ($a \neq 0$)
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
3. $x_1 > A$ $x_2 > A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$ 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0;\ x_0 > A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > A \end{cases}$
4. $A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ $D \geqslant 0;\ A < x_0 < B$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \\ D \geqslant 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$
5. $x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
6. $A < x_1 < B$ $x_2 > B$ 	$f(A) > 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) < 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
7. $x_1 < A$ $x_2 > B$ 	$f(A) < 0;\ f(B) < 0$ 	$f(A) > 0;\ f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

Объяснение и обоснование

Для обоснования указанных условий достаточно воспользоваться тем, что график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ — сплошная (неразрывная[1]) линия. Если такая функция на концах какого-то промежутка принимает значения с разными знаками (то есть соответствующие точки графика находятся в разных полуплоскостях относительно оси Ox), то внутри этого промежутка есть по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю (рис. 74).

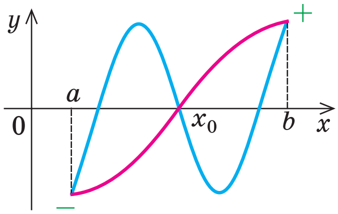


Рис. 74

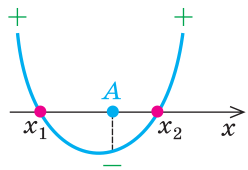


Рис. 75

Например, *для того чтобы два различных корня квадратного трехчлена* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *при* $a > 0$ *были расположены по разные стороны от заданного числа A, достаточно зафиксировать только одно условие*: $f(A) < 0$ (рис. 75).

- Действительно, график квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ — парабола, ветки которой направлены вверх. Тогда в случае, когда аргумент x стремится к $+\infty$ или к $-\infty$ (это обозначают обычно так: $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ $(f(x) \to +\infty)$, следовательно, $f(x) > 0$ при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$. Если выполняется условие $f(A) < 0$, то с изменением значения аргумента x от A до $+\infty$ квадратичная функция $f(x)$ изменяет свой знак с «–» на «+», таким образом, $f(x)$ имеет по крайней мере один корень $x_2 > A$.
  Точно так же с изменением значения аргумента x от $-\infty$ до A квадратичная функция $f(x)$ изменяет свой знак с «+» на «–», следовательно, $f(x)$ имеет по крайней мере один корень $x_1 < A$. Но квадратный трехчлен $f(x)$ не может иметь более двух корней, значит, при $a > 0$ условие $f(A) < 0$ необходимое и достаточное для того, чтобы два различных корня квадратного трехчлена были расположены по разные стороны от заданного числа A.

Аналогичные рассуждения при $a < 0$ показывают, что для выполнения этого требования необходимо и достаточно, чтобы $f(A) > 0$. Эти два условия можно объединить в одно: $a \cdot f(A) < 0$.

---

[1] Соответствующее свойство будет обосновано более строго в 11 классе при рассмотрении так называемых непрерывных функций.

Действительно, $a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$ Следовательно,

квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) имеет два различных корня, которые расположены по разные стороны от заданного числа A, тогда и только тогда, когда выполняется условие $a \cdot f(A) < 0$.

Аналогично можно обосновать и другие условия, приведенные в таблице 16.

Заметим, что приведенные условия не обязательно запоминать: для их записи можно пользоваться графиком квадратичной функции (изображенным для нужного расположения корней) и таким ориентиром.

Для того чтобы корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) были расположены заданным образом относительно данных чисел A и B, необходимо и достаточно выполнения системы условий, которая включает:

1) *знак коэффициента при старшем члене*;
2) *знаки значений $f(A)$ и $f(B)$;*
3) *знак дискриминанта D*;
4) *положение абсциссы вершины параболы $\left(x_0 = -\dfrac{b}{2a}\right)$ относительно данных чисел A и B*.

Отметим, что для случаев, в которых хотя бы одно из данных чисел расположено между корнями квадратного трехчлена (см. вторую, пятую, шестую и седьмую строки табл. 16), достаточно выполнения первых двух условий этого ориентира, а для других случаев приходится рассматривать все четыре условия. Заметим также, что, записывая каждое из указанных условий, следует выяснить, будет ли выполняться требование задачи в том случае, когда в этом условии будет записан знак нестрогого неравенства.

Задача 1 Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $ax^2 - x + 3a = 0$ имеет один корень больше двух, а второй — меньше единицы.

Комментарий

Поскольку заданное уравнение имеет два различных корня, то оно квадратное (то есть $a \neq 0$). Тогда $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 12a^2}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 12a^2}}{2a}$ и, чтобы получить ответ на вопрос задачи, достаточно решить совокупность из двух систем иррациональных неравенств: $\begin{cases} x_1 > 2, \\ x_2 < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 < 1, \\ x_2 > 2. \end{cases}$ Но такой путь решения достаточно громоздкий.

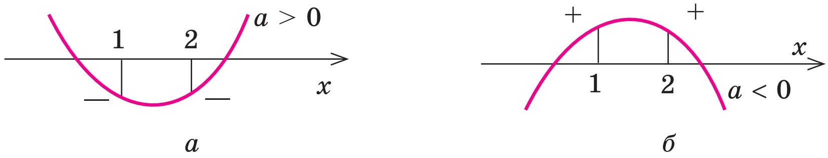


Рис. 76

Попробуем воспользоваться условиями расположения корней квадратного трехчлена. Для этого можно непосредственно использовать соответствующие условия, зафиксированные в таблице 16, или получить их с помощью предложенного ориентира. В частности, обозначим $f\,(x) = ax^2 - x + 3a$ и изобразим график квадратичной функции $f\,(x)$ (параболу) в таких положениях, которые удовлетворяют условию задачи (рис. 76, *а* и *б*).

Для того чтобы корни квадратного трехчлена располагались по разные стороны от чисел 1 и 2, необходимо и достаточно выполнения совокупности условий: $\begin{cases} a > 0, \\ f\,(1) < 0, \\ f\,(2) < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a < 0, \\ f\,(1) > 0, \\ f\,(2) > 0. \end{cases}$ Замечаем, что в этих системах знаки a и $f\,(1)$, а также a и $f\,(2)$ противоположны, поэтому полученную совокупность систем можно заменить одной равносильной системой $\begin{cases} a\,f\,(1) < 0, \\ a\,f\,(2) < 0, \end{cases}$ которая и позволяет получить план решения задачи.

Решение

▶ Поскольку заданное уравнение имеет два различных корня, то оно является квадратным (то есть $a \neq 0$). Обозначим $f\,(x) = ax^2 - x + 3a$. Как известно, корни квадратного трехчлена будут располагаться по разные стороны от данных чисел 1 и 2 тогда и только тогда, когда выполняется система условий: $\begin{cases} a\,f\,(1) < 0, \\ a\,f\,(2) < 0. \end{cases}$

Получаем систему
$$\begin{cases} a\,(4a - 1) < 0, & (1) \\ a\,(7a - 2) < 0. & (2) \end{cases}$$

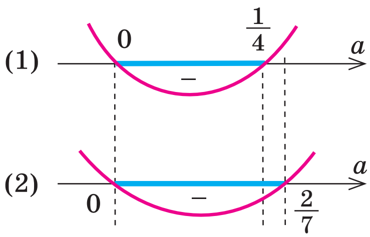


Рис. 77

Решаем неравенства (1) и (2) и находим общее решение системы (рис. 77).

Ответ: заданное уравнение имеет один корень больше двух, а второй — меньше единицы при $a \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$. ◁

Упражнения

Решите уравнения и неравенства с переменной x (1–3).

1. 1) $5ax - a = ax + a$; 2) $4 - ax = 2x + 7a$;
3) $ax + 7a \leqslant ax + 8a$; 4) $2a - 6x > 2ax + 11$.

2. 1) $|x - 2| + |x + 1| = ax + 3$; 2) $|x - a| + |x| = 2$;
3) $|a - x| + |x + a + 1| = 1$.

3. 1) $ax+1=\frac{9a+3}{x}$; 2) $2ax-1=\frac{4a-1}{x-1}$; 3) $\frac{ax+1}{x+a}=\frac{2}{x}$.

4. Найдите все значения a, при которых заданное уравнение имеет единственный корень: 1) $\frac{(x-a)(x-2a)}{x-4}=0$; 2) $\frac{(x+2a)(x-6a)}{x+12}=0$.

5. Найдите все значения a, при которых заданное уравнение имеет единственный корень:
1) $x^8 + ax^6 + a^2 + 4a = 0$; 2) $x^4 + ax^2 + a^2 - a = 0$.

6. Для каждого значения параметра b найдите число корней уравнения $2x^2 + 10x + |6x + 30| = b$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 2ax| = 1$ имеет ровно три различных корня.

8. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 + 2x + a| = 2$ имеет четыре различных корня.

9. Найдите наибольшее значение параметра k, при котором оба корня уравнения $x^2 + (2k + 6)x + 4k + 12 = 0$ больше -1.

10. Найдите все значения параметра m, для которых уравнение $(m - 2)x^2 - 2(m + 3)x + 4m = 0$ имеет один корень больше 3, а второй меньше 2.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 1

1. Определите сумму корней уравнения:
1) $|x + 5| = 7$; 2) $|2x - 1| = 5$;
3) $|x + 7| = 2$; 4) $|4x - 8| + |2 - x| = 4$;
5) $2|x - 3| - |3 - x| = 5$; 6) $5|x + 4| - 2|4 - x| = 4$.

2. Определите $x + y$, если:
1) $|x - y| + |4 - x| = 0$; 2) $|2x - y| + 2|2 - x| = 0$.

3. Определите xy, если:
1) $|x - 2| + 4x^2 - 4xy + y^2 = 0$; 2) $|y - 1| + x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

4. Найдите количество целых решений неравенства:
1) $|x - 1| \leqslant 2$; 2) $|x + 2| \leqslant 4$; 3) $|x - 3| \leqslant 6$; 4) $|x + 4| < 5$.

5. Найдите количество целых решений неравенства в промежутке $[-5; 5]$:
1) $|x + 2| \geqslant 3$; 2) $|x - 1| \geqslant 4$; 3) $|x - 2| \geqslant 3$; 4) $|2x - 1| \geqslant 3$.

6. Определите наибольшее целое решение неравенства:
1) $|3x - 1| < 2x + 2$; 2) $|2 - 3x| - x \leqslant 8$; 3) $|7 - 3x| - 2x \leqslant 2$.

7. Определите наименьшее целое решение неравенства:
1) $|1 - 2x| - x \leqslant 10$; 2) $|3x - 2| + 2x \leqslant 8$; 3) $|4x - 4| + 4x \geqslant 5$.

8. Определите наименьшее решение неравенства:
1) $|3x + 1| \leqslant x + 7$; 2) $|2x + 3| \leqslant x + 12$; 3) $|4x + 3| \leqslant x + 21$.

9. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $|2x - 1| = 1 - 4a$; 2) $|3x + 2| = 3 - 4a$.

10. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $|2x - 1| = 4a + 1$; 2) $|3x + 3| = 5a - 7$.

11. Найдите наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $2|x - 3| - a|3 - x| = 5$; 2) $3|x - 2| + a|2 - x| = -4$.

12. Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет решение:
1) $8|x - 3| + a|3 - x| = 5$; 2) $3|x - 2| - a|2 - x| = -6$.

13. Определите значение параметра m, при котором имеет точно четыре корня:
1) $|x(|x| - 5)| = m$; 2) $|(x + 1)(|x + 1| - 3)| = m$;
3) $|2(5 - |x|x)| = m$.

14. При каком наименьшем целом значении параметра m уравнение $x^2 - |16x - 48| = m$ имеет четыре корня?

15. При каком значении параметра m уравнение $x^2 - |14x - 28| = m$ имеет единственный корень?

16. Укажите, сколько всего действительных корней имеет уравнение $x^3 - 3|x| = 0$.

17. Найдите все значения параметра a, при которых данная система уравнений имеет единственное решение:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ x \cdot y = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ (x-7)^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 4, \\ |y| = 1 - |x - 12 \end{cases}$

Решите задачи (18–29) на составление уравнений или неравенств и их систем.

18. Рабочий должен был по плану изготовить за несколько дней 72 детали. Так как каждый день он изготавливал на 2 детали меньше плана, то закончил работу через 3 дня после запланированного срока. Сколько деталей в день должен был изготовлять рабочий по плану?

19. Три одинаковых комбайна, работая вместе, собрали урожай с первого поля, а затем два из них собрали урожай со второго поля (другой площади). Вся работа заняла 12 часов. Если бы три комбайна выполнили половину всей работы, а затем оставшуюся часть сделал один из них, то работа заняла бы 20 часов. За какое время два комбайна могут собрать урожай с первого поля?

20. Производительность первого станка на 25 % больше производительности второго станка. На втором станке изготовлено деталей на 4 % больше, чем на первом. На сколько процентов время, затраченное работником на изготовление деталей на втором станке, больше времени, необходимого для этой работы на первом станке?

21. Первая труба наполняет бассейн водой в два раза быстрее, чем вторая. Если половину бассейна наполнить через первую трубу, а оставшуюся часть — через вторую, то для наполнения бассейна потребуется 6 час. За сколько часов можно наполнить бассейн водой только через первую трубу?

22. Два велосипедиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B, расстояние между которыми 30 км, и встречаются через час. Не останавливаясь, они продолжают путь с той же скоростью, и первый прибывает в пункт B на 1,5 часа раньше, чем второй в пункт A. Определить скорость первого велосипедиста.

23. В течение 7 ч 20 мин судно прошло вверх по реке 35 км и вернулось обратно. Скорость течения равна 4 км в час. С какой скоростью судно шло по течению?

24. Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

25. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

26. Найдите такое двузначное число, в котором число его единиц на два больше числа десятков, а произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

27. Около дома посажены березы и липы, причем общее их количество более 14. Если количество лип увеличить вдвое, а количество берез увеличить на 18, то берез станет больше. Если увеличить вдвое количество берез, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько берез и сколько лип было посажено?

28. Группу людей пытались построить в колонну по 8 человек в ряд, но один ряд оказался неполным. Когда ту же группу людей построили по 7 человек в ряд, то все ряды оказались полными, а число рядов оказалось на 2 больше. Если бы тех же людей построили по 5 человек в ряд, то рядов было бы еще на 7 больше, причем один ряд был бы неполным. Сколько людей было в группе?

29. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1 грн. 50 коп., роза — 2 грн. На покупку гвоздик и роз можно потратить не более 30 грн. 50 коп. При этом количество гвоздик не должно отличаться от количества роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Напомним, что алгебра — раздел математики, посвященный изучению буквенных выражений и уравнений. Долгое время алгебра была частью науки о числе — арифметики. Значительное количество задач, возникающих в процессе практической деятельности человека, решают одинаковыми способами. Используя вместо чисел буквы, математики научились решать такие задачи в общем виде. Так и образовалась математическая наука — алгебра.

Исторически зачатки алгебры были известны вавилонянам, египтянам и грекам задолго до нашей эры. Сохранился египетский папирус Ахмеса (XVII в. до н. э.) с решением алгебраических задач. Ученые Вавилона (более 4000 лет назад) умели находить приближенное значение квадратного корня из любого натурального числа, а также решать квадратные уравнения. Это было связано с решением задач на нахождение площадей земельных участков и с развитием астрономии. Однако у вавилонян еще не было понятия отрицательного числа, и поэтому корень квадратного уравнения мог быть только положительным.

Диофант, греческий математик, живший в III в. в Александрии, написал трактат «Арифметика», в котором он уже решал линейные и другие уравнения. В Средние века особенно активно алгебра развивалась в арабских странах и Средней Азии.

Задачи, связанные с квадратными уравнениями, можно найти и в трудах индийских математиков V в. Квадратные уравнения классифицировал в трактате «Алгебра» аль-Хорезми. Он же привел и способы их решения.

В течение многих веков развитие алгебры сильно тормозилось, потому что математикам долго не удавалось ввести в свои исследования удобные обозначения. Поэтому изложение математических работ выглядело громоздко. Только начиная с XVI в. постепенно в математику начали вводить современные обозначения. Символы a^2, a^3, a^4 и т. п. впервые применил французский ученый Рене Декарт (1596–1650). Символ a^n для произвольного числа n предложил английский ученый Исаак Ньютон (1643–1727).

Благодаря исследованиям французского математика Франсуа Виета (1540–1603) уравнения второй степени, третьей и четвертой степеней впервые стали рассматривать в буквенных обозначениях. Он ввел буквенные обозначения для неизвестных величин и коэффициентов уравнений. Особенно ценил открытые им формулы, названные впоследствии формулами Виета. Однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в XVII в., после работ Г. Декарта, И. Ньютона и других математиков, решение квадратных и других уравнений приобрело современный вид.

Идея зависимости величин тоже берет начало от древнегреческой науки. Но греки рассматривали лишь величины, которые имеют «геометрическую» природу, и не ставили вопрос об общем изучении разных зависимостей. Графическое изображение зависимостей между величинами широко использовали Г. Галилей (1564–1642), П. Ферма (1601–1665) и Г. Декарт, который ввел понятие переменной величины. Развитие механики и техники привело к необходимости введения общего понятия функции, что сделал немецкий философ и математик Г. Лейбниц (1646–1716). Большие классы функций изучал в ходе своих исследований И. Ньютон.

В 1718 г. ученик Лейбница, И. Бернулли (1667–1748), дал определение функции, лишенное геометрических образов. Следующий шаг в развитии понятия функции сделал его ученик, член Петербуржской академии наук Л. Ейлер (1707–1783).

После работ ряда математиков (Ж. Фурье (1768–1830), М. И. Лобачевский, П. Дирихле и др.) было дано следующее определение: «Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x отвечает единственное значение величины y».

М. И. Лобачевский
(1792–1856)

П. Дирихле
(1805–1859)

На современном этапе к словам «каждому значению величины x» добавляют «принадлежащему некоторому множеству», а вместо переменных величин говорят об элементах этих множеств. Такой подход позволяет рассматривать с единой точки зрения как числовые функции, так и, например, геометрические преобразования и т. п.

Несоизмеримость стороны квадрата и его диагонали была открыта в V в. до н. э. в Древней Греции. Это открытие показало, что для измерения геометрических величин недостаточно рациональных чисел. Поэтому греческие математики отказались от обозначения геометрических величин числами и стали развивать геометрическую алгебру (поэтому и сейчас говорят «квадрат числа», «куб числа» и т. п.).

Греческий математик Евдокс (IV в. до н. э.) разработал теорию отношений геометрических величин, которая заменяла для древнегреческих математиков современную теорию действительных чисел. В основе теории Евдокса лежит идея о бесконечной делимости отрезков и других фигур.

Р. Декарт ввел произвольно выбранный единичный отрезок, что позволило ему выразить все действия над числами через действия над отрезками. В сущности, он уже работал с положительными действительными числами. Лишь во второй половине XIX в. теория действительных чисел была приведена к теории натуральных чисел.

О понятии действительного числа. Первые представления о числах формировались постепенно под влиянием практики. С давних времен числа применялись в ходе счета и измерения величин.

Ответ на вопрос «Сколько элементов содержит данное конечное множество?» всегда выражается или натуральным числом, или числом «нуль». Следовательно, множество

$$\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots\}$$

всех неотрицательных чисел обслуживает все потребности счета.

Иначе с измерением величин. Расстояние между двумя пунктами может равняться 3,5 километра, площадь комнаты — 16,45 квадратных метра и т. п.

Исторически положительные действительные числа появились как отношение длин отрезков. С открытием несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его стороной стало понятным, что отношение длин отрезков не всегда можно выразить не только натуральным, но и рациональным числом. Чтобы числовое значение каждого отрезка при фиксированной единице измерения было определено, необходимо было ввести новые числа — иррациональные.

Все практические измерения величин имеют только приближенный характер. Их результат с необходимой точностью можно выразить с помощью рациональных дробей или конечных десятичных дробей.

Например, измеряя диагональ квадрата со стороной 1 м с точностью до 1 см, мы выясним, что ее длина приближенно равна 1,41 м. Измеряя с точностью до 1 мм, получим, что эта длина приближенно равна 1,414 м.

Однако в математике часто уклоняются от приближенного характера практических измерений. Последовательный теоретический подход к измерению длин отрезков приводит к необходимости рассмотрения бесконечных десятичных дробей. (Именно такими дробями являются числа $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}14159265\ldots$.)

