

Є. П. Нелін

# ГЕОМЕТРІЯ

Дворівневий підручник для 10 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний і профільний рівні

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України*

Харків  
«Гімназія»  
2010

УДК 373:513  
ББК 22.151.я721  
Н49

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
(лист № 1/11-7523 від 9.08.2010 р.)*

*Рецензенти:*

- В. П. Горох, кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
провідний спеціаліст відділу наукового забезпечення  
Українського центру оцінювання якості освіти
- Л. Г. Стадник, учитель-методист Харківської СШ № 17,  
учитель вищої категорії, керівник районного методоб'єднання  
вчителів математики м. Харкова

**Нелін Є. П.**

Н49 Геометрія : дворівн. підруч. для 10 кл. загальноосвіт.  
навч. закладів : академ. і профільн. рівні / Є. П. Нелін. —  
Х. : Гімназія, 2010.— 240 с. : іл.  
ISBN 978-966-474-099-6.

УДК 373:513  
ББК 22.151.я721

ISBN 978-966-474-099-6

© Є. П. Нелін, 2010  
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2010

## Передмова для учнів

Дорогі друзі!

Мета даного підручника — допомогти вам вивчити розділ геометрії, який називають стереометрією. У попередніх класах ви вивчали в основному властивості плоских фігур, тепер приступаєте до вивчення просторових об'єктів. У процесі вивчення стереометрії ви вдосконалюватимете свої навички логічного мислення, розвиватимете просторові уявлення, уміння в думках моделювати нові геометричні фігури і будувати їх графічні зображення.

Засвоюючи стереометрію, ви будете ознайомлюватися з новими геометричними поняттями і закономірностями, багато з яких упродовж сторіч люди застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі й живописі. Одержані знання допоможуть вам зрозуміти, чому геометричні властивості викликають незмінний інтерес творців прекрасного. Наприклад, теоретик мистецтва Раннього Відродження, італійський учений Леон Батіст Альберті (1404–1472) підкреслював значення геометрії в живописі, а геніальний французький архітектор ХХ ст. Шарль Едуар Ле Корбюзьє (1887–1965) відзначав, що навколишній світ є світом геометрії і своїми художніми враженнями людина зобов'язана саме геометрії. Твори художників епохи Високого Відродження Леонардо да Вінчі (1452–1519) і Альбрехта Дюрера (1471–1528), величні споруди архітекторів старовини та сучасності переконливо свідчать про те, що геометрія була і залишається законодавицею моди в питаннях гармонії та краси.

Бажаємо, щоб вивчення цього предмета принесло вам задоволення та переконало в правоті видатного французького математика і філософа Блеза Паскаля (1623–1662), який вважав: «...того, хто володіє геометрією, ця наука просуває настільки далеко, що він виявляється озброєним абсолютно новою силою».

Кілька зауважень про те, як користуватися підручником.

Систему навчального матеріалу підручника з кожної теми наведено за двома рівнями.

*Основний матеріал* міститься в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні (наприклад, для виконання складніших завдань з геометрії зовнішнього незалежного оцінювання з математики). Учень може опанувати його як самостійно, так і під керівництвом учителя в разі вивчення геометрії на академічному рівні, а може скористатися ним для систематичного вивчення геометрії на профільному рівні.

На початку багатьох параграфів наведено *довідкові таблиці*, які містять основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми. Для ознайомлення з основними ідеями щодо розв'язування задач наведено приклади, у яких крім розв'язання міститься також *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфу запропоновано систему запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфу. Систему вправ до основного матеріалу подано за трьома рівнями складності. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначки, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «\*». У тексті параграфів запропоновано спеціальні орієнтири, що дозволять опанувати методи розв'язування багатьох задач поглибленого рівня. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про окремі цікаві факти, пов'язані з історією розвитку геометрії, ви дізнаєтеся, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника в додатку наведено довідковий матеріал зі шкільного курсу планіметрії.