Отношение длины любого отрезка к длине отрезка, принятого за единицу измерения, всегда можно выразить числом, представленным в виде бесконечной десятичной дроби.

Полная теория действительных чисел достаточно сложна и не входит в программу средней школы. Она обычно рассматривается в курсах математического анализа. Однако с одним из способов ее построения мы ознакомимся в общих чертах.

1. Пусть:

   а) каждому действительному числу соответствует (как его запись) бесконечная десятичная дробь:
   $$x = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots;$$
   б) каждая бесконечная десятичная дробь является записью действительного числа.

   Но при этом естественно считать десятичную дробь, оканчивающуюся бесконечной последовательностью девяток, только другой записью числа, представленного десятичной дробью, оканчивающей бесконечной последовательностью нулей: $0{,}9999\ldots = 1{,}0000\ldots$; $12{,}765999\ldots = 12{,}766000\ldots$.

   Только исключив из рассмотрения десятичные дроби с девяткой в периоде, получим взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей.

   Число a_0 — это *целая часть* положительного числа x, а
   $$x - a_0 = 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots \text{ — } \textit{дробная} \text{ часть числа } x.$$
   Число $x_n = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n$ называют *десятичным приближением x с точностью до 10^{-n} с недостатком,* а число $x'_n = x_n + 10^{-n}$ называют *десятичным приближением с точностью до 10^{-n} с избытком* для числа
   $$x = a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots.$$
   Если число x отрицательно, то есть $x = -a_0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$, то считают, что
   $$x'_n = -a_0, a_1a_2\ldots a_n \text{ и } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Вводят *правило сравнения* двух действительных чисел. По определению число x меньше числа y, когда по меньшей мере для одного n выполняется неравенство $x_n < y_n$, где x_n и y_n — десятичные

приближения с точностью до 10^{-n} с недостатком для чисел x и y. (Мы воспользовались тем, что правило сравнения конечных десятичных дробей уже известно.)

3. Определяют *арифметические действия* над действительными числами (при этом также пользуются тем, что эти действия уже определены для конечных десятичных дробей).

   Суммой двух действительных чисел x и y (обозначается $x + y$) называют такое действительное число z, что для любого n выполняются неравенства
   $$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$
   В курсах математического анализа доказывается, что такое число существует и оно единственное.

   Аналогично *произведением* двух неотрицательных чисел x и y называют такое число z (обозначают xy), что при любом n выполняются неравенства
   $$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$
   Такое число существует, и оно единственное.

   Напомним, что примеры выполнения таким образом определенных действий сложения и умножения действительных чисел было рассмотрено в курсе алгебры 8 класса.

   Воспользовавшись тем, что произведение неотрицательных чисел $|x|$ и $|y|$ уже определено, полагают, что для действительных чисел разных знаков $xy = -|x|\cdot|y|$, а для чисел одинаковых знаков — $xy = |x|\cdot|y|$ (как обычно, модулем каждого из чисел $a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ и $-a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ называют число $a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$).

   Вычитание определяется как действие, обратное сложению: *разностью* $x - y$ чисел x и y называется такое число z, что $y + z = x$.

   Деление определяется как действие, обратное умножению: *частным* $x : y$ называется такое число z, что $yz = x$.

4. Показывают, что неравенства и арифметические операции, определенные выше, сохраняют основные свойства, присущие им во множестве рациональных чисел.

Теория действительного числа была построена сразу в нескольких формах немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831–1916), К. Вейерштрассом (1815–1897) и Г. Кантором (1845–1918).

Раздел 2
СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

§ 10. Корень n-й степени и его свойства. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график

§ 11. Иррациональные уравнения

§ 12. Обобщение понятия степени. Степенная функция, ее свойства и график

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

§ 13. Применение свойств функций к решению иррациональных уравнений

§ 14. Решение иррациональных неравенств

§ 15. Решение иррациональных уравнений и неравенств с параметрами

В основной части этого раздела вы ознакомитесь с обобщением понятия квадратного корня — корнем n-й степени и его свойствами, научитесь решать иррациональные уравнения, строить графики степенных функций и функции $y = \sqrt[n]{x}$ и использовать их свойства для решения разнообразных задач.

В дополнительной части раздела вы сможете ознакомиться с методами решения более сложных задач по темам, которые предлагаются в заданиях внешнего независимого оценивания или государственной итоговой аттестации по математике (это, в первую очередь, методы решения иррациональных неравенств, применение свойств функций для решения иррациональных уравнений и методы решения иррациональных уравнений и неравенств с параметрами).

§ 10 КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА. ФУНКЦИЯ $y=\sqrt[n]{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

Таблица 17

<table>
<tr><td colspan="3">1. Определение</td></tr>
<tr><td>Квадратный корень</td><td colspan="2">Корень n-й степени</td></tr>
<tr><td>Квадратным корнем из числа a называется такое число b, квадрат которого равен a.
Если $a = b^2$, то b — квадратный корень из числа a.</td><td colspan="2">Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a.
Если $a = b^n$ $(n \in N,\ n \neq 1)$, то b — корень n-й степени из числа a.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Арифметический корень — неотрицательное значение корня.
При $a \geqslant 0$: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ — обозначения арифметического значения корня.</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$</td><td colspan="2">$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Область допустимых значений (ОДЗ)</td></tr>
<tr><td>Квадратный корень</td><td colspan="2">Корень n-й степени</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a}$ существует только при $a \geqslant 0$</td><td colspan="2">$\sqrt[2k]{a}$ существует только при $a \geqslant 0$ $(k \in N)$;
$\sqrt[2k+1]{a}$ существует при любых значениях a</td></tr>
<tr><td colspan="3">Запись решений уравнения $x^n = a$ $(n \in N)$</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — нечетное $(k \in N)$</td><td colspan="2">$n = 2k$ — четное $(k \in N)$</td></tr>
<tr><td>При любых значениях a уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственный корень $x = \sqrt[2k+1]{a}$</td><td>При $a < 0$ уравнение $x^{2k} = a$ не имеет корней</td><td>При $a \geqslant 0$ все корни уравнения $x^{2k} = a$ можно записать так: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Примеры</td></tr>
<tr><td>Уравнение $x^5 = 3$ имеет единственный корень $x = \sqrt[5]{3}$</td><td>Уравнение $x^8 = -7$ не имеет корней</td><td>Уравнение $x^8 = 7$ имеет корни $x = \pm\sqrt[8]{7}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Свойства корня n-й степени</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — нечетное число</td><td colspan="2">$n = 2k$ — четное число</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$
2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$</td><td colspan="2">$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert}$</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 17

Для произвольных значений n и k ($n \in N$, $n \neq 1$, $k \in N$)

3) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$

4) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$

5) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Следствия

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}}$ — *вынесение множителя из-под знака корня.*

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}$ — *внесение множителя под знак корня.*

6) При $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

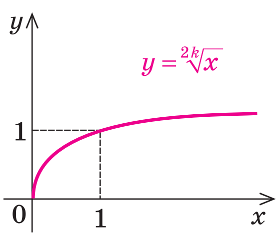
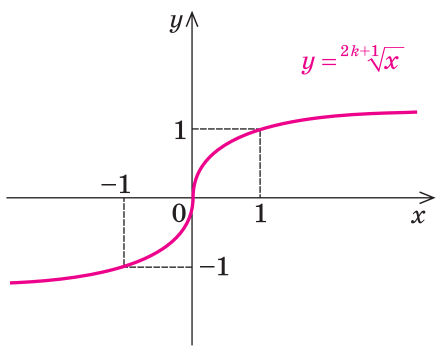
7) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — *основное свойство корня*

Значение корня из степени неотрицательного числа не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число.

8) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\boxed{\text{если } a>b, \text{ то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}$

4. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ и ее график

График функции $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$)

n — четное ($n = 2k$, $k \in N$)	n — нечетное ($n = 2k+1$, $k \in N$)
	

Продолжение табл. 17

<table>
<tr><th colspan="2">Свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$</th></tr>
<tr><th>n — четное ($n = 2k$, $k \in N$)</th><th>n — нечетное ($n = 2k + 1$, $k \in N$)</th></tr>
<tr><td>1. Область определения: $x \geqslant 0$, то есть $D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.</td><td>1. Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$ (x — любое действительное число), то есть $D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.</td></tr>
<tr><td>2. Область значений: $y \geqslant 0$, то есть $E\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty)$.</td><td>2. Область значений: $y \in \boldsymbol{R}$ (y — любое действительное число), то есть $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=\boldsymbol{R}$.</td></tr>
<tr><td>3. Наибольшего значения функция $y=\sqrt[2k]{x}$ не имеет; наименьшее значение — $y = 0$ (при $x = 0$).</td><td>3. Наибольшего и наименьшего значений функция $y=\sqrt[2k+1]{x}$ не имеет.</td></tr>
<tr><td>4. Функция не является ни четной, ни нечетной.</td><td>4. Функция является нечетной: $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Точки пересечения с осями координат: Oy $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ Ox $\begin{cases} y=0, \\ x=0. \end{cases}$
График проходит через начало координат.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Промежутки возрастания и убывания: на всей области определения функция возрастает.</td></tr>
<tr><td>7. Промежутки знакопостоянства:
при $x > 0$ значение $y > 0$</td><td>7. Промежутки знакопостоянства:
при $x > 0$ значение $y > 0$,
при $x < 0$ значение $y < 0$</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Определение корня n-й степени. Понятие корня квадратного из числа a вам известно: это такое число, квадрат которого равен a. Аналогично определяется и корень n-й степени из числа a, где n — произвольное натуральное число, большее 1.

Корнем n-й степени из числа a **называется такое число, n-я степень которого равна a.**

Например, корень третьей степени из числа 27 равен 3, поскольку $3^3 = 27$; корень третьей степени из числа -27 равен -3, поскольку $(-3)^3 = -27$. Числа 2 и -2 являются корнями четвертой степени из 16, поскольку $2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$.

При $n = 2$ и при $n = 3$ корни n-й степени называют также соответственно квадратным и кубическим корнями.

Как и для квадратного корня, для корня n-й степени вводится понятие арифметического корня.

***Арифметическим корнем n-й степени из числа a* называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.**

При $a \geqslant 0$ для арифметического значения корня n-й степени из числа a существует специальное обозначение[1]: $\sqrt[n]{a}$; число n называют *показателем корня,* а само число a — *подкоренным выражением.* Знак $\sqrt[n]{}$ и выражение $\sqrt[n]{a}$ называют также *радикалом.*

Например, то, что корень третьей степени из числа 27 равен 3, записывают так: $\sqrt[3]{27}=3$; то, что корень четвертой степени из 16 равен 2, записывают так: $\sqrt[4]{16}=2$. Но для записи того, что корень четвертой степени из 16 равен -2, обозначения нет.

При $a < 0$ значение корня n-й степени из числа a существует только при нечетных значениях n (поскольку не существует такого действительного числа, четная степень которого будет отрицательным числом). В этом случае корень нечетной степени n из числа a также обозначается $\sqrt[n]{a}$. Например, то, что корень третьей степени из числа -27 равен -3, записывается так: $\sqrt[3]{-27}=-3$. Поскольку -3 — отрицательное число, то $\sqrt[3]{-27}$ не является арифметическим значением корня. Но корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметическое значение корня с помощью формулы

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}}.$$

Чтобы доказать приведенную формулу, заметим, что по определению корня n-й степени это равенство будет верным, если $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$. Действительно, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=(-1)^{2k+1}\cdot\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=-a$, а это и означает, что

$$\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}.$$

Например, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$; $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$.

Отметим, что ***значение $\sqrt[2k+1]{a}$ имеет тот же знак, что и число a,*** поскольку при возведении в нечетную степень знак числа не меняется.

По определению корня n-й степени можно также записать, что в том случае, когда существует значение $\sqrt[n]{a}$, выполняется равенство

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a} \text{ и, в частности, при } a \geqslant 0 \ \boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2=a}.$$

[1] Все свойства выражений вида $\sqrt[n]{a}$ приведены для случая $n \in N$, $n \geqslant 2$. При $n = 1$ условимся считать, что $\sqrt[n]{a}=\sqrt[1]{a}=a$.

2. Область допустимых значений выражений с корнями n-й степени. Корни уравнения $x^n = a$ ($n \in N$). Заметим, что

> ***значение $\sqrt[2k+1]{a}$ — корня нечетной степени из числа a — существует при любых значениях a.***

Обоснуем это, например, для корня третьей степени. Обозначим $\sqrt[3]{a} = x$. Тогда по определению корня n-й степени $x^3 = a$, и значение $\sqrt[3]{a}$ будет существовать, если уравнение $x^3 = a$ будет иметь решение. Изобразив графики функций $y = x^3$ и $y = a$ (рис. 78), увидим, что при любых значениях a прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^3$ в одной точке. Таким образом, при любом значении a существует единственное значение $\sqrt[3]{a}$ (поскольку функция $y = x^3$ возрастает и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$).

Аналогичное обоснование можно привести и для других корней нечетной степени (см. графики и свойства функций вида $y = x^{2k+1}$ в § 12).

Приведенные рассуждения позволяют записать решение уравнения $x^n = a$ для нечетных значений $n = 2k + 1$: **при любых значениях a уравнение $x^{2k+1} = a$ ($k \in N$) имеет единственный корень $x = \sqrt[2k+1]{a}$.**

Например, уравнение $x^5 = 3$ имеет единственный корень $x = \sqrt[5]{3}$, а уравнение $x^7 = -11$ — единственный корень $x = \sqrt[7]{-11}$ (учитывая, что $x = \sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, корень уравнения $x^7 = -11$ можно записать так: $x = -\sqrt[7]{11}$).

> ***Значение $\sqrt[2k]{a}$ — корня четной степени из числа a — существует только при $a \geqslant 0$.***

Действительно, в этом случае, когда $\sqrt[2k]{a} = x$, по определению корня n-й степени $a = x^{2k}$. Таким образом, $a \geqslant 0$.

Для квадратного корня это также можно обосновать, используя известный график функции $y = x^2$.

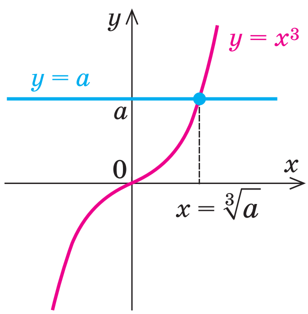


Рис. 78

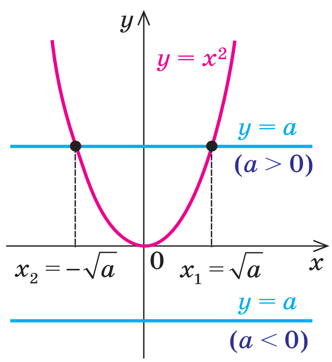


Рис. 79

● Пусть $\sqrt{a}=x$, тогда по определению квадратного корня $x^2 = a$, и значение $\sqrt{a}$ будет существовать, если уравнение $x^2 = a$ будет иметь решение.

Изобразив графики функций $y = x^2$ и $y = a$ (рис. 79), видим, что прямая $y = a$ пересекает график функции $y = x^2$ только при $a \geqslant 0$ (причем, при $a > 0$ — в двух точках: $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$, а при $a = 0$ — только в одной точке $x = 0$). Таким образом, при любых значениях $a \geqslant 0$ существует значение $\sqrt{a}$, поскольку функция $y = x^2$ принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$. ○

Рассмотрим решения уравнения $x^n = a$ для четных значений $n = 2k$ $(k \in N)$.

Уравнение $x^2 = a$ при $a < 0$ не имеет корней, поскольку квадрат любого числа не может быть отрицательным (на рисунке 79 прямая $y = a$ при $a < 0$ не пересекает график функции $y = x^2$). Так же и **уравнение $x^{2k} = a$ $(k \in N)$ при $a < 0$ не имеет корней** (поскольку четная степень любого числа не может быть отрицательной).

При $a = 0$ **уравнение $x^{2k} = 0$ $(k \in N)$ имеет единственный корень $x = 0$** (поскольку четная степень любого отличного от нуля числа — число положительное, то есть не равное нулю, а $0^{2k} = 0$).

При $a > 0$ по определению корня $2k$-й степени $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$. Следовательно, $x=\sqrt[2k]{a}$ — корень уравнения $x^{2k} = a$. Но $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$, поэтому $x=-\sqrt[2k]{a}$ — также корень уравнения $x^{2k} = a$. Других корней это уравнение не имеет, поскольку свойства функции $y = x^{2k}$ аналогичны свойствам функции $y = x^2$: при $x \geqslant 0$ функция возрастает, таким образом, значение a она может принимать только при одном значении аргумента $\left(x=\sqrt[2k]{a}\right)$. Аналогично при $x \leqslant 0$ функция $y = x^{2k}$ убывает, поэтому значение a она может принимать только при одном значении аргумента $\left(x=-\sqrt[2k]{a}\right)$. Таким образом, **уравнение $x^{2k} = a$ при $a > 0$ имеет только два корня: $x=\pm\sqrt[2k]{a}$.**

Например, уравнение $x^{10} = -1$ не имеет корней, а уравнение $x^6 = 5$ имеет корни $x=\pm\sqrt[6]{5}$.

3. Свойства корня n-й степени можно обосновать, опираясь на определение корня n-й степени.

1) Формула $\boxed{\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}}$ была обоснована в пункте 1 объяснений. Обоснуем другие формулы, приведенные в таблице 17.

● Напомним, что по определению корня n-й степени для доказательства равенства $\sqrt[n]{A}=B$ (при $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$) достаточно проверить равенство $B^n = A$.

2) Выражение $\sqrt[n]{a^n}$ рассмотрим отдельно при $n = 2k + 1$ (нечетное) и при $n = 2k$ (четное).

Если n — *нечетное*, то учитываем, что выражение $\sqrt[n]{a^n}$ существует при любых значениях a, и то, что знак $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ совпадает со знаком a. Тогда по определению корня n-й степени получаем

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}.$$

Если n — *четное*, то учитываем, что выражение $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$ обозначает арифметическое значение корня n-й степени (таким образом, $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geqslant 0$) и что $|a|^{2k} = a^{2k}$. Тогда

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}.$$

3) Формулу

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \text{ при } a \geqslant 0$$

обоснуем, рассматривая ее справа налево. Поскольку $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$, то по определению $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

4) Справедливость формулы

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \text{ при } a \geqslant 0$$

следует из равенства $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$.

5) Для обоснования формулы

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

используем равенство $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

6) Для обоснования формулы

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\ b > 0$$

используем равенство $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$.

7) Основное свойство корня

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a \geqslant 0$$

следует из равенства $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$. ○

Например, $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделили на натуральное число 3).

С помощью формулы $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$ можно получить важные следствия: формулы вынесения множителя из-под знака корня или внесения множителя под знак корня.

Действительно, при $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$. Рассматривая полученную формулу слева направо, имеем *формулу вынесения неотрицательного множителя из-под знака корня*:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}},$$

а справа налево — *формулу внесения неотрицательного множителя под знак корня*:

$$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}.$$

Например, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}$.

8) Отметим еще одно свойство корней n-й степени:
для любых неотрицательных чисел a и b

$$\boxed{\textit{если } \boldsymbol{a>b}, \text{ то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}.$$

Докажем это методом от противного. Допустим, что $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$. Тогда при возведении обеих частей последнего неравенства с неотрицательными членами в n-ю степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство $a \leqslant b$. Это противоречит условию $a>b$. Таким образом, наше предположение неверно, и $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Например, учитывая, что $21>16$, получаем $\sqrt[4]{21}>\sqrt[4]{16}$. Поскольку $\sqrt[4]{16}=2$, имеем $\sqrt[4]{21}>2$.

Обобщение свойств корня n-й степени[1]

Основная часть формул, которые выражают свойства корней n-й степени, обоснована для неотрицательных значений подкоренных выражений. Но иногда приходится выполнять преобразования выражений с корнями n-й степени и в том случае, когда таких ограничений нет: например, извлекать корень квадратный (или в общем случае корень четной степени) из произведения ab отрицательных чисел $(a<0,\ b<0)$. Тогда $ab>0$ и $\sqrt[2k]{ab}$ существует, но формулой

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

воспользоваться нельзя: она обоснована только для неотрицательных значений a и b. Но в случае $ab>0$ имеем $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$, и теперь $|a|>0$ и $|b|>0$. Следовательно, для извлечения корня из произведения $|a|\cdot|b|$ можно применить формулу (1).

[1] Этот материал обязателен только для классов физико-математического профиля.

Тогда при $a < 0$, $b < 0$ можем записать: $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|\cdot|b|} = \sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$.

Отметим, что полученная формула справедлива и при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, поскольку в этом случае $|a| = a$ и $|b| = b$. Таким образом,

$$\boxed{\text{при } ab \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}}.$$

Аналогично можно обобщить свойство 6.

$$\boxed{\text{При } \frac{a}{b} \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}}$$

Следует отметить, что в тех случаях, когда обоснование основных формул можно повторить и для отрицательных значений a и b, такими формулами можно пользоваться для любых a и b (из ОДЗ левой части формулы).

Например, для корней нечетной степени *для любых значений a и b*

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}. \tag{2}$$

Действительно, выражения, стоящие в левой и правой частях этой формулы, существуют при любых значениях a и b и выполняется равенство

$$\left(\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}\left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab.$$

Тогда по определению корня $(2k+1)$-й степени выполняется и равенство (2).

Например, $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}}\cdot\sqrt[3]{b} = a^5\sqrt[3]{b}$ при любых значениях a и b.

Но некоторые формулы не удается использовать для любых значений a и b. Например, если мы по основному свойству корня запишем, что $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ (показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделили на натуральное число 2), то полученное равенство не является тождеством, поскольку при $a = -1$ (левая и правая часть этого равенства определены при всех значениях a) имеем $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$, то есть $1 = -1$ — неверное равенство.

Таким образом, при делении показателя корня и показателя степени подкоренного выражения на четное натуральное число необходимо обобщить основное свойство корня. Для этого достаточно заметить, что $a^2 = |a|^2$, и теперь основание степени подкоренного выражения $|a| \geqslant 0$, а значит можно применить основную формулу (свойство 7): $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}$.

В общем случае, *если при использовании основного свойства корня приходится делить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на четное натуральное число, то в результате основание степени подкоренного выражения приходится брать по модулю,* то есть

$$\boxed{\sqrt[2kn]{a^{2km}}=\sqrt[n]{|a|^m}}.$$

Аналогично можно обосновать и другие примеры использования основных свойств корней при любых значениях a и b (из ОДЗ левой части формулы), которые приведены в таблице 18.

Таблица 18

Основные формулы корня n-й степени (только для неотрицательных значений a и b, то есть при $\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$)	Можно ли применять основные формулы для любых a и b из ОДЗ левой части формулы (если нельзя — дается обобщенная формула)	
	корень нечетной степеня	корень четной степени
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$	*можно*	*только для неотрицательных a*
2. $\sqrt[n]{a^n}=a$	*можно*	$\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert$
3. Корень из корня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$	*можно*	*можно*
4. Корень из произведения $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}$
и произведение корней $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$		*можно*
5. Корень из частного $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$	*можно*	$\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}}$
и частное корней $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$		*можно*
6. Основное свойство корня: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ и наоборот	можно, если все корни нечетной степени (то есть переход *нечетная → нечетная*)	Переход *четная → четная можна* Переход *нечетная → четная* $\sqrt[n]{a^m}=\begin{cases}\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m\geqslant 0,\\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m<0\end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\lvert a^m\rvert}$

Продолжение табл. 18

Основные формулы корня n-й степени (только для неотрицательных значений a и b, то есть при $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Можно ли применять основные формулы для любых a и b из ОДЗ левой части формулы (если нельзя — дается обобщенная формула)	
	корень нечетной степеня	корень четной степени
7. Вынесение множителя из-под знака корня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можно*	$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}$
8. Внесение множителя под знак корня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можно*	$\boldsymbol{a}\sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \begin{cases} \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}}, \text{ при } \boldsymbol{a} \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^n\boldsymbol{b}}, \text{ при } \boldsymbol{a} < 0, \end{cases}$ где $b \geqslant 0$

З а м е ч а н и е. Под термином «переход», который использован в таблице 18, следует понимать переход в соответствующей формуле от корня n-й степени к корню m-й степени.

Если n и m оба четные, то такой переход коротко охарактеризован как «переход четная → четная» (вида $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[8]{a^4}$).

Если n и m оба нечетные, то в таблице записано, что выполнен «переход нечетная → нечетная» (вида $\sqrt[15]{a^9} = \sqrt[5]{a^3}$).

Если n — нечетное число, а m — четное число, то в таблице указано, что выполнен «переход нечетная → четная» (вида $\sqrt[5]{(-2)^3} = -\sqrt[10]{(-2)^6}$).

Таким образом, если по условию задания на преобразование выражений с корнями n-й степени (иррациональных выражений) известно, что все буквы (которые входят в запись данного выражения) неотрицательные, то для преобразования этого выражения можно пользоваться основными формулами, а если такого условия нет, то приходится анализировать ОДЗ данного выражения и только после этого принимать решение, какими формулами пользоваться — основными или обобщенными.

4. Функция $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$) и ее график. Характеризуя свойства функций, чаще всего выделяют следующие их характеристики: 1) область определения; 2) область значений; 3) четность или нечетность; 4) точки пересечения с осями координат; 5) промежутки знакопостоянства; 6) промежутки возрастания и убывания[1]; 7) наибольшее и наименьшее значения функции.

[1] Промежутки возрастания и убывания функции иногда называют промежутками монотонности функции.

Рассмотрим свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$. Поскольку некоторые свойства корней нечетной степени не совпадают со свойствами корней четной степени, то для соответствующих случаев эти корни рассмотрим отдельно.

Если n — **нечетное** ($n = 2k+1$, $k \in N$):

1. *Область определения.* При нечетных значениях n ($n = 2k + 1$, $k \in N$) корень нечетной степени из числа x существует при любых значениях x, поэтому областью определения функции $y=\sqrt[2k+1]{x}$ являются все действительные числа:
$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)=R.$$
2. При нечетных значениях n функция является *нечетной*, так как $\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}$, следовательно, *график функции* $y=\sqrt[2k+1]{x}$ *симметричен относительно начала координат*.

Если n — **четное** ($n = 2k$, $k \in N$):

1. *Область определения.* При четных значениях n ($n = 2k$, $k \in N$) корень четной степени из числа x существует только при $x \geqslant 0$, поэтому областью определения функции $y=\sqrt[2k]{x}$ является множество неотрицательных чисел:
$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right)=[0;+\infty).$$
2. При четных значениях n функция не является *ни четной, ни нечетной* (так как ее область определения несимметрична относительно начала координат).

3. Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то *график функции* $y=\sqrt[n]{x}$ *всегда проходит через начало координат* (других точек пересечения с осями координат нет: при $y = 0$ из уравнения $\sqrt[n]{x}=0$ снова получаем только $x = 0$).

4. *На всей области определения функция* $y=\sqrt[n]{x}$ *возрастает*. Действительно, для неотрицательных значений x_1 и x_2 по свойству 8, если $x_1 > x_2$, то $\sqrt[n]{x_1}>\sqrt[n]{x_2}$, а это означает, что функция возрастает при неотрицательных значениях x. Следовательно, при четном значении n функция действительно возрастает на всей области определения. Для нечетного значения n достаточно учесть, что график функции $y=\sqrt[n]{x}$ симметричен относительно начала координат, и, отображая график возрастающей при $x \geqslant 0$ функции, снова получить график возрастающей функции (см. ниже).

5. Для того чтобы найти *область значений* функции $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$), составим уравнение
$$\sqrt[n]{x}=a.$$

Если n — нечетное, то выражение $\sqrt[n]{x}$ принимает как неотрицательные, так и отрицательные значения, и уравнение $\sqrt[n]{x} = a$ при любом a по определению корня n-й степени имеет корень $x = a^n$. Следовательно, для нечетных n множество значений состоит из всех действительных чисел: $E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$. Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция* $y = \sqrt[2k+1]{x}$ *не имеет*.

6. *Промежутки знакопостоянства*:
при $x > 0$ значение $y > 0$ (поскольку в этом случае $y = \sqrt[2k+1]{x}$ — арифметическое значение корня), а при $x < 0$ значение $y < 0$ (поскольку корень нечетной степени — число отрицательное).

Если n — четное, то выражение $\sqrt[n]{x}$ обозначает арифметическое значение корня $\left(\sqrt[n]{x} \geqslant 0\right)$, поэтому уравнение $\sqrt[n]{x} = a$ имеет корень только при $a \geqslant 0$. Тогда для всех $a \geqslant 0$ имеем $x = a^n$. Следовательно, для четных n множество значений состоит из всех неотрицательных чисел:

$$E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0; +\infty).$$

Поэтому наибольшего значения функция $y = \sqrt[2k]{x}$ не имеет, а наименьшее — $y = 0$ — принимает при $x = 0$.

6. *Промежутки знакопостоянства*:
при $x > 0$ значение $y > 0$ (поскольку $y = \sqrt[2k]{x}$ — арифметическое значение корня).

Отметим также, что при $x = 1$ $y = 1$. Следовательно, график функции $y = \sqrt[n]{x}$ всегда проходит через точку (1; 1).

Приведенное исследование позволяет построить график функции $y = \sqrt[n]{x}$ для нечетных (рис. 80) и четных (рис. 81) значений n.

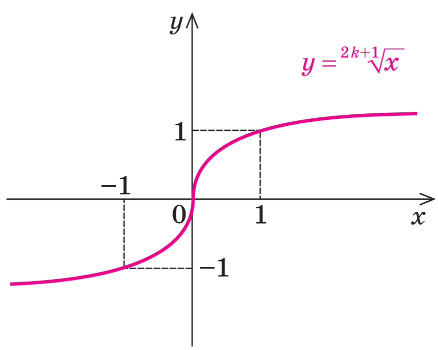


Рис. 80

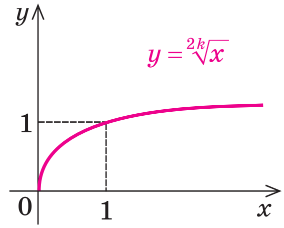


Рис. 81

На рисунке 82 в одной и той же системе координат изображены графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = \sqrt[5]{x}$ и для сравнения график функции $y = x$.

Заметим, что график функции $y=\sqrt[n]{x}$ можно построить, используя график функции $y = x^n$. Например, функцию $y=\sqrt[3]{x}$ можно рассматривать как обратную к функции $y = x^3$, а следовательно, построить ее график (рис. 83) как кривую, симметричную кубической параболе $y = x^3$ относительно прямой $y = x$. Аналогично в пункте 2.4, используя правую ветку параболы $y = x^2$, был построен график функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 51, с. 65).

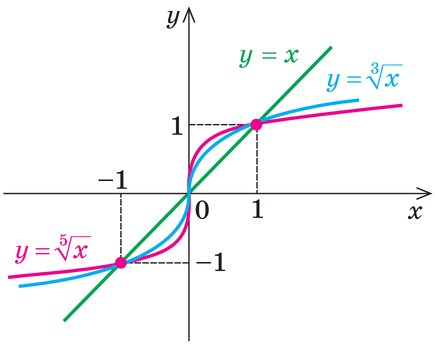


Рис. 82

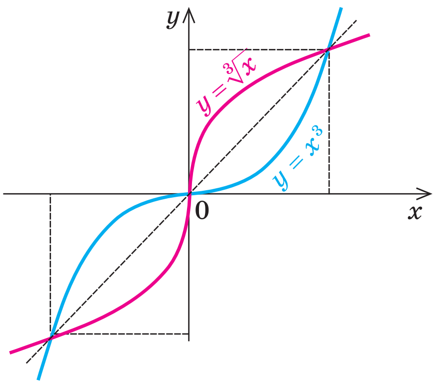


Рис. 83

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\sqrt[4]{625}=5$, поскольку $5^4 = 625$. ◁ 2) ▶ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$, поскольку $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$; ◁ 3) ▶ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ◁	Используем определение корня n-й степени. Запись $\sqrt[n]{a}=b$ означает, что $b^n = a$.

Задача 2 Найдите значение выражения:

1) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$.

Комментарий

Используем свойства корня n-й степени и учтем, что каждую формулу, которая выражает эти свойства, можно применять как слева направо, так и справа налево. Например, для решения задания 1 воспользуемся формулой $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для решения задания 2 применим эту же формулу справа налево, то есть: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

Решение

1) ▶ $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=2$. ◁

Задача 3 Сравните числа:

1) $\sqrt[4]{50}$ и $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{3}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Так как $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, то есть $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁ 2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$. Поскольку $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, то есть $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁	Для сравнения данных чисел в каждом задании достаточно привести все корни к одному показателю корня и учесть, что *для любых неотрицательных чисел a и b, если $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.*

Задача 4 Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит корня n-й степени:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$.

Комментарий

В задании 1 учтем, что $\sqrt[5]{3^5}=3$, таким образом, после умножения числителя и знаменателя данной дроби на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменатель можно будет записать без знака радикала. В задании 2 достаточно числитель и знаменатель данной дроби умножить на разность $\sqrt{5}-1\neq 0$ (чтобы получить в знаменателе формулу разности квадратов).

Но выполнение аналогичного преобразования в задании 3 связано с определенными проблемами. ОДЗ выражения $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$: $a\geqslant 0$ (следовательно, все тождественные преобразования необходимо выполнять для всех значений $a\geqslant 0$). Умножим числитель и знаменатель данной дроби на выражение $\sqrt{a}-1$. По основному свойству дроби это можно сделать при $\sqrt{a}-1\neq 0$, то есть при $a\neq 1$. Но значение $a=1$ принадлежит ОДЗ исходного выражения, поэтому выбранный нами способ решения приведет к сужению его ОДЗ. Действительно, если записать, что $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=$ $=\dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, то это равенство не является тождеством, поскольку не выполняется для $a=1$ из ОДЗ исходного выражения. В этом случае, чтобы не допустить ошибок, можно пользоваться таким ориентиром: *если для тождественных преобразований* (или для решения уравнений и неравенств) *приходится применять преобразования (или формулы), приводящие к сужению ОДЗ исходного выражения, то значения, на которые сужается ОДЗ данного выражения, следует рассмотреть отдельно.*

Решение

1) ▶ $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}=\sqrt{5}-1$. ◁

3) ▶ Обозначим $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тогда при $a=1$ получаем $A=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$.

При $a\neq 1$ $(a\geqslant 0)$ имеем $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Ответ: при $a=1$ $A=\frac{1}{2}$, при $a\neq 1$ $(a\geqslant 0)$ $A=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$

(то есть ответ не может быть записан однозначно). ◁

Задача 5 Упростите выражение:

1) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$; 2) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$ при $a>0$ и $b>0$; 3*) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Решение	*Комментарий*
1) I способ ▶ $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}\right)^2-\left(\sqrt[6]{b}\right)^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=$ $=\frac{\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁ II способ ▶ Обозначим $\sqrt[6]{a}=x$, $\sqrt[6]{b}=y$, где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Тогда $\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[6]{a}\right)^2=x^2$ и $\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[6]{b}\right)^2=y^2$. Таким образом, $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=$ $=x+y=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁	В задании 1 ОДЗ данного выражения: $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\neq 0$. Для неотрицательных значений a и b мы имеем право пользоваться всеми основными формулами преобразования корней (как слева направо, так и справа налево). При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ можно записать: $\sqrt[3]{a}=\left(\sqrt[6]{a}\right)^2$ и $\sqrt[3]{b}=\left(\sqrt[6]{b}\right)^2$. Тогда числитель данной дроби можно разложить на множители по формуле разности квадратов. Для того чтобы выделить в числителе разность квадратов, можно также выполнить замену $\sqrt[6]{a}=x$; $\sqrt[6]{b}=y$.

2) ▶ $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.\ \triangleleft$$

3) ▶ Обозначим $A=\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

При $\begin{cases} a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ $\left(\text{и } b+\sqrt{ab}\neq 0\right)$ имеем:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.\ \triangleleft$$

При $\begin{cases} a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ $\left(\text{и } b+\sqrt{ab}\neq 0\right)$ имеем:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-(-a)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{-a}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}\left(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\right)}{-\sqrt{-b}\left(\sqrt{-b}-\sqrt{-a}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ответ:

1) при $a\geqslant 0$ и $b>0$ $A=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

2) при $a\leqslant 0$ и $b<0$ (из ОДЗ)

$$A=-\sqrt{\frac{a}{b}}.\ \triangleleft$$

В задании 2 по условию $a>0$ и $b>0$, поэтому мы имеем право воспользоваться основными формулами преобразования корней. Тогда

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2,\quad b=\left(\sqrt{b}\right)^2.$$

В задании 3 ОДЗ данного выражения: $ab\geqslant 0$, $b+\sqrt{ab}\neq 0$. Но $ab\geqslant 0$ при $\begin{cases} a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ или $\begin{cases} a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0.\end{cases}$ При $\begin{cases} a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0\end{cases}$ мы можем пользоваться всеми основными формулами преобразования корней (как в задании 2), а при $\begin{cases} a\leqslant 0,\\ b\leqslant 0\end{cases}$ придется применить обобщенную формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ и учесть, что при $a\leqslant 0$ получаем $(-a)\geqslant 0$. Тогда можно записать: $a=-(-a)=-\left(\sqrt{-a}\right)^2$. Аналогично при $b\leqslant 0$ можно записать $b=-(-b)=$ $=-\left(\sqrt{-b}\right)^2$. Также следует иметь в виду, что при $a\leqslant 0$ и $b\leqslant 0$ получаем $|a|=-a$ и $|b|=-b$.

Записывая ответ, необходимо учесть, что $b=0$ не принадлежит ОДЗ данного выражения.

Задача 6* Упростите выражение $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

Комментарий

В условии не сказано о том, что значения a неотрицательные, поэтому придется сначала определить ОДЗ данного выражения.

Выражение $\sqrt[3]{a^2}$ существует при любых значениях a и является неотрицательным. Выражение a^4 также существует и неотрицательно при любых значениях a. Таким образом, при любых значениях a под знаком квадратного корня будет находиться неотрицательное выражение $a^4\sqrt[3]{a^2}$, то есть заданное выражение существует при любых значениях a (ОДЗ: любое $a \in \boldsymbol{R}$), и его преобразование необходимо выполнить на всей ОДЗ.

Преобразование данного выражения возможно несколькими способами, например: 1) сначала рассмотреть корень квадратный из произведения, а потом воспользоваться формулой корня из корня и основным свойством корня; 2) сначала внести выражение a^4 под знак кубического корня, а затем также применить формулу корня из корня и основное свойство корня. Выполняя преобразования каждым из этих способов, учитываем, что при любых a значения $a^2 \geqslant 0$ и $a^4 \geqslant 0$ (а значит, для этих выражений можно пользоваться основными формулами). Далее при использовании основного свойства корня приходится делить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на четное натуральное число 2, поэтому в результате основание степени подкоренного выражения берем по модулю (поскольку $a \in \boldsymbol{R}$).

Решение

I способ

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}=a^2\sqrt[6]{a^2}=a^2\sqrt[6]{|a|^2}=a^2\sqrt[3]{|a|}$. ◁

II способ

▶ $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}\cdot a^2}}=\sqrt[6]{a^{14}}=\sqrt[6]{|a|^{14}}=\sqrt[3]{|a|^7}=\sqrt[3]{|a|^6\cdot|a|}=$

$=\sqrt[3]{|a|^6}\sqrt[3]{|a|}=|a|^2\sqrt[3]{|a|}=a^2\sqrt[3]{|a|}$. ◁

Вопросы для контроля

1. Дайте определение корня n-й степени из числа a. Приведите примеры.
2. Дайте определение арифметического корня n-й степени из числа a. Приведите примеры.
3. При каких значениях a существуют выражения $\sqrt[2k]{a}$ и $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in \boldsymbol{N})$?
4. Запишите свойства корня n-й степени для неотрицательных значений подкоренных выражений.
5*. Докажите свойства корня n-й степени для неотрицательных значений подкоренных выражений.
6*. Какими свойствами корня n-й степени можно пользоваться при любых значениях букв (из ОДЗ левой части соответствующей формулы)? Приведите примеры использования основных формул и их обобщений.
7. При каких значениях a имеют корни уравнения:
   1) $x^{2k+1}=a$ $(k \in \boldsymbol{N})$; 2) $x^{2k}=a$ $(k \in \boldsymbol{N})$.
8. Запишите все решения уравнения:
   1) $x^{2k+1}=a$ $(k \in \boldsymbol{N})$;
   2) $x^{2k}=a$ $(k \in \boldsymbol{N})$: а) при $a>0$; б) при $a<0$; в) при $a=0$.
   Приведите примеры таких уравнений и решите их.