#### Умовні позначення

головне в навчальному матеріалі

- ▶ початок розв'язання задачі
- ◁ закінчення розв'язання задачі
- початок обґрунтування твердження
- закінчення обґрунтування твердження

## Передмова для вчителя

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до чинної програми з геометрії академічного та профільного рівнів і програми та змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Як відомо, у навчанні підручник виконує дві основні функції: 1) є джерелом навчальної інформації, що розкриває передбачений освітніми стандартами зміст у доступній для учнів формі; 2) є засобом навчання, за допомогою якого здійснюється організація навчального процесу, у тому числі й самоосвіта учнів.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника в реалізації цих функцій від інших підручників з геометрії.

Це *дворівневий підручник*, у кожному розділі якого, поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної чи колективної роботи з учнями, які цікавляться математикою. Запропонований додатковий матеріал можна використовувати і для організації навчання геометрії на профільному рівні.

*Основний матеріал, який повинні, у першу чергу, засвоїти учні, структуровано у формі довідкових таблиць*, наведених на початку параграфа. Тому під час пояснення нового матеріалу доцільно працювати з підручником за відповідними таблицями та рисунками. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може обирати власний рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з геометрії має забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними геометричними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з геометрії), а й формування способів дій із цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів відповідні уміння). Так, систему умов, на яку реально спирається учень, виконуючи дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонують досить загальні орієнтовні основи для розв'язування відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонуються орієнтовні основи другого і третього типів. Зазвичай у підручниках з геометрії для 10 класів учням пропонують тільки зразки розв'язувань завдань. Учні розв'язують ці завдання самостійно, орієнтуючись на ці зразки (тобто їм пропонують орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на зразки, і виділить для себе орієнтовну основу

розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у такому разі орієнтовна основа, що створюється в учня, є неповною і, крім того, часто не усвідомленою ним: учень не може пояснити, чому, розв'язуючи завдання, він виконував саме такі додаткові побудови чи обчислення, а не інші.

Із цієї причини одним з принципів побудови пропонованого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності з розв'язування геометричних завдань безпосередньо в підручнику. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведуть за такою схемою:

| <i>Розв'язання</i>                   | <i>Коментар</i>                                 |
|--------------------------------------|---|
| Як можна записати розв'язання задачі | Як можна міркувати під час розв'язування задачі |

За такої подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дає змогу учневі, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація з розв'язування, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

Завдяки виділенню певних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу, вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, задачі зі знаходження відстаней між мимобіжними прямими). Це дозволяє, зокрема, ознайомити учнів з методами розв'язування складніших геометричних завдань, які пропонують у зовнішньому незалежному оцінюванні з математики, та з оформленням їх розв'язання.



# Розділ 1

## СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ТА УЗАГАЛЬНЕННЯ ФАКТІВ І МЕТОДІВ ПЛАНІМЕТРІЇ

- § 1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії. Методи розв'язування геометричних задач
- § 2. Приклади застосування координат і векторів для розв'язування планіметричних задач

**Опановуючи запропонований матеріал, ви зможете:**

ознайомитися з логічною побудовою шкільного курсу планіметрії;

систематизувати та узагальнити методи розв'язування планіметричних задач;

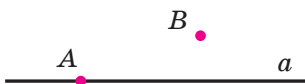
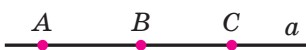

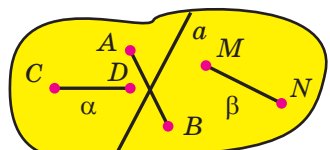
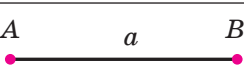
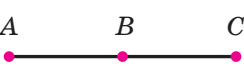
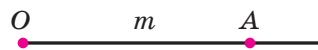
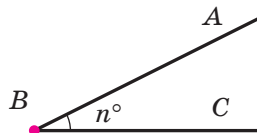
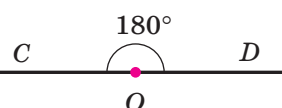
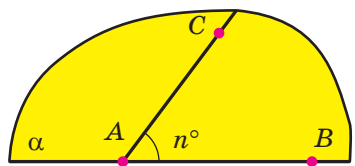
згадати основні поняття й аксіоми планіметрії.