9. Постройте график функции $y=\sqrt[2k]{x}$, где $k \in N$, и сформулируйте ее свойства.

10. Постройте график функции $y=\sqrt[2k+1]{x}$, где $k \in N$, и сформулируйте ее свойства.

11*. Обоснуйте свойства функции $y=\sqrt[n]{x}$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$):
1) для нечетного значения n; 2) для четного значения n.

Упражнения

1. Проверьте, верно ли равенство:
1°) $\sqrt[3]{64}=4$; 2°) $\sqrt[9]{-1}=-1$; 3) $\sqrt[10]{1024}=2$;
4°) $\sqrt[25]{0}=0$; 5°) $\sqrt[5]{-32}=-2$; 6°) $\sqrt[13]{1}=1$.

2°. Вычислите:
1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$;
4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

Найдите значение выражения **(3–7)**.

3. 1°) $\sqrt[3]{8\cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16\cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48\cdot 81}$.

4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

5. 1) $\frac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\frac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 10^5}$.

7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0{,}1)^4\cdot 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 6^{20}}$.

8. Сравните числа:
1°) $\sqrt[9]{0{,}1}$ и 0; 2°) $\sqrt[11]{1{,}3}$ и 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ и $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ и $\sqrt[3]{3}$.

9°. При каких значениях x имеет смысл выражение:
1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\frac{5}{x}}$.

10. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит корня n-й степени:
1) $\frac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

11. Вынесите множитель из-под знака корня ($a>0$, $b>0$):
1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

12*. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

13. Внесите множитель под знак корня ($a>0$, $b>0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\frac{a}{b^{11}}}$.

14*. Внесите множитель под знак корня:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\frac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

15. Упростите выражение:

1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$ при $a<0$;

3) $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[3]{a^3}$ при $a>0$; 4) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a<0$.

16*. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{2ab^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3b^5}$; 2) $\sqrt[6]{ab^3c}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4c}\cdot\sqrt[6]{b^5c^4}$;

3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$.

17. Упростите выражение:

1) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}$; 2) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

3*) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[6]{ab^5}+b}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; 4*) $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{xy}}$.

18°. Решите уравнение:

1) $x^3=7$; 2) $x^6=3$; 3) $x^5=-5$;

4) $x^8=-13$; 5) $x^4=16$; 6) $x^3=-64$.

19. Постройте график функции:

1°) $y=\sqrt[4]{x}$; 2°) $y=\sqrt[5]{x}$; 3°) $y=\sqrt[7]{x}$; 4°) $y=\sqrt[6]{x}$;

5) $y=\sqrt[3]{|x|}$; 6) $y=-\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\sqrt[4]{-x}$.

20. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt[3]{x}=2-x$; 2) $\sqrt{x}=6-x$; 3) $\sqrt[3]{x-2}=4-x$; 4) $\sqrt{-x}=x+2$.

Проверьте подстановкой, что значение x действительно является корнем уравнения.

21*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 20, не имеют других корней, кроме найденных графическим путем.

§ 11 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Таблица 19

<table>
<tr><td colspan="2">Понятие иррационального уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Уравнения, в которых переменная находится под знаком корня, называются иррациональными. При решении заданное иррациональное уравнение чаще всего сводят к рациональному уравнению с помощью некоторых преобразований.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Решение иррациональных уравнений</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. С помощью возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень</td></tr>
<tr><td>При возведении обеих частей уравнения в нечетную степень получаем уравнение, равносильное заданному (на его ОДЗ)</td><td>При возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни, которые отсеиваются проверкой</td></tr>
<tr><td>Пример 1
Решите уравнение $\sqrt[3]{x-1}=2$.
▶ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$,
$x-1=8$,
$x=9$.
Ответ: 9. ◁</td><td>Пример 2
Решите уравнение $\sqrt{2x+3}=x$.
▶ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$,
$x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.
Проверка.
При $x=-1$ имеем: $\sqrt{1}=-1$ — неверное равенство, следовательно, $x=-1$ — посторонний корень.
При $x=3$ имеем: $\sqrt{9}=3$ — верное равенство, следовательно, $x=3$ — корень заданного уравнения.
Ответ: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. С помощью замены переменных</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в уравнение переменная входит в одном и том же виде, то удобно соответствующее выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пример 3
Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.
▶ Обозначим $\sqrt[3]{x}=t$. Тогда $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.
Получаем уравнение: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$.
Выполняем обратную замену: $\sqrt[3]{x}=1$, тогда $x=1$ или $\sqrt[3]{x}=-2$, отсюда $x=-8$.
Ответ: 1; −8. ◁</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

Иррациональными уравнениями называют такие уравнения, в которых переменная находится под знаком корня. Например, $\sqrt{x-2}=5$, $\sqrt[3]{x}+x=2$ — иррациональные уравнения.

Чаще всего решение иррациональных уравнений основывается на приведении данного уравнения с помощью некоторых преобразований к рациональному уравнению. Как правило, это достигается с помощью возведения обеих частей иррационального уравнения в одну и ту же степень (часто несколько раз).

Следует учитывать, что

при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень всегда получаем уравнение, равносильное заданному (на его ОДЗ).

Например, уравнение $\sqrt[3]{x+7}=3$ (1)

равносильно уравнению $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3$, (2)

то есть уравнению $x + 7 = 27$. Отсюда $x = 20$.

Для обоснования равносильности уравнений (1) и (2) достаточно обратить внимание на то, что равенства $A = B$ и $A^3 = B^3$ могут быть верными только одновременно, поскольку функция $y = t^3$ является возрастающей (на рисунке 84 приведен ее график) и каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента t. Следовательно, все корни уравнения (1) (которые обращают это уравнение в верное равенство) будут корнями и уравнения (2), и наоборот, все корни уравнения (2) будут корнями уравнения (1). А это и означает, что уравнения (1) и (2) являются равносильными. Аналогично можно обосновать равносильность соответствующих уравнений и в случае возведения обеих частей уравнения в одну и ту же произвольную нечетную степень.

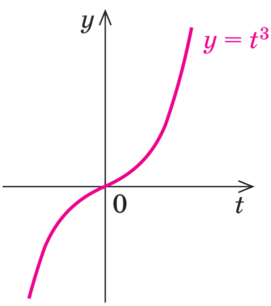


Рис. 84

Если для решения иррационального уравнения обе части возвести в четную степень, то получаем уравнение-следствие — когда все корни первого уравнения будут корнями второго, но второе уравнение может иметь корни, которые не удовлетворяют данному уравнению. Такие корни называют *посторонними* для данного уравнения. **Чтобы выяснить, являются ли полученные числа корнями данного уравнения, выполняют проверку полученных решений.**

Например, для решения уравнения

$$\sqrt{x} = 2 - x \qquad (3)$$

возведем обе его части в квадрат и получим уравнение

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (2 - x)^2. \qquad (4)$$

Учитывая, что $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, имеем $x = 4 - 4x + x^2$, то есть $x^2 - 5x + 4 = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Выполняем проверку. При $x = 1$ уравнение (3) обращается в верное равенство $\sqrt{1} = 2 - 1$, $1 = 1$. Значит, $x = 1$ является корнем уравнения (3).

При $x = 4$ получаем неверное равенство $\sqrt{4} = 2 - 4$; $2 \neq -2$. Следовательно, $x = 4$ — посторонний корень уравнения (3). То есть в ответ надо записать только $x = 1$.

Появление постороннего корня связано с тем, что равенство $A^2 = B^2$ можно получить при возведении в квадрат обеих частей равенства $A = B$ или равенства $A = -B$. Таким образом, выполнение равенства $A^2 = B^2$ еще не гарантирует выполнение равенства $A = B$. То есть корни уравнения (4) не обязательно являются корнями уравнения (3) (но, конечно, каждый корень уравнения (3) является корнем уравнения (4), поскольку при выполнении равенства $A = B$ обязательно выполняется и равенство $A^2 = B^2$).

Примеры решения задач

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4$.

Решение	*Комментарий*
▶ $\sqrt{5x-1} = 4 - \sqrt{x+3}$, $\left(\sqrt{5x-1}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{x+3}\right)^2$, $5x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3$, $8\sqrt{x+3} = 20 - 4x$; $2\sqrt{x+3} = 5 - x$, $\left(2\sqrt{x+3}\right)^2 = (5-x)^2$, $4(x + 3) = 25 - 10x + x^2$, $x^2 - 14x + 13 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 13$. *Проверка.* $x = 1$ — корень $\left(\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4, 4 = 4\right)$; $x = 13$ — посторонний корень $\left(\sqrt{16} + \sqrt{64} \neq 4\right)$. *Ответ:* 1. ◁	Изолируем один корень и возведем обе части уравнения в квадрат — так мы избавимся от одного из корней. Затем снова изолируем корень и снова возведем обе части уравнения в квадрат — получим квадратное уравнение. Поскольку при возведении в квадрат можно получить посторонние корни, то в конце выполним проверку полученных решений.

Задача 2 Решите уравнение $\frac{8}{\sqrt{6-x}}-\sqrt{6-x}=2.$

Решение	*Комментарий*
▶ Пусть $\sqrt{6-x}=t$, где $t>0$. Получаем $\frac{8}{t}-t=2.$ Тогда $t^2+2t-8=0.$ Отсюда $t_1=2$, $t_2=-4.$ $t_1=2$ — удовлетворяет условию $t>0$; $t_2=-4$ — не удовлетворяет условию $t>0$. Обратная замена дает: $\sqrt{6-x}=2,$ $6-x=4,$ $x=2.$ *Ответ:* 2. ◁	Если в данное уравнение переменная входит в одном и том же виде $\left(\sqrt{6-x}\right)$, то удобно это выражение с переменной обозначить одной буквой — новой переменной $\left(\sqrt{6-x}=t\right)$. Если зафиксировать ограничение $t>0$ (арифметическое значение $\sqrt{6-x}\geqslant 0$ и в знаменателе не может стоять 0), то в результате замены и приведения полученного уравнения к квадратному будут выполняться равносильные преобразования данного уравнения. Можно было не фиксировать ограничение $t>0$, но тогда в результате преобразований получаем уравнения-следствия, и найденные решения придется проверять.

Задача 3* Решите уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$

Решение	*Комментарий*
▶Пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{x-2}=u,\\ \sqrt{x+1}=v.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Получаем систему $\begin{cases}u+v=3,\\ u^3-v^2=-3.\end{cases}$ Из первого уравнения находим $v=3-u$ и подставляем во второе уравнение: $u^3-(3-u)^2=-3,$ $u^3-(9-6u+u^2)=-3,$ $u^3-u^2+6u-6=0,$ $u^2(u-1)+6(u-1)=0,$ $(u-1)(u^2+6)=0.$ Учитывая, что $u^2+6\neq 0$, получаем $u=1$. Тогда $v=2$.	*Некоторые иррациональные уравнения, которые содержат несколько корней n-й степени, можно привести к системе рациональных уравнений, заменив каждый корень новой переменной.* После замены $\sqrt[3]{x-2}=u$, $\sqrt{x+1}=v$ из данного уравнения получаем только одно уравнение $u+v=3$. Для получения второго уравнения запишем, что по определению корня n-й степени $\begin{cases}x-2=u^3,\\ x+1=v^2.\end{cases}$ Вычтем из первого равенства второе (чтобы избавиться от

Имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-2}=1, \\ \sqrt{x+1}=2. \end{cases}$$

Из первого уравнения $x = 3$, что удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: 3. ◁

переменной x) и получим еще одну связь между u и v: $u^3 - v^2 = -3$.

Полученную систему уравнений решаем методом подстановки.

Выполняя обратную замену, необходимо выяснить, существует ли значение x, удовлетворяющее обоим соотношениям замены.

При решении систем уравнений, содержащих иррациональные уравнения, чаще всего используются традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных. При этом следует учитывать, что *замена переменных* (*вместе с обратной заменой*) *всегда является равносильным преобразованием* (если при выбранной замене не происходит сужения ОДЗ данного уравнения или системы). Но если для дальнейшего решения уравнений, полученных в результате замены, мы будем пользоваться уравнениями-следствиями, то можно получить посторонние решения, и тогда полученные решения придется проверять.

Задача 4 Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3, \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3. \end{cases}$

Решение	*Комментарий*
▶ Замена $\sqrt[4]{x}=u$ и $\sqrt[4]{y}=v$ дает $\begin{cases} u+v=3, \\ u^2-v^2=3. \end{cases}$ Из первого уравнения этой системы $u = 3 - v$. Тогда из второго уравнения получаем $(3 - v)^2 - v^2 = 3$. Отсюда $v = 1$, тогда $u = 2$. Обратная замена дает: $\sqrt[4]{y}=1$, значит, $y = 1$; $\sqrt[4]{x}=2$, следовательно, $x = 16$.	Если обозначить $\sqrt[4]{x}=u$ и $\sqrt[4]{y}=v$, то $\sqrt{x}=u^2$ и $\sqrt{y}=v^2$. Тогда заданная система будет равносильна алгебраической системе, которую легко решить. После обратной замены получаем систему простейших иррациональных уравнений. Так как замена и обратная замена приводят к равносильным системам, то решения заданной системы совпадают с решениями системы $\begin{cases} \sqrt[4]{x}=2, \\ \sqrt[4]{y}=1, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} x=16, \\ y=1. \end{cases}$

Ответ: (16; 1). ◁

Вопросы для контроля

1. Назовите основные методы решения иррациональных уравнений. Приведите примеры применения соответствующих методов.
2. Объясните, почему для решения уравнений
$$\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$$
удобно применить замену переменной. Укажите замену для каждого уравнения.
3. Обоснуйте, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень всегда получается уравнение, равносильное заданному.
4. Объясните, почему при возведении обеих частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни. Как отсеивают посторонние корни?

Упражнения

Решите уравнение **(1–6)**.

1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$; 3°) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$;
3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$;
3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;
3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Решите систему уравнений **(7–8)**.

7. 1) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7,\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7,\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

§ 12 ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

12.1. Обобщение понятия степени

Таблица 20

1. Степень с натуральным и целым показателем	
$\boxed{a^1 = a}$	$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}}$ $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2)$
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	$\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ $a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}$
2. Степень с дробным показателем	
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$	$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0,\ n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2),\ m \in \boldsymbol{Z}$
3. Свойства степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

Объяснение и обоснование

1. Из курса алгебры 7–9 классов вам известны понятия степеней с натуральным и целым показателями. Напомним их определения и свойства.

Если n — натуральное число, большее, чем 1, то для любого действительного числа a $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}}$, то есть a^n равно произведению n сомножителей, каждый из которых равен a.

При $n = 1$ считают, что $\boxed{a^1 = a}$.

Если $a \neq 0$, то $\boxed{a^0 = 1}$ и $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$, где n — натуральное число.

Например, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

Вам известны также основные свойства степеней:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n};\quad (a^m)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n b^n;\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}.}$$

Напомним еще одно полезное свойство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Обобщим *понятия* степени для выражений вида $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$, $5^{-\frac{1}{3}}$ и т. п., то есть *для степеней с рациональными показателями*. Соответствующее определение желательно дать так, чтобы степени с рациональными показателями имели те же свойства, что и степени с целыми показателями.

Например, если мы хотим, чтобы выполнялось свойство $(a^p)^q = a^{pq}$, то должно выполняться равенство $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Но по определению корня n-й степени последнее равенство означает, что число $a^{\frac{m}{n}}$ является корнем n-й степени из числа a^m. Это приводит нас к такому определению.

Степенью числа $a>0$ с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число ($n>1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Также по определению принимаем, что при $r>0$

$$\boxed{0^r = 0}.$$

Например, по определению степени с рациональным показателем:

$$3^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9};\qquad 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5};\qquad 2^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}};\qquad 0^{\frac{2}{5}}=0.$$

З а м е ч а н и е. Значение степени с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ (где $n > 1$) не определяется при $a < 0$.

Это объясняется тем, что рациональное число r можно представить разными способами в виде дроби: $r=\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, где k — любое натуральное число.

При $a > 0$, используя основное свойство корня и определение степени с рациональным показателем, имеем: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nk}}$. Таким образом, при $a > 0$ значение a^r не зависит от формы записи r.

При $a<0$ это свойство не удается сохранить. Например, если $r=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, то должно выполняться равенство $a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{6}}$. Но при $a = -1$ получаем $a^{\frac{1}{3}}=$ $=(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$; $a^{\frac{2}{6}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1\neq-1$, то есть при отрицательных значениях a имеем $a^{\frac{1}{3}}\neq a^{\frac{2}{6}}$, и вследствие этого определение степени $a^{\frac{m}{n}}$ (где m — целое, n — натуральное, не равное 1) для отрицательных значений a обычно не вводится.

Покажем теперь, что для введенного определения степени с рациональным показателем сохраняются все свойства степеней с целыми показателями (различие состоит в том, что приведенные далее свойства являются правильными только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных чисел a и b выполняются равенства:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться определением степени с рациональным показателем и доказанными в § 10 свойствами корня n-й степени.

Пусть $r = \frac{m}{n}$ и $s = \frac{p}{q}$, где n и q — натуральные числа (большие 1), а m и p — целые.

Тогда при $a > 0$ и $b > 0$ имеем:

1) $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s = \sqrt[n]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{n}} = a^{\frac{m}{n} \cdot s} = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$.

Понятие степени с иррациональным показателем. Опишем в общих чертах, как можно определить число a^α для иррациональных α, когда $a > 1$. Например, объясним, как можно понимать значение $2^{\sqrt{3}}$.

Иррациональное число $\sqrt{3}$ можно представить в виде бесконечной десятичной непериодической дроби: $\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$. Рассмотрим десятичные приближения числа $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком:

$$1 < \sqrt{3} < 2;$$
$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8;$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74;$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733;$$
$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321;$$
$$1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206;$$
$$1{,}732050 < \sqrt{3} < 1{,}732051;$$
$$\ldots$$

Будем считать, что когда $r < \sqrt{3} < s$ (где r и s – рациональные числа), то значение $2^{\sqrt{3}}$ находится между соответствующими значениями 2^r и 2^s, а именно: $2^r < 2^{\sqrt{3}} < 2^s$. Найдем с помощью калькулятора приближенные значения 2^r и 2^s, выбирая как r и s приближенные значения $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком соответственно. Получаем соотношения:

$$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2;$$
$$2^{1,7} \approx 3{,}2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3{,}4822022;$$
$$2^{1,73} \approx 3{,}3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320} \approx 3{,}3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050} \approx 3{,}3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3{,}3219975.$$
$$\ldots$$

Как видим, значения 2^r и 2^s приближаются к одному и тому же числу $3{,}32199\ldots$ которое и считают степенью $2^{\sqrt{3}}$. Таким образом, $2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199\ldots$. Значение $2^{\sqrt{3}}$, вычисленное на калькуляторе, следующее: $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$.

Можно доказать, что всегда, когда мы выбираем рациональные числа r, которые с недостатком приближаются к иррациональному числу α, и рациональные числа s, с избытком приближающиеся к этому же иррациональному числу α, для любого $a > 1$ существует, и притом только одно, число y, которое больше, чем все a^r, и меньше, чем все a^s. Это число y по определению и есть значение a^α.

Аналогично определяется и степень с иррациональным показателем α для $0 < a < 1$, только в случае, когда $r < \alpha < s$ при $0 < a < 1$, считают, что $a^s < a^\alpha < a^r$. Кроме того, как и для рациональных показателей, по определению считают, что $\mathbf{1}^\alpha = \mathbf{1}$ для любого α и $\mathbf{0}^\alpha = \mathbf{0}$ для всех $\alpha > 0$.

Примеры решения задач

Задача 1 Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем: 1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ◁ 2) ▶ $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ◁ 3) ▶ при $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ◁ 4) ▶ $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{\lvert a\rvert^2} = \lvert a\rvert^{\frac{2}{7}}$. ◁	По определению степени с рациональным показателем для $a > 0$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. (1) Для задания 3 учтем, что выражение $a^{\frac{2}{7}}$ определено также и при $a = 0$. В задании 4 при $a < 0$ мы не имеем права пользоваться формулой (1). Но если учесть, что $a^2 = \lvert a\rvert^2$, то для основания $\lvert a\rvert$ формулой (1) уже можно воспользоваться, поскольку $\lvert a\rvert \geqslant 0$.

Задача 2 Вычислите: 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; ◁ 2) ▶ $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; ◁ 3*) ▶ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не существует, поскольку степень $a^{\frac{1}{3}}$ определена только при $a \geqslant 0$. ◁	Используем определение степени с рациональным показателем: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$. При выполнении задания 3 учитываем, что выражение $a^{\frac{m}{n}}$ не определено при $a < 0$.

Задача 3 Упростите выражение: 1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} =$	Поскольку данные примеры содержат выражения $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, то $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Тогда в задании 1 неотрицательные числа a и b можно

$$=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}; \triangleleft$$

2*) ▶ $$\frac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+3^3}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=x^{\frac{1}{3}}+3. \triangleleft$$

представить как квадраты: $a=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b=\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ и применить формулу разности квадратов: $x^2-y^2=(x-y)\times$ $\times(x+y)$, а в задании 2 представить неотрицательное число x как куб: $x=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$ и применить формулу разложения суммы кубов:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Задача 4 Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{x^2}=1$; 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$, $x^2=1$, $x=\pm1$. *Ответ:* ±1. ◁ 2*) ▶ $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x\geqslant 0$, $x^2=1$, $x=\pm1$. Учитывая ОДЗ, получаем $x=1$. *Ответ:* 1. ◁	Область допустимых значений уравнения $\sqrt[3]{x^2}=1$ — все действительные числа, а уравнения $x^{\frac{2}{3}}=1$ — только $x\geqslant 0$. При возведении обеих частей уравнения в куб получим уравнение, равносильное данному на его ОДЗ. Таким образом, первому уравнению удовлетворяют все найденные корни, а второму — только неотрицательные. (В задании 1 также учтено, что $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в задании 2 — что $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot 3}=x^2$.)

Вопросы для контроля

1. Дайте определение степени с натуральным показателем. Приведите примеры вычисления таких степеней.
2. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем и с нулевым показателем. Приведите примеры вычисления таких степеней. При каких значениях a существуют значения выражений a^0 и a^{-n}, где $n\in \boldsymbol{N}$?

3. Дайте определение степени с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное, не равное 1. Приведите примеры вычисления таких степеней. При каких значениях a существуют значения выражения $a^{\frac{m}{n}}$? Укажите область допустимых значений выражений $a^{\frac{2}{5}}$ и $a^{-\frac{2}{5}}$.
4. Запишите свойства степеней с рациональными показателями. Приведите примеры использования этих свойств.
5*. Обоснуйте свойства степеней с рациональными показателями.
6*. Объясните на примере, как можно ввести понятие степени с иррациональным показателем.

Упражнения

1°. Представьте выражение в виде корня из числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0,25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1,5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

2. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 2°) $\sqrt[5]{4}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$;

4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a>0$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b\geqslant 0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

3°. Имеет ли смысл выражение:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4. Найдите область допустимых значений выражения:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 2) x^{-3}; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$;

4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 5) $(x^2-1)^0$; 6) x^3-5.

5. Найдите значение числового выражения:

1) $243^{0,4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{-\frac{1}{3}}$; 6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}-2^{-1}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{-\frac{1}{3}}$;

7) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 7^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-3}\right):49^{-\frac{1}{2}}$.

6. Разложите на множители:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}}+(ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a-a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3+3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a+b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

7. Сократите дробь:

1) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\dfrac{p^{\frac{1}{2}}-5}{p-25}$; 3) $\dfrac{c+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}+d}{c^{\frac{3}{2}}-d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\dfrac{m+n}{m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}}}$.

Упростите выражение **(8–9)**.

8. 1) $\left(1+c^{\frac{1}{2}}\right)^2-2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{4}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}}+l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}+l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}}-l^{\frac{1}{8}}\right)$.

9. 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-4}{x-16}$; 2) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\dfrac{z-8}{z^{\frac{2}{3}}+2z^{\frac{1}{3}}+4}$; 4) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10. Решите уравнение:

1) $x^{\frac{3}{5}}=1$; 2) $x^{\frac{1}{7}}=2$; 3) $x^{\frac{2}{5}}=2$; 4) $\sqrt[5]{x^2}=2$.

12.2. Степенная функция, ее свойства и график

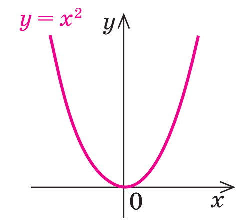
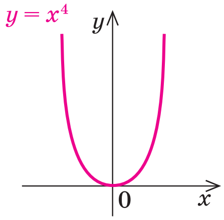
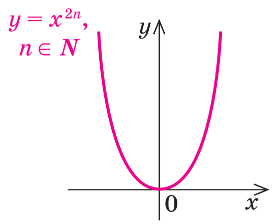
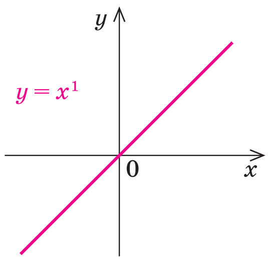
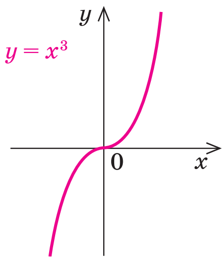
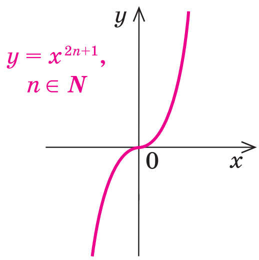
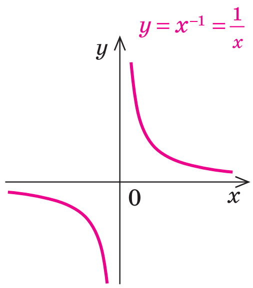
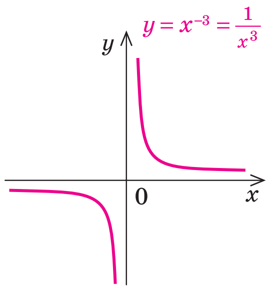
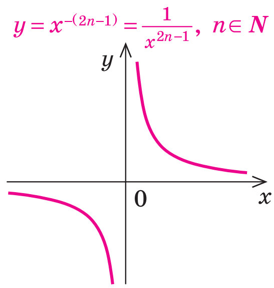
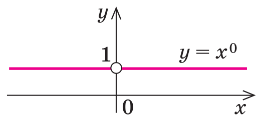
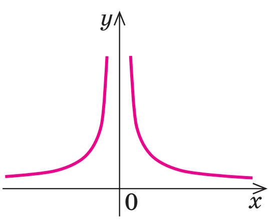
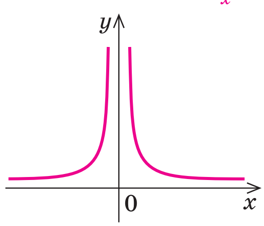
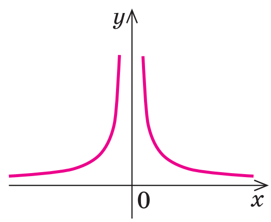
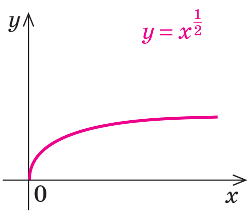
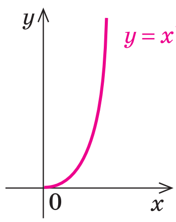
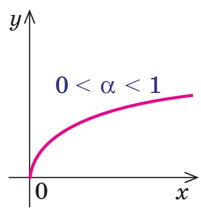
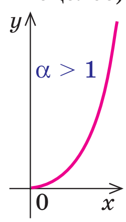
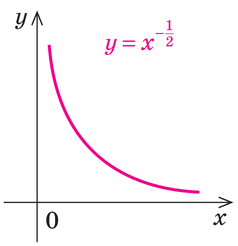
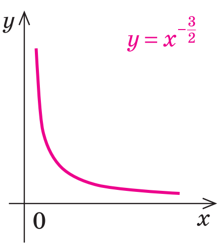
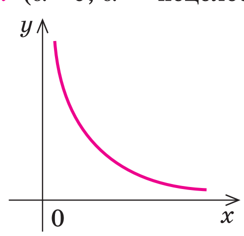
Определение. **Функция вида $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число, называется *степенной функцией*.**		
Графики и свойства		
График		
1. $y = x^{\alpha}$, α — четное натуральное число		
		
2. $y = x^{\alpha}$, α — нечетное натуральное число		
		
3. $y = x^{\alpha}$, α — нечетное отрицательное число		
		

Таблица 21

<table>
<tr><td colspan="4">Особый случай ($\alpha = 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если $\alpha = 0$, то
$y = x^{\alpha} = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$).</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="4">функции $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Свойства</td></tr>
<tr><td>$D(y)$</td><td>$E(y)$</td><td>четность и нечетность</td><td>возрастание и убывание</td></tr>
<tr><td colspan="4">($y = x^{2n}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td>R</td><td>$[0; +\infty)$</td><td>Четная</td><td>Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">($y = x$ и $y = x^{2n+1}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td><td>Нечетная</td><td>Возрастает</td></tr>
<tr><td colspan="4">($y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$)</td></tr>
<tr><td>$x \neq 0$</td><td>$y \neq 0$</td><td>Нечетная</td><td>Убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$</td></tr>
</table>

Графики и свойства		
График		
4. $y = x^{\alpha}$, α — четное отрицательное число		
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
5. $y = x^{\alpha}$,		
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое) $0 < \alpha < 1$  $\alpha > 1$ 
6. $y = x^{\alpha}$,		
$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — нецелое) 

Продолжение табл. 21

	функции $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
	Свойства			
	$\boldsymbol{D}\ (y)$	$\boldsymbol{E}\ (y)$	четность и нечетность	возрастание и убывание
	$\left(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in \boldsymbol{N}\right)$			
	$x \neq 0$	$(0;\ +\infty)$	Четная	Возрастает на промежутке $(-\infty;\ 0)$, убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$
	α — нецелое положительное число			
	$[0;\ +\infty)$	$[0;\ +\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Возрастает
	α — нецелое отрицательное число			
	$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$	Ни четная, ни нечетная	Убывает

Объяснение и обоснование

Степенными функциями называют функции вида $y = x^{\alpha}$, где α — любое действительное число.

С некоторыми из таких функций вы уже ознакомились в курсе алгебры 7–9 классов. Это, например, функции $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. При произвольном натуральном α графики и свойства функции $y = x^{\alpha}$ аналогичны известным вам графикам и свойствам указанных функций.

Описывая свойства степенных функций, выделим те характеристики функций, которые мы использовали в § 10: 1) область определения; 2) область значений; 3) четность или нечетность; 4) точки пересечения с осями координат; 5) промежутки знакопостоянства; 6) промежутки возрастания и убывания; 7) наибольшее и наименьшее значения функции.

1. Функция вида $y = x^{\alpha}$ (α — четное натуральное число). Если α — четное натуральное число, то функция $y = x^{2n}$, $n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y = x^2$.

Действительно, *область определения* функции $y = x^{2n}$: $D(y) = R$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x.

Функция *четная*: если $f(x) = x^{2n}$, то $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Таким образом, график функции $y = x^{2n}$ симметричен относительно оси Oy.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то график функции $y = x^{2n}$ всегда проходит через начало координат.

На промежутке $[0; +\infty)$ *функция возрастает.*

Действительно, для неотрицательных значений x_1 и x_2 ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, поскольку, как известно из курса алгебры 9 класса, при возведении обеих частей верного неравенства с неотрицательными членами в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство.

На промежутке $(-\infty; 0]$ *функция убывает.*

Действительно, для неположительных значений x_1 и x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), если $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (и теперь $-x_1 \geqslant 0$, $-x_2 \geqslant 0$). Тогда $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, таким образом, $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, то есть $f(x_2) < f(x_1)$.

Для нахождения области значений функции $y = x^{2n}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{2n} = a$. Оно имеет решения для всех $a \geqslant 0$ (тогда $x = \pm\sqrt[2n]{a}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Следовательно, область значений данной функции: $y \geqslant 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Таким образом, для всех действительных значений x значение $y \geqslant 0$. *Наименьшее значение* функции равно нулю ($y = 0$ при $x = 0$). *Наибольшего значения функция не имеет.*

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{2n} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{2n}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 85).

2. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нечетное натуральное число). Если α — нечетное натуральное число ($\alpha = 2n - 1$, $n \in N$), то свойства функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, аналогичны свойствам функции $y = x^3$.

Действительно, *область определения* функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$: $D(y) = R$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x.

Функция *нечетная*: если $f(x) = x^{2n-1}$, то $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$. Таким образом, график функции симметричен относительно начала координат.

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то график функции $y = x^{2n-1}$ всегда проходит через начало координат.

На всей области определения функция возрастает.

Действительно, при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, поскольку при возведении обеих частей верного неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем верное неравенство.

Для нахождения области значений функции $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{2n-1} = a$. Оно имеет решения для всех $a \in R$ (при $n = 1$ получаем $x = a$, а при $n \neq 1$, $n \in N$, получаем $x = \sqrt[2n-1]{a}$). Таким образом, область значений данной функции: $y \in R$, то есть $E(y) = R = (-\infty; +\infty)$.

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

Промежутки знакопостоянства: при $x > 0$ значение $y = x^{2n-1} > 0$,
при $x < 0$ значение $y = x^{2n-1} < 0$.

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{2n-1} = 1$.

Как известно из курса алгебры и геометрии, графиком функции $y = x^1 = x$ является прямая, проходящая через начало координат (рис. 86), а при других нечетных натуральных α функция $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, имеет график, аналогичный графику функции $y = x^3$ (рис. 87).

3. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нечетное отрицательное число). Если α — нечетное отрицательное число, то функция $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y = \frac{1}{x}$.

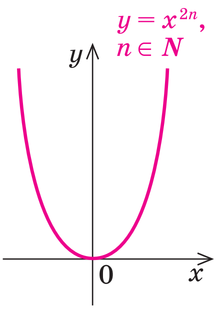


Рис. 85

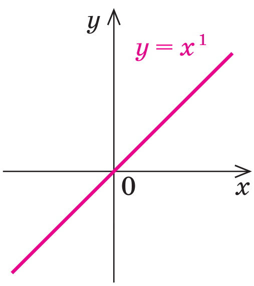
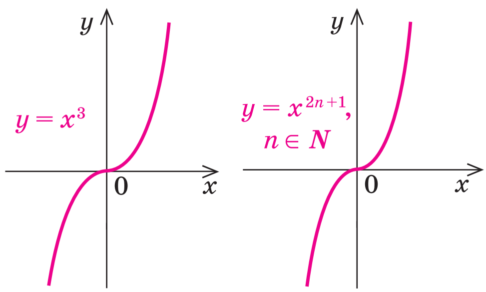


Рис. 86



а *б*

Рис. 87

Действительно, область определения функции $y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$: $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x, кроме $x = 0$.

Функция *нечетная*: при $x \neq 0$, если $f(x) = x^{-(2n-1)}$, то

$$f(-x) = (-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)} = -f(x).$$

Таким образом, график функции симметричен относительно начала координат. Учитывая, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ $\left(y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}} \neq 0\right)$, получаем, что *график функции* $y = x^{-(2n-1)}$ *не пересекает оси координат.*

На промежутке $(0;\ +\infty)$ *функция убывает.*

Действительно, для положительных значений x_1 и x_2 $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, тогда $\dfrac{1}{x_2^{2n-1}} < \dfrac{1}{x_1^{2n-1}}$, следовательно, $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$.

На промежутке $(-\infty;\ 0)$ *функция также убывает.* Это следует из того, что ее график симметричен относительно начала координат.

Приведем аналитическое обоснование: если $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (и теперь $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тогда по обоснованному выше $(-x_2)^{-2(n-1)} > (-x_1)^{-2(n-1)}$, таким образом, $-x_2^{-(2n-1)} > -x_1^{-(2n-1)}$. Отсюда $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$.

Для нахождения *области значений* функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{-(2n-1)} = a$, то есть $\dfrac{1}{x^{2n-1}} = a$. Оно имеет решения для всех $a \neq 0$ (тогда $x = \sqrt[2n-1]{\dfrac{1}{a}}$ при $n \neq 1$ и $x = \dfrac{1}{a}$ при $n = 1$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, область значений заданной функции: $y \neq 0$, то есть

$$E(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty).$$

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

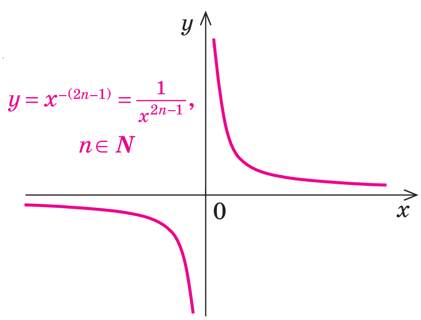


Рис. 88

Промежутки знакопостоянства: при $x > 0$ значение $y = x^{-(2n-1)} > 0$, а при $x < 0$ значение $y = x^{-(2n-1)} < 0$. Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{-(2n-1)} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 88).

4. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — четное отрицательное число). Если α — четное отрицательное число, то функция $y = x^{-2n}$,

$n \in N$, имеет свойства и график, полностью аналогичные свойствам и графику функции $y=\frac{1}{x^2}$.

Действительно, *область определения* функции $y=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}$: $x \neq 0$, то есть $D(y) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, поскольку значение этой функции можно вычислить при любых значениях x, кроме $x = 0$.

Функция *четная*: при $x \neq 0$, если $f(x) = x^{-2n}$, то $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$. Таким образом, график функции симметричен относительно оси Oy.

Учитывая, что при $x \neq 0$ значение $y=x^{-2n}=\frac{1}{x^{2n}}>0$, получаем, что *график функции $y = x^{2n}$ не пересекает оси координат.*

На промежутке $(0;\ +\infty)$ *функция убывает.*

● Действительно, для положительных значений x_1 и x_2 ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, тогда $\frac{1}{x_2^{2n}} < \frac{1}{x_1^{2n}}$, следовательно, $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$. ○

На промежутке $(-\infty;\ 0)$ *функция возрастает.*

● Это следует из того, что ее график симметричен относительно оси Oy. Приведем также и аналитическое обоснование: если $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (и теперь $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тогда по обоснованному выше $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$, следовательно, $x_2^{-2n} > x_1^{-2n}$. ○

Для нахождения области значений функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$, составим уравнение $x^{-2n} = a$, то есть $\frac{1}{x^{2n}}=a$. Оно имеет решения для всех $a > 0$ $\left(\text{тогда } x=\pm\sqrt[2n]{\frac{1}{a}}\right)$ и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, *область значений* заданной функции: $y > 0$, то есть $E(y) = (0;\ +\infty)$.

Поэтому *наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.*

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{-2n} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{-2n}$, $n \in N$, получаем ее график (рис. 89).

5. Функция $y = x^{\alpha}$ (α — нецелое положительное число). Если α — нецелое положительное число, то функция $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое) имеет *область определения:* $x \geqslant 0$, то есть $D(y) = [0;\ +\infty)$, поскольку значение степени с положительным нецелым показателем определено только для неотрицательных значений x.

Тогда область определения несимметрична относительно точки 0, и функция не может быть *ни четной, ни нечетной.*

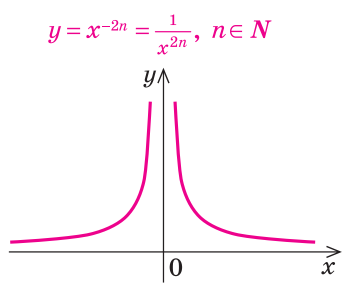


Рис. 89

Поскольку при $x = 0$ значение $y = 0$, то *график функции* $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *всегда проходит через начало координат*. При $x > 0$ значение $y = x^\alpha > 0$.