## § 1

ЛОГІЧНА ПОБУДОВА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ.  
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

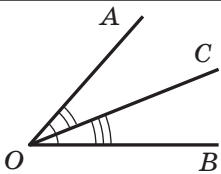
## 1.1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії

Таблиця 1

| 1. АКсіОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ   |   |
|--|---|
| I. АксіОми належності  | II. АксіОми взаємного розміщення точок на прямій і площині  |
|  <p><math>A \in a, B \notin a</math></p>  |  <p>Точка <math>B</math> лежить між точками <math>A</math> і <math>C</math>.</p>  |
|  <p>Через точки <math>C</math> і <math>D</math> проходить єдина пряма <math>b</math>.</p>   |  <p>Пряма <math>a</math> розбиває площину на дві півплощини <math>\alpha</math> і <math>\beta</math>.<br/>Точки <math>A</math> і <math>B</math> лежать у різних півплощинах;<br/>точки <math>C</math> і <math>D</math> (або <math>M</math> і <math>N</math>) лежать в одній півплощині.</p> |
| III. АксіОми вимірювання та відкладання відрізків і кутів  |   |
|  <p><math>AB = a &gt; 0</math></p>  <p><math>AC = AB + BC</math></p>                               |  <p>Відрізок <math>OA = m</math> — єдиний.</p>  |
|  <p><math>\angle ABC = n^\circ &gt; 0^\circ</math></p>  <p><math>\angle COD = 180^\circ</math></p> |  <p><math>\angle CAB = n^\circ</math> — єдиний (<math>0^\circ &lt; n &lt; 180^\circ</math>).</p>  |




Продовження табл. 1



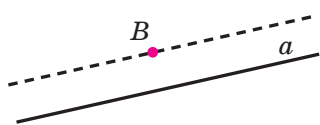
$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

IV. Аксиома існування трикутника, що дорівнює даному



$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

V. Аксиома про паралельні прямі



$B \notin a$   
Через точку  $B$  можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній.

2. ОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР І ВІДНОШЕНЬ

**ОЗНАЧЕННЯ**

включає в себе характеристичні властивості фігури

**ОЗНАКА**

дозволяє довести, що фігури, які розглядаються, є такими, що потрібні або зв'язані необхідним співвідношенням (рівність, подібність тощо)

**ГЕОМЕТРИЧНІ  
ФІГУРИ АБО ВІДНОШЕННЯ**  
(рівність, подібність, паралельність, перпендикулярність тощо)

**ВЛАСТИВОСТІ**

## Пояснення й обґрунтування

**1. Логічна побудова шкільного курсу планіметрії.** Аксиоми планіметрії. Шкільний курс геометрії дає уявлення про логічний (дедуктивний) метод побудови наукової теорії. Логічно строгий курс геометрії будують таким чином: перелічують основні геометричні поняття, які вводять без означень, але їх властивості виражають в аксіомах; використовуючи основні поняття й аксиоми, дають означення нових понять, формулюють та доводять теореми і таким чином розглядають властивості геометричних фігур. Основні означення та властивості фігур на площині, які ви вивчали в курсі геометрії 7–9 класів (у так званому курсі планіметрії) наведено в табл. 1–16 додатку.

У шкільних підручниках, як правило, на початку курсу наводять три основних поняття планіметрії: «точка», «пряма», «відстань». Для більшості понять, що розглядаються далі в курсі планіметрії («коло», «круг», «відрізок», «промінь» тощо), дають означення. Але часто наводять не всі аксиоми, необхідні для побудови планіметрії, — для спрощення викладу деякі з аксіом не формулюють, хоча автори їх і використовують.

Наведемо одну з можливих систем аксіом планіметрії. Її запропонував для шкільного курсу геометрії український академік О. В. Погорелов.