Можно обосновать, что *на всей области определения функция* $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ *является возрастающей*.

Для нахождения области значений функции $y = x^\alpha$ составим уравнение $x^\alpha = a$. Оно имеет решения для всех $a \geqslant 0$ (тогда $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции. Таким образом, область значений данной функции: $y \geqslant 0$, то есть $E(y) = [0; +\infty)$.

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^\alpha = 1$.

При изображении графика функции $y = x^\alpha$ $(\alpha > 0$, α — нецелое) следует учитывать, что при $0 < \alpha < 1$ график имеет вид, аналогичный графику $y = \sqrt{x}$ (рис. 90)[1], а при $\alpha > 1$ — аналогичный правой ветви графика $y = x^2$ (рис. 91).

6. Функция $y = x^\alpha$ (α — нецелое отрицательное число). Если α — нецелое отрицательное число, то функция $y = x^\alpha$ $(\alpha < 0$, α — нецелое) имеет область определения: $x > 0$ $(D(y) = (0; +\infty))$, поскольку значение степени с отрицательным нецелым показателем определено только для положительных значений x.

Тогда область определения несимметрична относительно точки 0, и функция не может быть *ни четной, ни нечетной*.

Учитывая, что при $x > 0$ значения $y = x^\alpha > 0$ (то есть $x \neq 0$ и $y \neq 0$), получаем, что *график функции* $y = x^\alpha$ $(\alpha < 0)$ *не пересекает оси координат*.

На промежутке $(0; +\infty)$ *функция убывает*, то есть для положительных значений x_1 и x_2 $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ при $x_2 > x_1$ получаем $x_2^\alpha < x_1^\alpha$.

● Докажем это, например, для случая, когда α — отрицательное рациональное нецелое число $\left(\alpha = -\frac{m}{n}\right.$ — нецелое, $m \in N$, $n \in N$). При положительных значениях x_1 и x_2 $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ при $x_2 > x_1$, учитывая результаты исследования функции $y = x^\alpha$ при целом отрицательном α, получаем $x_2^{-m} < x_1^{-m}$. Далее, учитывая то, что функция $y = \sqrt[n]{t}$ при положительных значениях t является возрастающей, имеем $\sqrt[n]{x_2^{-m}} < \sqrt[n]{x_1^{-m}}$, тогда $x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}}$. ○

Можно обосновать, что и в том случае, когда α — отрицательное иррациональное число, функция $y = x^\alpha$ также убывает на всей области определения (то есть при $x > 0$).

Для нахождения области значений функции $y = x^\alpha$ составим уравнение $x^\alpha = a$. Оно имеет решения для всех $a > 0$ (тогда $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) и только при таких значениях a. Все эти числа и составят область значений функции.

Таким образом, область значений заданной функции: $y > 0$, то есть

$$E(y) = (0; +\infty).$$

---

[1] Это более детально обосновано в учебнике для 11 класса.

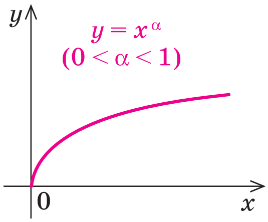


Рис. 90

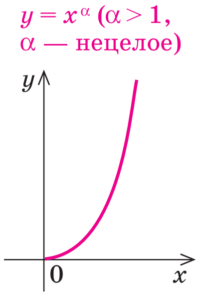


Рис. 91

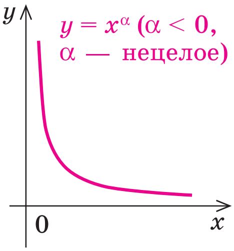


Рис. 92

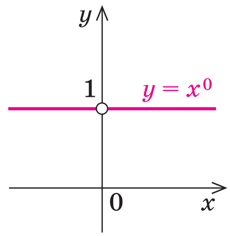


Рис. 93

Отметим также, что при $x = 1$ значение $y = 1^{\alpha} = 1$.

Учитывая свойства функции $y = x^{\alpha}$ $(\alpha < 0)$, получаем ее график (рис. 92).

Особый случай. Если $\alpha = 0$, то функция $y = x^{\alpha} = x^0 = 1$ при $x \neq 0$ (напомним, что 0^0 — не определено) и ее график — прямая $y = 1$ без точки (0; 1) (рис. 93).

Примеры решения задач

Задача 1 Найдите область определения функции:

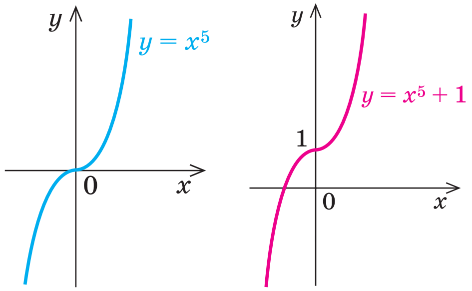
1) $y=(x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ $x - 3 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 3$, значит, $D(y) = [3; +\infty)$. ◁ 2) ▶ $x + 1 > 0$, то есть $x > -1$, следовательно, $D(y) = (-1; +\infty)$. ◁	Учтем, что выражение $a^{\frac{1}{3}}$ определено при $a \geqslant 0$, а выражение $a^{-\frac{1}{2}}$ — только при $a > 0$.

Задача 2 Постройте график функции:

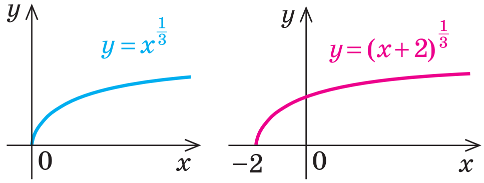
1) $y = x^5 + 1$; 2) $y=(x+2)^{\frac{1}{3}}$.

Решение	*Комментарий*
1) ▶ Строим график функции $y = x^5$, (рис. 94, *а*), а затем параллельно переносим его вдоль оси Oy на +1 (рис. 94, *б*). ◁ 2) ▶ Строим график функции $y=x^{\frac{1}{3}}$, (рис. 95, *а*), а затем параллельно переносим его вдоль оси Ox на −2 (рис. 95, *б*). ◁	Графики данных функций можно получить из графиков функций: 1) $y = x^5$, 2) $y=x^{\frac{1}{3}}$ с помощью параллельного переноса: 1) на +1 вдоль оси Oy; 2) на −2 вдоль оси Ox.



а *б*

Рис. 94



а *б*

Рис. 95

Вопросы для контроля

1. Пользуясь графиком соответствующей функции, охарактеризуйте свойства функции вида $y = x^{\alpha}$, если: 1) α — четное натуральное число; 2) α — нечетное натуральное число; 3) α — нечетное отрицательное число; 4) α — четное отрицательное число; 5) α — нецелое отрицательное число; 6) α — нецелое положительное число.

2*. Обоснуйте свойства степенной функции в каждом из случаев, указанных в задании 1.

Упражнения

1. Найдите область определения функции:

1°) $y = x^7$; 2°) $y = x^{-3}$; 3°) $y = (x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4°) $y = x^{-\frac{2}{7}}$; 5) $y = (x^2 - x)^{\frac{5}{3}}$; 6) $y = (x^2 - x + 1)^{-\frac{9}{2}}$.

2. Постройте график функции:

1°) $y = x^4$; 2°) $y = x^7$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{-4}$; 5) $y = x^{\frac{1}{4}}$;

6) $y = x^{\frac{5}{4}}$; 7) $y = (x + 1)^4$; 8*) $y = x^{\frac{1}{5}} - 3$; 9*) $y = |x|^{\frac{1}{3}}$; 10*) $y = |x^5 - 1|$.

3. Постройте и сравните графики функций:

1) $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = x^{\frac{1}{4}}$.

4. Решите графически уравнение:

1) $x^{\frac{1}{2}} = 6 - x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}} = x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}} = 2 - x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}} = 2x - 1$.

Проверьте подстановкой, что значение x действительно является корнем уравнения.

5*. Докажите, что уравнения, приведенные в задании 4, не имеют других корней, кроме найденных графически.

§ 13 ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

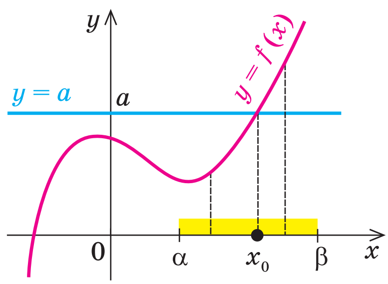
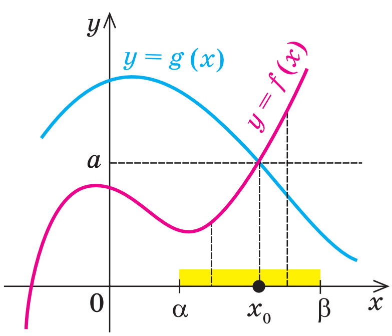
13.1. Применение свойств функций к решению иррациональных уравнений

Напомним основные идеи, которые используются при решении уравнений с помощью свойств функций.

Таблица 22

<table>
<tr><td colspan="2">1. Конечная ОДЗ</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.</td><td>Решите уравнение
$$\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18.$$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 6-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 3. \end{cases}$
Следовательно, ОДЗ: $x = 3$.
Проверка. $x = 3$ — корень
$$\left(\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18; 18=18\right).$$ Других корней нет, так как ОДЗ принадлежит только одно число.
Ответ: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Оценка значений левой и правой частей уравнения</td></tr>
<tr><td>Ориентир</td><td>Пример</td></tr>
<tr><td>$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a, \\ \hline g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$$ Если требуется решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство между левой и правой частями уравнения возможно лишь в случае, если $f(x)$ и $g(x)$ одновременно равны a.</td><td>Решите уравнение
$$\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4.$$ ▶ Запишем заданное уравнение так:
$$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4),$$ $$\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2,$$ $$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0,$$ $$g(x)=-(x-2)^2\leqslant 0.$$ Итак, заданное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-5x+6}=0, \\ -(x-2)^2=0. \end{cases}$$ Из второго уравнения получаем $x=2$, что удовлетворяет и первому уравнению.
Ответ: 2. ◁</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 22

<table>
<tr><td colspan="2">3. Использование монотонности функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема решения уравнения</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Подбираем один или несколько корней уравнения.
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку левой и правой частей уравнения).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Теоремы о корнях уравнения</td></tr>
<tr><td>1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}=3$ имеет единственный корень $x = 1$ $\left(\sqrt{1}+2\cdot\sqrt[3]{1}=3,\right.$ то есть $3 = 3$), поскольку функция $f(x)=\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей области определения $x \geqslant 0$) как сумма двух возрастающих функций</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.
Пример
Уравнение $\sqrt{x}=6-x$ имеет единственный корень $x = 4$ $\left(\sqrt{4}=6-4,\right.$ $2 = 2$), поскольку $f(x)=\sqrt{x}$ возрастает (при $x \geqslant 0$), а $g(x) = 6 - x$ убывает</td></tr>
</table>

Объяснение и обоснование

1. Использование конечности ОДЗ для решения иррациональных уравнений. Основными способами решения иррациональных уравнений, которые используются в курсе алгебры и начал анализа, являются выполнение равносильных преобразований уравнений или получение уравнений-следствий, позволяющих привести данное уравнение к рациональному. Но иногда полученное рациональное уравнение оказывается сложным для решения. Например, уравнение $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$, приведенное в пункте 1 таблицы 22, можно привести к рациональному, изолируя $\sqrt[4]{6-2x}$ и возводя обе части в четвертую степень, а затем изолируя выражение, содержащее $\sqrt{x-3}$, и возводя обе части в квадрат. Но в результате мы получим полное уравнение шестнадцатой степени. В таких ситуациях попробуем применить известные нам методы решения уравнений, связанные с использованием свойств функций. В частности, в рассматриваемом уравнении ОДЗ определяется условиями $\begin{cases} x-3\geqslant 0,\\ 6-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Отсюда получаем только одно значение $x = 3$, принадлежащее ОДЗ. Поскольку любой корень уравнения принадлежит его ОДЗ, достаточно проверить, являются ли числа, входящие в ОДЗ, корнями данного уравнения. Проверка показывает, что $x = 3$ — корень. Других корней быть не может, поскольку ОДЗ уравнения состоит только из одного значения $x = 3$.

Отметим, что в том случае, **когда ОДЗ данного уравнения — пустое множество (не содержит ни одного числа)**, мы даже без проверки можем дать ответ, что **уравнение не имеет корней**. Например, если требуется решить уравнение $\sqrt{x-3}=\sqrt[6]{2-x}+5x$, то его ОДЗ задается системой $\begin{cases} x-3\geqslant 0,\\ 2-x\geqslant 0,\end{cases}$ то есть системой $\begin{cases} x\geqslant 3,\\ x\leqslant 2,\end{cases}$ не имеющей решений. Таким образом, ОДЗ данного уравнения не содержит ни одного числа, и поэтому это уравнение не имеет корней.

2. Оценка значений левой и правой частей уравнения. Иногда в тех случаях, когда иррациональное уравнение приводится к громоздкому рациональному (или совсем не приводится к рациональному), целесообразно попробовать оценить значения функций, которые стоят в левой и правой частях уравнения.

Например, чтобы решить уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x+1}=1, \qquad (1)$$

достаточно найти его ОДЗ: $x\geqslant 0$ и с помощью равносильных преобразований записать его в виде: $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=1-\sqrt[8]{x+1}$. В левой части последнего уравнения стоит функция $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\geqslant 0$ на всей области определения, а в правой — функция $g\ (x)\ =1-\sqrt[8]{x+1}\ \leqslant 0$ при всех значениях x с ОДЗ (поскольку при $x\geqslant 0$ $\sqrt[8]{x+1}\geqslant 1$). Тогда равенство между левой и правой частями уравнения возможно только в том случае, когда они одновременно равны нулю. Таким образом, уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=0,\\ g(x)=0,\end{cases} \text{ то есть системе } \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0,\\ 1-\sqrt[8]{x+1}=0.\end{cases} \qquad (2)$$

Решим сначала первое уравнение этой системы. Учтем, что $\sqrt{x} \geqslant 0$ и $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$. **Сумма двух неотрицательных функций может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно нулю.** Таким образом, уравнение $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} \sqrt{x} = 0, \\ \sqrt[4]{x} = 0, \end{cases}$ имеющей единственное решение $x = 0$. Это решение удовлетворяет и второму уравнению системы (2) (действительно: $1 - \sqrt[8]{0+1} = 0$, $0 = 0$). Следовательно, система (2) также имеет только одно решение $x = 0$. Значит, и уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$.

3. Использование монотонности функций. Еще одним способом решения тех иррациональных уравнений, которые приводятся к громоздким рациональным, является использование возрастания или убывания соответствующих функций. Чаще всего это делается по такой схеме:

1) *подбираем один или несколько корней уравнения;*

2) *доказываем, что других корней это уравнение не имеет.*

Обоснование соответствующих свойств приведено в пункте 3.2 раздела 1, а примеры использования этого приема для решения иррациональных уравнений — в таблице 22.

Упражнения

Решите уравнение **(1–4)** и системы уравнений **(5)**, используя свойства соответствующих функций.

1. 1) $\sqrt[6]{x^2-1} + x^2 = \sqrt[4]{2-2x^2} + x + 2$;

2) $2x + \sqrt{x^2-5x+6} = x^2 + \sqrt[8]{10x-2x^2-12} - 3$.

2. 1) $\sqrt[4]{16+x^2} = 2 - \sqrt{x^3+x}$; 2) $1 + \left|x - \sqrt{x}\right| = \sqrt[6]{1-|x|}$;

3) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 - x - x^2$; 4) $\sqrt[4]{x-2} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}} = 2 - |x-3|$.

3. 1) $\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x^2-1} + \sqrt[6]{x^3-1} = 0$; 2) $\left|\sqrt{x}-2\right| + \left|\sqrt{y}-5\right| + \sqrt[4]{xy-100} = 0$.

4. 1) $\sqrt{x-7} + \sqrt[3]{x} = 3$; 2) $\sqrt[4]{x+12} + \sqrt[3]{x-3} = 3$;

3) $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x+2} = 6 - \sqrt[4]{8x}$; 4) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} = \dfrac{2}{x}$.

5. 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}, \\ 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - \sqrt[3]{y} = y^3 - \sqrt[3]{x}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

13.2. Примеры использования других способов решения иррациональных уравнений

Если при решении иррациональных уравнений мы используем уравнения-следствия (как в § 11), то в конце приходится выполнять проверку полученных корней. Но в тех случаях, когда эти решения — не рациональные числа, проверка с помощью подстановки полученных значений в исходное уравнение является достаточно сложной и требующей громоздких вычислений. Для таких уравнений приходится применять равносильные преобразования на каждом шагу решения. При этом необходимо помнить, что все равносильные преобразования уравнений или неравенств выполняются на ОДЗ данного уравнения или неравенства (пункт 3.1), поэтому, выполняя равносильные преобразования иррациональных уравнений, приходится учитывать ОДЗ данного уравнения. Достаточно часто в этих случаях используются также следующие рассуждения: *для всех корней данного уравнения знаки левой и правой частей уравнения совпадают*, поскольку при подстановке в данное уравнение числа, которое является его корнем, получаем верное числовое равенство. Используя последнее рассуждение, часто удается получить какое-нибудь дополнительное условие для корней данного уравнения и выполнить равносильные преобразования не на всей ОДЗ данного уравнения, а на некоторой его части.

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1$.

Решение	*Комментарий*
▶ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$ Решение этой системы: $x\geqslant -\frac{1}{2}$. На ОДЗ данное уравнение равносильно уравнениям: $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$, $\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2$, $2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1$, $x-1=2\sqrt{x+1}$. (1) Для всех корней уравнения (1) $x-1\geqslant 0$. (2) При этом условии уравнение (1) равносильно уравнениям: $(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2$, $x^2-2x+1=4(x+1)$, $x^2-6x-3=0$.	Выполним равносильные преобразования данного уравнения. Учитывая, что все равносильные преобразования выполняются на ОДЗ данного уравнения, зафиксируем его ОДЗ. При переносе члена $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ из левой части уравнения в правую с противоположным знаком получаем уравнение, равносильное данному. В уравнении $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ обе части неотрицательные, следовательно, при возведении обеих частей в квадрат получим уравнение, равносильное данному, которое, в свою очередь, равносильно уравнению (1). Для всех корней уравнения (1) оно является верным числовым равенством. В этом равенстве правая часть $\left(2\sqrt{x+1}\geqslant 0\right)$, — неотрицательное

Тогда $x=3\pm2\sqrt{3}$.

$x_1=3+2\sqrt{3}$ принадлежит ОДЗ и удовлетворяет условию (2), таким образом, является корнем данного уравнения; $x_2=3-2\sqrt{3}$ принадлежит ОДЗ, но не удовлетворяет условию (2), а значит, не является корнем данного уравнения.

Ответ: $3+2\sqrt{2}$. ◁

число, тогда и левая часть является неотрицательным числом, то есть $x - 1 \geqslant 0$ для всех корней. Тогда при условии (2) обе части уравнения (1) неотрицательные, таким образом, при возведении обеих частей в квадрат получаем равносильное уравнение. Но после нахождения корней этого уравнения необходимо проверить не только то, входят ли они в ОДЗ, но и удовлетворяют ли они условию (2). Для такой проверки достаточно взять приближенные значения корней $x_1 \approx 6{,}4$ и $x_2 \approx -0{,}4$.

Задача 2 Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+2$.

Комментарий

Замена $\sqrt{x-1}=t$ позволяет заметить, что каждое выражение, стоящее под знаком внешнего квадратного корня, является квадратом двучлена.

Применяя формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, получаем уравнение с модулями, для решения которого используем *план:*

1) *найти ОДЗ;*
2) *найти нули всех подмодульных функций;*
3) *отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;*
4) *найти решения уравнения в каждом из промежутков.*

Решение

▶ Пусть $\sqrt{x-1}=t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $x - 1 = t^2$, $x = t^2 + 1$.

Получаем уравнение $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+1-2t}=t^2+3$,

которое можно записать так: $\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-1)^2}=t^2+3$. Отсюда

$$|t-2|+|t-1|=t^2+3. \quad (1)$$

1) ОДЗ уравнения (1): любое $t \in \boldsymbol{R}$, но по смыслу задания это уравнение необходимо решить при $t \geqslant 0$.
2) Нули подмодульных функций: $t = 2$ и $t = 1$.
3) Эти нули разбивают область $t \geqslant 0$ на три промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (рис. 96).