Запропоновані аксиоми<sup>1</sup> можна розподілити на п'ять груп (див. також пункт 1 табл. 1).

I. Аксиоми належності.

I<sub>1</sub>. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй (рис. 1.1).

I<sub>2</sub>. Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну (рис. 1.2).

II. Аксиоми взаємного розміщення точок на прямій і площині (аксиоми порядку).

II<sub>1</sub>. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими (рис. 1.3).

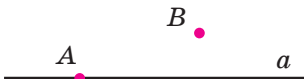


Рис. 1.1



Рис. 1.2

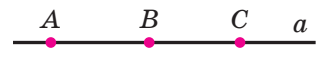


Рис. 1.3

Вираз «точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ » означає те саме, що й вирази: «точки  $A$  і  $C$  лежать по різні боки від точки  $B$ » або «точки  $B$  і  $C$  лежать по один бік від точки  $A$ ». За допомогою прийменника «між» для точок прямої вводять поняття відрізка прямої та півпрямої (променя).

<sup>1</sup> Наведені аксиоми не призначені для запам'ятовування. Учніям достатньо орієнтуватися в їх змісті. Більш повну систему аксіом планіметрії наведено на с. 21.

Нагадаємо, що *відрізком*  $AB$  називається частина прямої, що лежить між точками  $A$  і  $B$  (які називають *кінцями відрізка*). *Півпрямую*, або *променем*, називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної її точки. Ця точка називається *початковою точкою* півпрямої. Різні півпрямі однієї й тієї самої прямої зі спільною початковою точкою називаються *доповняльними*.

Олексій Васильович Погорелов — видатний вітчизняний математик, учений зі світовим ім'ям, академік Національної академії наук України, академік Російської академії наук, заслужений діяч науки і техніки України.

О. В. Погорелов народився 3 березня 1919 р. в селищі Короча Белгородської області (Росія), закінчив Харківський державний університет у 1941 р. і Військово-повітряну академію ім. М. Є. Жуковського (Москва) в 1945 р., навчався в аспірантурі при Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова, працював у великих наукових центрах Радянського Союзу та України. Рідкісне поєднання математичного та інженерного талантів визначило круг наукових інтересів О. В. Погорелова. Його праці відносяться до геометрії «в цілому», основ геометрії, теорії диференціальних рівнянь у часткових похідних, теорії стійкості пружних оболонок, питань кріогенного електромашинобудування.

Погорелов — автор підручників з усіх основних розділів геометрії для вищих навчальних закладів, що вирізняються оригінальністю викладу матеріалу та математичною строгістю. Багато й успішно він працював також над питаннями вдосконалення шкільної математичної освіти. Створений ним підручник геометрії спрямовано на розвиток логічного мислення та здібностей учнів.

На будівлі Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, де навчався і працював О. В. Погорелов, встановлено меморіальну дошку.



### II<sub>2</sub>. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

Це розбиття має такі властивості. Якщо кінці якогось відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму.

Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам (і не належать даній прямій — границі півплощин, яка входить і до однієї півплощини, і до другої), то відрізок перетинає пряму (рис. 1.4).

### III. Аксиоми вимірювання та відкладання відрізків і кутів.

III<sub>1</sub>. Кожний відрізок (рис. 1.5, а) має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин (рис. 1.5, б), на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.

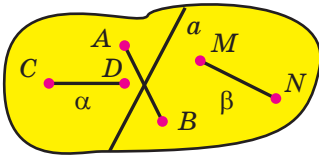


Рис. 1.4

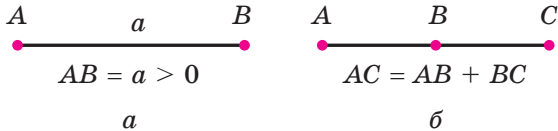


Рис. 1.5

III<sub>2</sub>. На будь-якій півпрямій від її початкової точки (рис. 1.6) можна відкласти відрізок даної довжини ( $OA = m$ ), і до того ж тільки один.

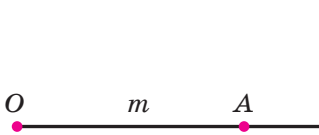


Рис. 1.6

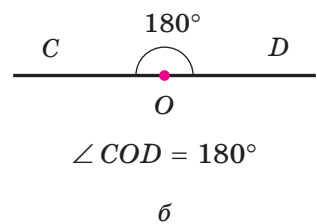
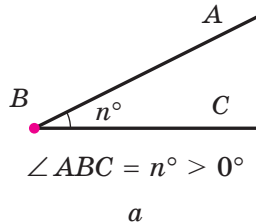


Рис. 1.7

III<sub>3</sub>. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля (рис. 1.7, а). Розгорнутий кут дорівнює  $180^\circ$  (рис. 1.7, б). Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами (рис. 1.8).

III<sub>4</sub>. Від будь-якої прямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за  $180^\circ$ , і до того ж тільки один (рис. 1.9).

Аксиоми III<sub>1</sub> і III<sub>2</sub> дозволяють увести поняття координати точки на прямій, тобто поставити у відповідність кожній точці прямої дійсне число так, що коли  $x_A$  і  $x_B$  — координати точок A і B, то довжина відрізка AB дорівнює  $|x_B - x_A|$  (рис. 1.10).

### IV. Аксиома існування трикутника, що дорівнює даному.

IV<sub>1</sub>. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, в даному розміщенні відносно даної півпрямой (рис. 1.11).

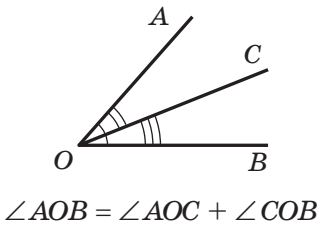


Рис. 1.8

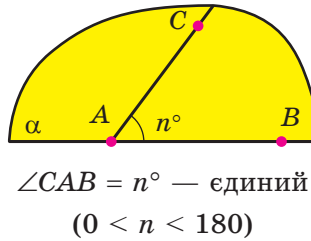


Рис. 1.9

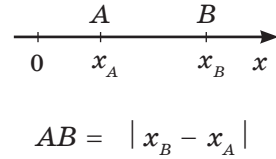


Рис. 1.10

V. Аксиома паралельних прямих.

V<sub>1</sub>. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більш як одну пряму, паралельну даній (рис. 1.12).

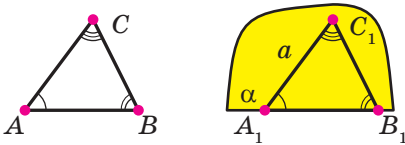


Рис. 1.11

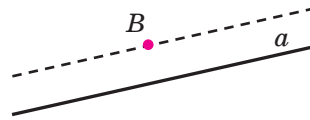


Рис. 1.12

Зазначимо, що для побудови геометрії можна використовувати різні системи аксіом. Наприклад, замість аксіоми паралельних прямих взяти як аксіому твердження: «Сума кутів трикутника дорівнює  $180^\circ$ ». Тоді твердження: «Через точку, що не лежить на даній прямій, на площині можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній» доводять як теорему.

У багатьох підручниках планіметрії в ході доведення ознак рівності трикутників використовують не аксіому існування трикутника, рівного даному, а накладання одного даного трикутника на другий. Інакше кажучи, як одне з основних використовують поняття «накладання» і фігури вважають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. Щоб таке доведення було коректним, потрібно зафіксувати в спеціальних аксіомах властивості накладання. Це можна зробити, якщо, наприклад, розуміти накладання фігур як певну відповідність<sup>1</sup> між точками двох фігур. При цьому не тільки точкам даної фігури, а й будь-якій точці площини ставиться у відповідність певна точка цієї площини, яка задовольняє таким аксіомам:

1. Якщо при накладанні суміщаються кінці двох відрізків, то суміщаються і самі відрізки.