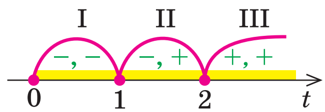


Рис. 96

Промежуток I. При $t \in [0; 1]$ имеем уравнение

$$-(t-2)-(t-1)=t^2+3.$$

Тогда $t^2 + 2t = 0$, $t = 0$ или $t = -2$, но промежутку $[0; 1]$ принадлежит только $t = 0$.

Промежуток II. При $t \in [1;\ 2]$ имеем уравнение

$-(t-2)+(t-1)=t^2+3$, равносильное уравнению $t^2=-2$, не имеющему корней. Таким образом, на промежутке $[1;\ 2]$ корней нет.

Промежуток III. При $t \in [2;\ +\infty)$ имеем уравнение $(t-2)+(t-1)=$ $=t^2+3$, из которого получаем уравнение $t^2-2t+6=0$, не имеющее корней. Таким образом, на промежутке $[2;\ +\infty)$ корней нет.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод, что уравнение (1) имеет только один корень $t=0$.

Выполняя обратную замену, получаем $\sqrt{x-1}=0$, откуда $x=1$.

Ответ: 1. ◁

Задача 3 Решите уравнение $\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0$.

Решение

▶ Поскольку $x=6$ не является корнем данного уравнения, то при делении обеих частей уравнения на $\sqrt[3]{(x-6)^2}\neq 0$ получаем равносильное уравнение

$$1-3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}+2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2}=0.$$

После замены $t=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$ имеем уравнение $2t^2-3t+1=0$, корни которого

$$t_1=1,\quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Выполнив обратную замену, получаем:

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=1 \text{ или } \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2x+3}{x-6}=1 \text{ или } \frac{2x+3}{x-6}=\frac{1}{8},$$

$$x=-9 \text{ или } x=-2.$$

Ответ: -9; -2. ◁

Комментарий

Если выполнить замену $\sqrt[3]{x-6}=u$, $\sqrt[3]{2x+3}=v$, то получим *уравнение* $u^2-3uv+2v^2=0$, *все члены которого имеют одинаковую суммарную степень*[1] — два. Такое уравнение называется *однородным и решается делением обеих частей на наивысшую степень одной из переменных.* Разделим обе части, например, на u^2 (то есть на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$).

Чтобы при делении на выражение с переменной не потерять корни уравнения, необходимо те значения переменной, при которых это выражение равно нулю, рассмотреть отдельно. В данном уравнении надо подставить значение $x=6$ в исходное уравнение (это можно выполнить устно, а в решение записать только полученный результат). Для реализации полученного плана решения не обязательно вводить переменные u и v, достаточно заметить, что исходное уравнение однородное, разделить обе части на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$, а уже затем ввести новую переменную t.

[1] В определении однородного уравнения не учитывается член 0, который не имеет степени.

Вопросы для контроля

1. Объясните, какие ограничения придется наложить на переменную x, чтобы решить уравнение $\sqrt{x-2}=x-6$ с помощью равносильных преобразований.
2. Приведите пример однородного иррационального уравнения. Составьте план его решения.

Упражнения

1. Решите иррациональное уравнение с помощью равносильных преобразований:

1) $\sqrt{3x-2}=5-x$; 2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

Решите уравнение **(2–5)**.

2. 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$; 2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

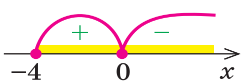
3. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

4. 1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

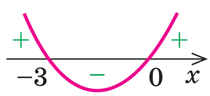
5. 1) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

§ 14 РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Таблица 23

Ориентир	Пример
1. Метод интервалов (для неравенств вида $f(x) \geqslant 0$)	
1) Найти ОДЗ неравенства. **2) Найти нули функции $f(x)$ ($f(x)=0$).** **3) Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак функции в каждом из промежутков, на которые разбивается ОДЗ.** **4) Записать ответ, учитывая знак неравенства**	Решите неравенство $\sqrt{x+4}>x+2$. ▶ Заданное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+4}-x-2>0$. Обозначим $f(x)=\sqrt{x+4}-x-2$. ОДЗ: $x+4\geqslant 0$, то есть $x\geqslant -4$. Нули $f(x)$: $\sqrt{x+4}-x-2=0$, $\sqrt{x+4}=x+2$, $x+4=x^2+4x+4$, $x^2+3x=0$, $x_1=0$ — корень, $x_2=-3$ — посторонний корень.  *Ответ:* $[-4; 0)$. ◁

Продолжение табл. 23

2. Равносильные преобразования	
1) При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного неравенства)	Решите неравенство $\sqrt[3]{x+2}<-1$. ▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. Данное неравенство равносильно неравенствам: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3<(-1)^3$, $x+2<-1$, $x<-3$. *Ответ:* $(-\infty;\ -3)$. ◁
2) Если обе части неравенства неотрицательны, то при возведении обеих частей неравенства в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ заданного неравенства)	Решите неравенство $\sqrt[4]{2x-6}<1$. ▶ ОДЗ: $2x-6\geqslant 0$, то есть $x\geqslant 3$. Обе части данного неравенства неотрицательны, следовательно, данное неравенство равносильно (на его ОДЗ) неравенствам: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4<1^4$, $2x-6<1$, $x<\frac{7}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем $$3\leqslant x<\frac{7}{2}.$$ *Ответ:* $\left[3;\ \frac{7}{2}\right)$. ◁
3) Если на ОДЗ заданного неравенства какая-либо часть неравенства может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то прежде чем возводить обе части неравенства в четную степень, эти случаи необходимо рассмотреть отдельно Например, $$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^{2k}(x)\end{cases} \text{или} \begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$$ $$\sqrt[2k]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^{2k}(x)\end{cases}$$	Решите неравенство $\sqrt{x+4}>x+2$. ▶ Данное неравенство равносильно совокупности систем: $$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2>(x+2)^2\end{cases} \text{или} \begin{cases}x+4\geqslant 0,\\ x+2<0.\end{cases}$$ Тогда $\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x^2+3x<0\end{cases}$ или $\begin{cases}x\geqslant -4,\\ x<-2.\end{cases}$ Решив неравенство $x^2+3x<0$, имеем $-3<x<0$.  Учитывая неравенство $x\geqslant -2$, получаем решение первой системы: $-2\leqslant x<0$. Решение второй системы: $-4\leqslant x<-2$. Объединяя эти решения, получаем ответ. *Ответ:* $[-4;\ 0)$. ◁

Объяснение и обоснование

1. Решение иррациональных неравенств методом интервалов. Общая схема решения неравенств методом интервалов объяснена в § 4 раздела 1, а пример применения метода интервалов к решению иррациональных неравенств приведен в таблице 23.

2. Равносильные преобразования иррациональных неравенств. Когда для решения иррациональных неравенств используются равносильные преобразования, то чаще всего с помощью возведения обеих частей неравенства в одну и ту же степень данное неравенство приводится к рациональному неравенству. При этом необходимо иметь в виду следующие свойства:

1) Если обе части неравенства приходится возводить в нечетную степень, то воспользуемся тем, что *числовые неравенства* $A > B$ *и* $A^{2k+1} > B^{2k+1}$ *или одновременно верны, или одновременно неверны.* Тогда каждое решение неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

(которое обращает это неравенство в верное числовое неравенство) будет также и решением неравенства

$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \qquad (2)$$

и, наоборот, каждое решение неравенства (2) будет также и решением неравенства (1), то есть неравенства (1) и (2) — равносильны. Таким образом, **при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного).**

Например,

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)}$$

2) Аналогично, *если числа* A *и* B *неотрицательны* ($A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$), *то числовые неравенства* $A > B$ *и* $A^{2k} > B^{2k}$ также *или одновременно верны, или одновременно неверны*. Повторяя предыдущие рассуждения, имеем: **если обе части неравенства неотрицательные, то при возведении обеих частей неравенства в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного).**

Например, рассматривая неравенство

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \qquad (3)$$

на его ОДЗ, где $f(x) \geqslant 0$, замечаем, что для всех решений неравенства (3) левая часть неотрицательна (арифметический корень $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$) и неравенство (3) может выполняться только при условии

$$g(x) > 0. \qquad (4)$$

Если выполняется условие (4), то обе части неравенства (3) неотрицательны и при возведении в четную степень $2k$ получаем неравенство, равносильное данному: $f(x) < g^{2k}(x)$ (при условии, что учитывается ОДЗ данного неравенства и условие (4)). Таким образом,

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}}$$

3) Если с помощью равносильных преобразований требуется решить неравенство

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \qquad (5)$$

на его ОДЗ, где $f(x) \geqslant 0$, то для правой части этого неравенства рассмотрим два случая: а) $g(x) < 0$; б) $g(x) \geqslant 0$.

а) При $g(x) < 0$ неравенство (5) выполняется для всех x из ОДЗ данного неравенства, то есть при $f(x) \geqslant 0$.

б) При $g(x) \geqslant 0$ обе части неравенства (5) неотрицательны, и при возведении в четную степень $2k$ получаем неравенство, равносильное данному:

$$f(x) > g^{2k}(x). \qquad (6)$$

Отметим, что для всех решений неравенства (6) ограничение ОДЗ данного неравенства $f(x) \geqslant 0$ выполняется автоматически; таким образом, при $g(x) \geqslant 0$ достаточно записать только неравенство (6).

Объединяя полученные результаты, делаем вывод:

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}}$$

Примеры решения задач

Задача 1 Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Комментарий

Приведем неравенство к виду $f(x) > 0$ и решим его методом интервалов.

Для нахождения нулей функции $f(x)$ используем уравнения-следствия. Чтобы исключить посторонние корни, выполним проверку полученных корней.

Решение:

▶ Данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$.

Обозначим $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$ то есть $x \geqslant 1$.

2. Нули функции $f(x)$: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0$. Тогда
$$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1},\ \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2,$$
$$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=2x-1,\ 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=3.$$
Возводим обе части последнего уравнения в квадрат:
$$4(x+3)(x-1)=9,\ 4x^2+8x-21=0,$$
$$x_1=\frac{3}{2}=1{,}5 \text{ — корень},\ x_2=-\frac{7}{2} \text{ — посторонний корень.}$$
3. Разбиваем ОДЗ точкой 1,5 на два промежутка и находим знак $f(x)$ в каждом из промежутков (рис. 97).

Ответ: [1; 1,5). ◁

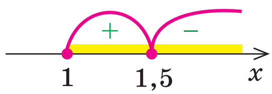


Рис. 97

Задача 2 Решите неравенство $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$.

1 способ (метод интервалов)

Комментарий

Приведем данное неравенство к виду $f(x)>0$ и решим его методом интервалов. При нахождении ОДЗ данного неравенства для решения неравенства $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ также используем метод интервалов (ОДЗ: $x\neq 0$; $\frac{x^3+8}{x}=0$ при $x=-2$).

Для нахождения нулей функции $f(x)$ используем уравнения-следствия.

Хотя функция $f(x)$ не имеет нулей, но и в этом случае метод интервалов можно использовать. Только в этом случае интервалы знакопостоянства функции $f(x)$ совпадают с интервалами, из которых состоит ее область определения.

Решение

▶ Данное неравенство равносильно неравенству
$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2>0. \qquad (1)$$
Обозначим $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2$.

1. ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ Решим неравенство $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ методом интервалов (рис. 98).
Получаем: $x\in(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$.

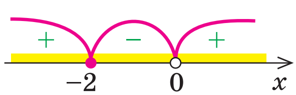


Рис. 98

2. Нули функции $f(x)$: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2=0$. Тогда:

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}=x-2,\quad \frac{x^3+8}{x}=x^2-4x+4,\quad x^3+8=x^3-4x^2+4x,$$

$4x^2-4x+8=0$ — корней нет ($D<0$).

3. ОДЗ неравенства (1) разбивается на два промежутка, в которых функция $f(x)$ имеет знаки, указанные на рисунке 99.

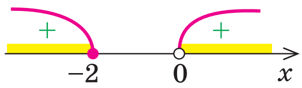


Рис. 99

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$. ◁

II способ (равносильные преобразования)

Комментарий

Для решения используем равносильные преобразования:

$$\sqrt[2k]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geqslant 0,\\ f(x)>g^{2k}(x)\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\ g(x)<0.\end{cases}$$

Чтобы решить полученное промежуточное неравенство $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$, учтем условия, при которых эта дробь будет неотрицательной.

В конце, объединяя полученные решения, записываем ответ.

Решение

▶ $$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ \frac{x^3+8}{x}>(x-2)^2,\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ \frac{x^3+8}{x}>x^2-4x+4,\end{cases}$$

$$\text{или}\ \begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 2,\\ \frac{4x^2-4x+8}{x}>0,\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x^3+8\geqslant 0\\ x>0,\\ x<2,\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}x^3+8\leqslant 0,\\ x<0,\\ x<2.\end{cases}$$

Учитывая, что $4x^2-4x+8>0$ при всех значениях x ($D<0$ и $a=4>0$), получаем, что последняя совокупность трех систем равносильна совокупности: $\begin{cases}x\geqslant 2,\\ x>0\end{cases}$ или $\begin{cases}x\geqslant -2,\\ x>0,\\ x<2,\end{cases}$ или $\begin{cases}x\leqslant -2,\\ x<0,\\ x<2\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\geqslant 2$, или $0<x<2$, или $x\leqslant -2\Leftrightarrow x\leqslant -2$, или $x>0$.

Ответ: $(-\infty;\,-2]\cup(0;\,+\infty)$. ◁

Замечание. Записывая приведенное решение, знаки равносильности ($\Leftrightarrow$) можно не ставить, достаточно вначале записать фразу: «Выполним равносильные преобразования данного неравенства».

Задача 3 Решите неравенство

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}}+\sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}}\leqslant 1. \qquad (1)$$

Комментарий

Замена $\sqrt{3x+5}=t$ позволяет заметить, что каждое выражение, стоящее под знаком внешнего квадратного корня, является квадратом двучлена.

Применяя формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, получаем неравенство с модулями, для решения которого используем план:

1) *найти ОДЗ;*
2) *найти нули всех подмодульных функций;*
3) *отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на промежутки;*
4) *найти решения неравенства в каждом из промежутков.*

Решение

Пусть $\sqrt{3x+5}=t$, где $t \geqslant 0$. Тогда $3x + 5 = t^2$, $3x = t^2 - 5$.

Получаем неравенство $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+9-6t}\leqslant 1$, которое можно записать так:

$$\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}\leqslant 1. \text{ Получаем}$$

$$|t-2|+|t-3|\leqslant 1. \qquad (2)$$

1. ОДЗ неравенства (2): $t \in \boldsymbol{R}$, но по смыслу задания это неравенство необходимо решить при $t \geqslant 0$.
2. Нули подмодульных функций: $t = 2$ и $t = 3$.
3. Эти нули разбивают область $t \geqslant 0$ на три промежутка, в каждом из которых каждая подмодульная функция имеет постоянный знак (рис. 100).

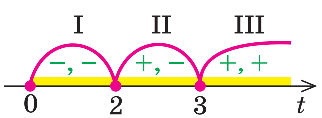


Рис. 100

Промежуток I. При $t \in [0; 2]$ имеем неравенство $-(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, из которого получаем $t \geqslant 2$, но промежутку $[0; 2]$ принадлежит только $t = 2$.

Промежуток II. При $t \in [2; 3]$ имеем неравенство $(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, равносильное неравенству $0\cdot t \leqslant 0$, которое выполняется при любых значениях t. Таким образом, на промежутке $[2; 3]$ решениями неравенства будут все значения t из этого промежутка ($2 \leqslant t \leqslant 3$).

Промежуток III. При $t \in [3; +\infty)$ имеем неравенство $(t-2)+(t-3)\leqslant 1$, из которого получаем $t \leqslant 3$, но промежутку $[3; +\infty)$ принадлежит только значение $t = 3$.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод, что решениями неравенства (2) будут все значения t, такие, что: $2 \leqslant t \leqslant 3$.

Выполняя обратную замену, имеем $2\leqslant\sqrt{3x+5}\leqslant 3$, откуда

$$4 \leqslant 3x + 5 \leqslant 9.$$

Тогда $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right]$. ◁

Вопросы для контроля

1. Назовите основные методы решения иррациональных неравенств.
2. Назовите основные этапы решения иррационального неравенства методом интервалов.
3. Обоснуйте справедливость следующих равносильных преобразований:

1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Упражнения

Решите неравенство **(1–8)**.

1. 1) $\sqrt{x^2 - 3x - 18} < 4 - x$; 2) $\sqrt{x^2 - 3x} < 5 - x$.

2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2 - 9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leqslant x^2 - 1$.

3. 1) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$.

4. 1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20} + \sqrt{x+15} \geqslant 5$.

5. 1) $\frac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x} + 5$; 2) $\frac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

6. 1) $\sqrt{\frac{x^3+27}{x}} > x - 3$; 2) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$.

7*. 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}} + \sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \leqslant 2$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$.

8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x} - \frac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right) \geqslant 0$.

§ 15 РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

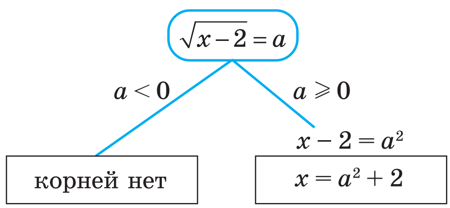
При решении задач с параметрами, в которых требуется решить уравнение или неравенство, можно пользоваться следующим ориентиром (§ 9): *любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Но в том случае, когда какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно.*

Также на этапе составления плана решения уравнений или неравенств с параметрами или при проведении рассуждений, связанных с самим решением, часто удобно сопровождать соответствующие рассуждения схемами, по которым легко проследить, в какой момент мы не смогли однозначно выполнить необходимые преобразования, на сколько случаев пришлось разбить решение и чем отличается один случай от другого. Отметим, что уравнения и неравенства с параметрами чаще всего решают с помощью их равносильных преобразований, хотя иногда используются и свойства функций, метод интервалов для решения неравенств и уравнения-следствия.

Задача 1 Решите уравнение $\sqrt{x-2}=a$.

Комментарий

Мы не можем однозначно дать ответ на вопрос, есть ли у данного уравнения корни, и поэтому уже на первом шаге должны разбить решение на два случая: 1) $a<0$ — корней нет, 2) $a \geqslant 0$ — корни есть (см. схему).



При $a \geqslant 0$ имеем простейшее иррациональное уравнение, обе части которого неотрицательные. Поэтому при возведении обеих его частей в квадрат получим уравнение, равносильное данному. ОДЗ данного уравнения можно не записывать, оно учитывается автоматически, потому что для всех корней полученного уравнения $x-2=a^2 \geqslant 0$.

Решение

▶ 1) При $a<0$ уравнение не имеет корней.
2) При $a \geqslant 0$ $x-2=a^2$. Тогда $x=a^2+2$.

Ответ: 1) если $a<0$, то корней нет;
2) если $a \geqslant 0$, то $x=a^2+2$. ◁

Задача 2 Решите уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$.

Решение[1]	*Комментарий*

$$\sqrt{x+a}=3-\sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Для всех корней уравнения (1):

$$3-\sqrt{x-1}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Тогда уравнение (1) равносильно уравнениям:

$$x+a=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2, \qquad (3)$$

$$x+a=9-6\sqrt{x-1}+x-1,$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{8-a}{6}. \qquad (4)$$

Для всех корней уравнения (4):

$$\frac{8-a}{6}\geqslant 0. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (4) равносильно уравнению

$$x-1=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \qquad (6)$$

Таким образом, $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$.

Учтем ограничения (2) и (5):

$$3-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2}=3-\left|\frac{8-a}{6}\right|.$$

По условию (5) $\frac{8-a}{6}\geqslant 0$, тогда $\left|\frac{8-a}{6}\right|=$ $=\frac{8-a}{6}$. Таким образом, условия (2) и (5) задают систему $\begin{cases}3-\frac{8-a}{6}\geqslant 0,\\ \frac{8-a}{6}\geqslant 0,\end{cases}$

то есть $\begin{cases}a\geqslant -10,\\ a\leqslant 8,\end{cases}$ тогда $-10\leqslant a\leqslant 8$.