<sup>1</sup> Нагадаємо, що, установлюючи відповідність між двома фігурами, кожній точці однієї фігури ставлять у відповідність єдину точку другої фігури.

2. Довільний кут зі сторонами  $a$  і  $b$  можна накласти на рівний йому кут зі сторонами  $a_1$  і  $b_1$  двома способами: 1) так, що промінь  $a$  суміститься з променем  $a_1$ , а промінь  $b$  — з променем  $b_1$ ; 2) так, що промінь  $a$  суміститься з променем  $b_1$ , а промінь  $b$  — з променем  $a_1$ .
3. Будь-яка фігура дорівнює сама собі.
4. Якщо фігура  $F$  дорівнює фігурі  $F_1$ , то фігура  $F_1$  дорівнює фігурі  $F$ .
5. Якщо фігура  $F_1$  дорівнює фігурі  $F_2$ , а фігура  $F_2$  дорівнює фігурі  $F_3$ , то фігура  $F_1$  дорівнює фігурі  $F_3$ .

Як бачимо, ці аксіоми відповідають нашим наочним уявленням про накладання і рівність фігур.

Нагадаємо, що після введення поняття *руху як перетворення однієї фігури в іншу, при якому зберігаються відстані між відповідними точками*, давалося загальне означення рівності фігур, яке і використовувалося в подальшому курсі планіметрії (див. табл. 5 додатку). *Дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться рухом одна в одну* (тобто дві фігури називаються рівними, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок фігур рівні).

## 2. Означення, ознаки та властивості геометричних фігур і відношень.

У пункті 2 табл. 1 показано зв'язки між поняттями «означення», «ознака», «властивість» у вигляді схеми (стрілками позначено можливі напрямки використання відповідних тверджень).

Розглянемо, наприклад, означення, ознаку і властивість паралелограма (див. табл. 7 додатку).

|                    |  |
|--------------------|--|
| <i>Означення</i>   | Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні                                      |
| <i>Ознака</i>      | Якщо в чотирикутнику діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм |
| <i>Властивість</i> | У паралелограма діагоналі точкою перетину діляться навпіл  |

Ураховуючи зміст понять «означення», «ознака» та «властивість» і зв'язки між ними, одержуємо таке. Якщо нам відомо, наприклад, що даний чотирикутник — паралелограм, ми маємо право скористатися його властивостями, які зафіксовані або в означенні (протилежні сторони паралельні), або в спеціальних теоремах (діагоналі в точці перетину діляться навпіл) тощо. А якщо потрібно довести, що даний чотирикутник є паралелограмом, то користуватися його властивостями ми не маємо права. У цьому разі слід звернутися або до означення (довести, що у розглянутого чотирикутника протилежні сторони попарно паралельні), або до

ознаки (наприклад, довести, що у даного чотирикутника діагоналі в точці перетину діляться навпіл).

**3. Теореми та їх види.** Як уже зазначалося вище, після введення основних понять планіметрії та аксіом, які фіксують властивості цих понять, властивості інших фігур установлювалися доведенням відповідних теорем. Доведення проводилися строго логічним шляхом на основі аксіом і раніше доведених теорем. Таким чином було одержано геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей. Відомості, які використовують для розв'язування планіметричних задач, наведено в додатку «Система опорних фактів курсу планіметрії».