Ответ:

1) при $-10\leqslant a\leqslant 8$ $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$;

2) при $a<-10$ или $a>8$ корней нет. ◁

Используем равносильные преобразования данного уравнения. Для этого необходимо учесть его ОДЗ:

$$\begin{cases}x+a\geqslant 0, & (7)\\ x-1\geqslant 0. & (8)\end{cases}$$

При переносе члена данного уравнения из левой части в правую с противоположным знаком получим равносильное уравнение (1).

Для всех корней уравнения (1) оно является верным числовым равенством. Его левая часть неотрицательна, таким образом, и правая часть должна быть неотрицательной. Тогда далее можно решать уравнение (1) не на всей ОДЗ, а только на той ее части, которая задается условием (2). По этому условию обе части уравнения (1) неотрицательны, таким образом, при возведении обеих его частей в квадрат получим равносильное уравнение (3) (а после равносильных преобразований — уравнение (4)).

Для всех корней уравнения (3) его правая часть неотрицательна, таким образом, и левая часть будет неотрицательной: $x+a\geqslant 0$, но тогда условие (7) ОДЗ данного уравнения учтено автоматически и его можно не записывать в решение.

Также для всех корней уравнения (4) его левая часть неотрицательна, таким образом, и правая часть должна быть неотрицательной. Поэтому далее можно решать уравнение (4) не на всей ОДЗ, а только на

[1] В записи решения задач 2–6 в рамках выделены ограничения, которые пришлось наложить в процессе равносильных преобразований данного уравнения или неравенства.

той ее части, которая задается условием (5). Тогда обе части уравнения (4) неотрицательны и после возведения обеих его частей в квадрат получим равносильное уравнение (6).

Для всех корней уравнения (6) его правая часть неотрицательна, таким образом, и левая часть будет неотрицательной: $x - 1 \geqslant 0$, но тогда и условие (8) ОДЗ данного уравнения учтено автоматически, и поэтому ОДЗ можно не записывать в решение.

Задача 3 Решите уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$

Решение

► Для всех корней данного уравнения

$$x \geqslant 0 \qquad (1)$$

Тогда данное уравнение равносильно уравнениям:

$$a+\sqrt{a+x}=x^2, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a+x}=x^2-a. \qquad (3)$$

Для всех корней уравнения (3)

$$x^2 - a \geqslant 0. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (3) равносильно уравнениям:

$$a + x = (x^2 - a)^2, \qquad (5)$$

$$a + x = x^4 - 2ax^2 + a^2. \qquad (6)$$

Рассмотрим уравнение (6) как квадратное относительно a:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4\,(x^4 - x) =$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Тогда $a=\frac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}$.

Следовательно,

$a = x^2 + x + 1$ или $a = x^2 - x$.

Отсюда

$$x^2 - a + x + 1 = 0 \qquad (7)$$

или

$$x^2 - a = x. \qquad (8)$$

Комментарий

Как и в задаче 2, ОДЗ данного уравнения $\begin{cases} a+\sqrt{a+x}\geqslant 0, \\ a+x\geqslant 0 \end{cases}$ будет учтена автоматически при переходе к уравнениям (2) и (5) (для всех корней этих уравнений), таким образом, ее можно не записывать в решении.

Рассуждения при выполнении равносильных преобразований данного уравнения (в уравнения (2, 3, 5, 6) аналогичны соображениям, приведенным в комментарии к задаче 2.

Анализируя уравнение (6) (которое достаточно трудно решить относительно переменной x), пользуемся ориентиром, который условно можно назвать «Ищи квадратный трехчлен», а именно: *пробуем рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или относительно какой-либо функции).* Рассмотрим уравнение (6) как квадратное относительно параметра a.

Учитывая условия (1) и (4), получим, что $(x^2 - a) + x + 1 \geqslant 1$, таким образом, уравнение (7) не имеет корней.

Если для корней уравнения (8) выполняется условие (1) ($x \geqslant 0$), то автоматически выполняется и условие (4) ($x^2 - a \geqslant 0$).

Из уравнения (8) получим

$$x^2 - x - a = 0.$$

Это уравнение имеет корни, если $D = 1 + 4a \geqslant 0$, то есть при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Тогда $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Для x_1 условие $x \geqslant 0$ выполняется, таким образом, x_1 — корень данного уравнения при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Учтем условие $x \geqslant 0$ для x_2:

$$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geqslant 0, \quad \sqrt{1+4a} \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant 1 + 4a \leqslant 1, \quad -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0.$$

Ответ: 1) при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$

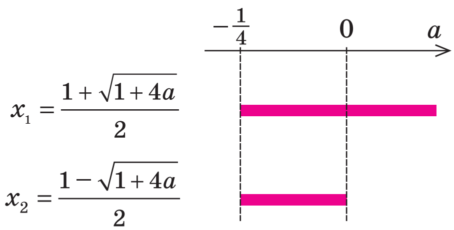
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2};$$

2) при $a > 0$ $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

3) при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет. ◁

Этот способ эффективно срабатывает только тогда, когда дискриминант полученного квадратного трехчлена является полным квадратом, как в данном случае.

Перед записью ответа удобно изобразить все полученные решения на рисунке и напротив каждого решения отметить, при каких значениях параметра это решение можно использовать (см. с. 143).



Из этого рисунка видно, что при $a > 0$ в ответ нужно записать только одну формулу (x_1), при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ — две формулы (x_1 и x_2), а при $a < -\frac{1}{4}$ корней нет.

Задача 4 Решите неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

Решение	*Комментарий*

▶ Данное неравенство равносильно

системе $\begin{cases} ax \geqslant 0, \\ x + 4a > 0, \\ (x+4a)^2 > 25ax. \end{cases}$ (1)

При $a = 0$ получаем систему

Используем равносильные преобразования. Для этого учтем ОДЗ данного неравенства ($ax \geqslant 0$) и то, что правая часть неотрицательна, таким образом, для всех решений данного неравенства его левая часть должна быть положительной ($x + 4a > 0$).

$$\begin{cases} 0\cdot x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 > 0, \end{cases}$$ решение которой: $x > 0$.

При $a > 0$ получаем систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решим отдельно неравенство

$$x^2 - 17ax + 16a^2 > 0.$$

Поскольку $x^2 - 17ax + 16a^2 = 0$ при $x = a$ и $x = 16a$, то при $a > 0$ получаем $x < a$ или $x > 16a$.

Тогда система (2) имеет решения:

$$0 \leqslant x < a \text{ или } x > 16a.$$

При $a < 0$ получаем систему

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

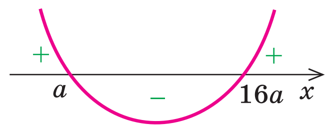
Система (3) решений не имеет, поскольку при $a < 0$ первое и второе неравенства не имеют общих решений.

Ответ: при $a = 0$ $x > 0$;
при $a > 0$ $x \in [0;\, a) \cup (16a;\, +\infty)$;
при $a < 0$ решений нет. ◁

При этом условии (на ОДЗ) обе части данного неравенства неотрицательны, таким образом, при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим равносильное неравенство. Получаем систему (1).

Для решения неравенства $ax \geqslant 0$ необходимо рассмотреть три случая: $a = 0$ (делить на a нельзя); $a > 0$ (знак неравенства сохраняется при делении обеих его частей на a); $a < 0$ (знак неравенства изменяется).

При $a > 0$ значение $-4a < 0$, поэтому два первых неравенства системы (2) имеют общее решение $x \geqslant 0$, а для решения неравенства $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ можно применить графическую иллюстрацию:



При $a < 0$ значение $-4a > 0$, поэтому два первых неравенства системы (3) не имеют общих решений, таким образом, и вся система (3) не имеет решений.

Задача 5 Решите неравенство $\sqrt{x-a} > x+1$.

Комментарий

Сначала воспользуемся равносильными преобразованиями:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Если в полученные системы параметр а входит линейно, то в таких случаях иногда бывает удобно выразить параметр через переменную, рассмотреть параметр как функцию от этой переменной и применить графическую иллюстрацию решения неравенств (в системе координат xOa). Отметим, что для изображения решений совокупности неравенств удобно применить две системы координат, в которых оси Ox находятся на одной прямой (и на каждой выделять штриховкой соответствующие решения).

При разных значениях a прямая $a = \text{const}$ или не пересекает заштрихованные области $\left(\text{при } a \geqslant -\frac{3}{4}\right)$, или пересекает их по отрезкам. Абсциссы точек пересечения являются решениями систем (1) и (2), а поэтому и решениями данного неравенства.

Решение

▶ Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

или

$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Изобразим графические решения систем неравенств (1) и (2) в системе координат xOa (на рис. 101, *а*, *б* закрашены соответствующие области ① и ②). Видим, что $\boxed{\text{при } a \geqslant -\frac{3}{4}}$ решений нет (нет закрашенных точек); $\boxed{\text{если } -1 \leqslant a < -\frac{3}{4}}$, то прямая $a = \text{const}$ пересекает только закрашенную область ①. Причем полученный интервал ограничен слева и справа ветвями параболы $a = -x^2 - x - 1$. Но в ответе нам необходимо записать x через a. Для этого из уравнения $x^2 + x + a + 1 = 0$ находим x:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a - 1}.$$

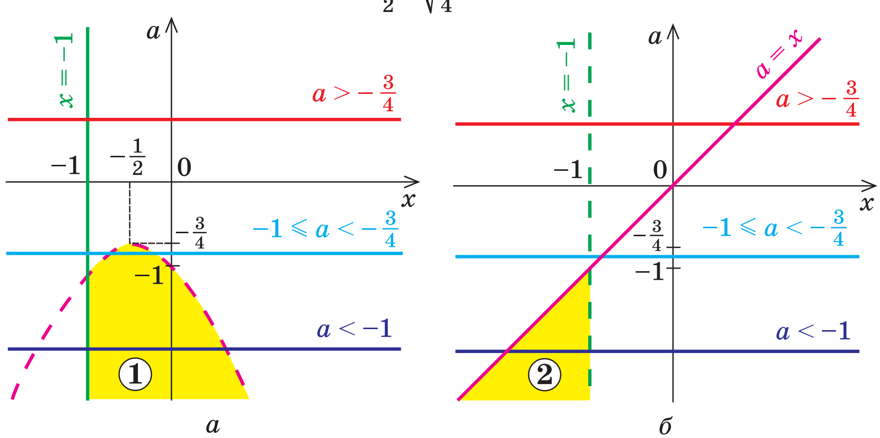


Рис. 101

Как видим, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}>-\frac{1}{2}$, то есть $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — уравнение правой ветви параболы, а $x=-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — левой.

Тогда ответ в этом случае будет:

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a};$$

$\boxed{\text{если } a<-1,}$ то прямая a = const пересекает заштрихованные области ① и ②. Для области ① интервал для x ограничен: слева — прямой $x=-1$, а справа — правой ветвью параболы, то есть $-1\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. Для области ② интервал для x ограничен слева прямой $x=a$, а справа — прямой $x=-1$, то есть $a\leqslant x<-1$. Объединение этих интервалов можно записать короче:

$$a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}.$$

Ответ: 1) при $a\geqslant-\frac{3}{4}$ — решений нет;

2) при $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a};$

3) при $a<-1$ $\quad a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. ◁

Для решения некоторых исследовательских задач с параметрами можно применить свойства квадратного трехчлена и, в частности, условия расположения корней квадратного трехчлена относительно данных чисел (табл. 16).

Задача 6 Найдите все значения параметра k, при которых имеет корни уравнение $x+2k\sqrt{x+1}-k+3=0$.

Решение

▶ Замена $\sqrt{x+1}=t$, где $t\geqslant 0$ (тогда $x=t^2-1$). Получаем уравнение

$$t^2+2kt-k+2=0. \qquad (1)$$

Данное уравнение будет иметь корни тогда и только тогда, когда уравнение (1) будет иметь хотя бы один неотрицательный корень ($t\geqslant 0$).

Случай $t=0$ исследуем отдельно.

Комментарий

Если иррациональное уравнение содержит только один корень, то иногда можно привести такое уравнение к рациональному, обозначив этот корень новой переменной. Поскольку замена является равносильным преобразованием (вместе с обратной заменой), то получаем уравнение, равносильное данному, При $t = 0$ из уравнения (1) имеем $k = 2$. Таким образом, при $k = 2$ уравнение (1) имеет корень $t = 0$. Тогда и данное уравнение имеет корень $x = -1$, то есть $k = 2$ удовлетворяет условию задачи.

Обозначим $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$.

Уравнение (1) может иметь хотя бы один положительный корень в одном из двух случаев:

1) один корень положительный и один корень отрицательный — для этого необходимо и достаточно выполнения условия $f(0) < 0$;
2) оба корня положительные — для этого необходимо и достаточно выполнения системы условий:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \quad (2).$$

Условие $f(0) < 0$ дает

$$-k + 2 < 0,$$

то есть $k > 2$.

Система (2) дает

$$\begin{cases} -k+2>0, \\ 4k^2-4(-k+2)\geqslant 0, \\ -k>0. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} k<2, \\ k^2+k-2\geqslant 0, \\ k<0. \end{cases} \quad \begin{cases} k<2, \\ k\leqslant -2 \text{ или } k\geqslant 1, \\ k<0. \end{cases}$$

Таким образом, $k \leqslant -2$.

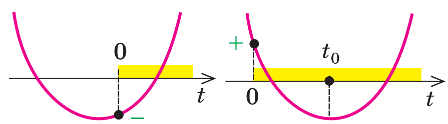
Ответ: $k \leqslant -2$ или $k \geqslant 2$. ◁

и поэтому вместо исследования данного уравнения можно исследовать полученное.

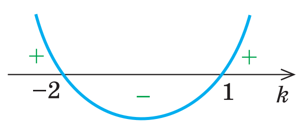
При этом следует учитывать, что *после замены переменной иногда изменяется требование задачи,* в частности, для уравнения (1) оно будет таким: найти все значения параметра k, для которых это уравнение имеет хотя бы один неотрицательный корень (тогда после обратной замены мы обязательно найдем корни данного уравнения).

Это возможно в одном из трех случаев: или один из корней уравнения (1) равен нулю (этот случай легко исследуется подстановкой $t = 0$ в уравнение (1)), или уравнение (1) имеет один положительный и один отрицательный корни, или имеет два положительных корня.

Изобразив соответствующие эскизы графиков функции $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$, записываем необходимые и достаточные условия такого расположения корней квадратного трехчлена (рисунок или табл. 16).



Для решения квадратного неравенства $k^2 + k - 2 \geqslant 0$ можно применить графическую иллюстрацию.



В конце необходимо объединить все полученные результаты. Конечно, для получения ответа можно было решить данное уравнение (аналогично задаче 2), а затем дать ответ на вопрос задачи, но такой путь потребует более громоздких вычислений.

Упражнения

1. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x-a}=2$; 2) $\sqrt{x+2a}=a$; 3) $\sqrt{x+6}-m=\sqrt{x-3}$;

4) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

2. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x}\geqslant 0$; 2) $x+2a>\sqrt{3ax+4a^2}$; 3) $\sqrt{4x+a}>x$;

4) $\sqrt{x-a}\geqslant 2x+1$; 5) $\sqrt{a^2-x^2}>2-x$.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $3\sqrt{x+2}=2x+a$ имеет корни.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left(\sqrt{x}-a\right)\left(x-\dfrac{4}{x}\right)=0$ имеет только один действительный корень.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2-ax}+2=x$ имеет только один действительный корень.

6. Определите количество решений системы $\begin{cases} y=a+\sqrt{x}, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ в зависимости от значения параметра a.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ К РАЗДЕЛУ 2

1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$; 4) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

2. Вычислите:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1$; 2) $\dfrac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^3\right)^2}+0{,}75$; 4) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot\left(11+2\sqrt{30}\right)$.

Упростите выражение **(3–5)**.

3. 1) $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; 2) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

3) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt{c}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\dfrac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\dfrac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

4. 1) $\left(\sqrt{k}-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt{k}+1}\right)^{-1}-\dfrac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$;

2) $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2}{a-b}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\dfrac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\right)\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}+1\right)$;

4) $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^3}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^3}}$.

5. 1) $\dfrac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$;

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\dfrac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\dfrac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

3) $\left(\dfrac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\left(\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$;

4) $\left(\dfrac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\dfrac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\dfrac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

Решите уравнение **(6–10)**:

6. 1) $\left(\sqrt{x^2-7x+10}\right)^2=2x^2-9x+7$; 2) $x^2+\sqrt{x^2-1}-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$;

3) $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$; 4) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.

7. 1) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$; 2) $\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-3x-5}=6x+5$;

3) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$; 4) $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$.

8. 1) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$; 2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$;

3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

4) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+18-8\sqrt{x+2}}=1$.

9. 1) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$;

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5-x}=2$; 4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

10. 1) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; 2) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$;

3) $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$; 4) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10x+5}=2$.

Решите систему уравнений **(11–12)**.

11. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{31}{20},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{7}{20}.\end{cases}$

12. 1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5,\\ x=y+1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Решите неравенство **(13–21)**.

13. 1) $\sqrt{3x^2+13}\geqslant 1-2x$; 2) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$;

3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 4) $\sqrt{x^2-x-2}<2x+6$.

14. 1) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$; 2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

3) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$; 4) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

15. 1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\leqslant 2$; 2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-1}}\geqslant 3$;

3) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$; 4) $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+1}$.

16. 1) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$;

3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0$; 4) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

17. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$; 2) $(x-3)\sqrt{x^2+1}\leqslant x^2-9$;

3) $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 4) $\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

18. 1) $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$; 2) $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$;

3) $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)}$;

4) $\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>\sqrt{-x+7}-\sqrt{x-5}$.

19. 1) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$; 2) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$;

3) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$.

20. 1) $\frac{(1-x)\sqrt{1-x}+(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}}\geqslant 1$; 2) $\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2(x^2-x)\sqrt{x-x^2}}}>1$;

3) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0$; 4) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0$.

21. 1) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\leqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$ $(a>0)$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}\geqslant\frac{a}{\sqrt{x}}$.

22. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{4}{3}(x-a)$ при $a=0$ и убедитесь, что множеством его корней является отрезок. При каких значениях a множеством решений данного неравенства является отрезок длиной $\frac{9}{5}$?

23. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $a+\sqrt{x^2+ax}\geqslant x$ не пересекается с промежутком $[-1;\ 0]$?

24. При каких значениях параметра a во множестве решений неравенства $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ содержится промежуток $\left[\frac{1}{4};1\right]$?

СВЕДЕНИЯ ИЗ ИСТОРИИ

Понятие *степени* возникло в древности. Сохранились глиняные плитки древних вавилонян (ок. 1700 г. до н. э.), содержащие записи таблиц квадратов и кубов и их обратных значений. К умножению равных множителей приводит решение многих задач. Выражение *квадрат числа* возникло в результате вычисления площади квадрата, а *куб числа* — в результате нахождения объема куба. Современные обозначения (типа a^4, a^5) ввел в XVII в. Р. Декарт (1596–1650).

Дробные показатели степени и простейшие правила действий над степенями с дробными показателями применил в XIV в. французский математик Н. Орема (ок. 1323–1382). Известно, что Н. Шюке (ок. 1445–ок. 1500) рассматривал степени с отрицательными и нулевым показателями.

С. Стевин предложил понимать под $a^{\frac{1}{n}}$ корень $\sqrt[n]{a}$. Но систематически дробные и отрицательные показатели первым стал применять И. Ньютон (1643—1727).

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) ввел обозначение $a^0 = 1$, если $a \neq 1$, и название *показатель* (в переводе с немецкого *Exponent*). Немецкое potenzieren означает *возвести в степень*. В свою очередь, термин *exponenten* возник в результате не совсем точного перевода с греческого слова, которым Диофант Александрийский (ок. III в.) обозначал квадрат неизвестной величины.

Термины *радикал* и *корень*, введенные в XII в., происходят от латинского *radix*, которое имеет два значения: *сторона и корень*. Греческие математики вместо «извлечь корень» говорили «найти сторону квадрата по его данной величине (площади)». Знак корня в виде символа $\surd$ появился впервые в 1525 г. Современный символ ввел Декарт, который добавил горизонтальную черту. Ньютон уже обозначил показатели корней: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.