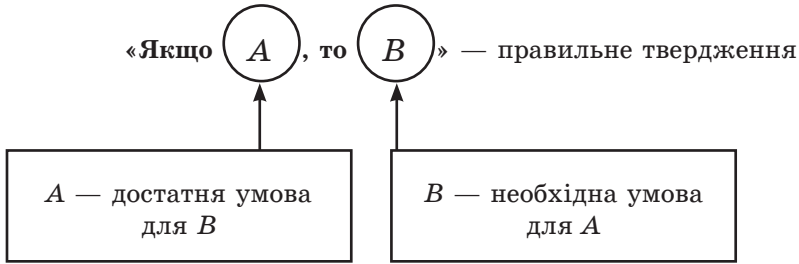
Зазначимо, що практично кожному теорему курсу планіметрії можна сформулювати у вигляді умовного твердження «Якщо  $A$ , то  $B$ », де літерою  $A$  позначено *умову теореми*, а  $B$  — її *висновок*. Наприклад, якщо в прямокутному трикутнику позначити довжину гіпотенузи через  $c$ , а довжини катетів — через  $a$  і  $b$ , то *теорему Піфагора* можна сформулювати так: «Якщо трикутник  $ABC$  прямокутний з прямим кутом  $C$ , то  $c^2 = a^2 + b^2$ ». Умовою  $A$  цієї теореми є «трикутник  $ABC$  прямокутний з прямим кутом  $C$ », а висновком  $B$  — « $c^2 = a^2 + b^2$ » (квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів).

Якщо поміняти місцями умову і висновок теореми, тобто розглянути твердження «Якщо  $B$ , то  $A$ », і це твердження буде правильним, то отримаємо так звану *теорему, обернену* до даної. Наприклад, для теореми Піфагора обернене твердження: «Якщо в трикутнику  $ABC$  зі сторонами  $a, b, c$   $c^2 = a^2 + b^2$ , то цей трикутник прямокутний з прямим кутом  $C$ » теж правильне. Тому останнє твердження є формулюванням теореми, оберненої до теореми Піфагора. Нагадаємо, що не кожна теорема має обернену. Наприклад, для теореми про суміжні кути: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює  $180^\circ$ » (умова  $A$  — «два кути суміжні», висновок  $B$  — «їх сума дорівнює  $180^\circ$ ») сформулюємо обернене твердження («Якщо  $B$ , то  $A$ ): «Якщо сума двох кутів дорівнює  $180^\circ$ , то ці кути суміжні». Це твердження неправильне, тому що, наприклад, сума двох вертикальних прямих кутів дорівнює  $180^\circ$ , але ці кути не є суміжними. Отже, для теореми про суміжні кути не існує оберненої теореми.

**4. Необхідна і достатня умови<sup>1</sup>.** Деякі математичні твердження іноді формулюють з використанням понять «необхідна умова» і «достатня умова». Пояснимо ці терміни.

У випадку, коли умовне твердження «Якщо  $A$ , то  $B$ » правильне, умову  $A$  називають достатньою для умови  $B$ , а умову  $B$  — необхідною для умови  $A$  (див. схему).

<sup>1</sup> Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів, які навчаються за програмою профільного рівня.



Наприклад, властивість суміжних кутів: «Якщо кути суміжні, то їх сума дорівнює  $180^\circ$ » містить два твердження: «кути суміжні» — твердження  $A$  і «їх сума дорівнює  $180^\circ$ » — твердження  $B$ . Тоді наведену властивість можна сформулювати так: «Для того щоб кути були суміжні (твердження  $A$ ), необхідно, щоб їх сума дорівнювала  $180^\circ$ » (твердження  $B$ ) або так: «Для того щоб сума двох кутів дорівнювала  $180^\circ$  (твердження  $B$ ), достатньо, щоб ці кути були суміжні» (твердження  $A$ ).

У випадку, коли правильними є і пряме твердження «Якщо  $A$ , то  $B$ », і обернене «Якщо  $B$ , то  $A$ », кожен з умов  $A$  і  $B$  називають *необхідною і достатньою* для другої. Наприклад, пряму теорему Піфагора і обернену можна сформулювати у вигляді одного твердження: «Для того щоб трикутник був прямокутний, необхідно і достатньо, щоб квадрат однієї сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін». Іноді замість терміна «необхідно і достатньо» використовують також словосполучення «тоді і тільки тоді». У цьому разі останнє твердження буде сформульовано так: «Трикутник буде прямокутним тоді і тільки тоді, коли квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін».

Таким чином, наявність у формулюванні теореми (чи завдання) словосполучення «тоді і тільки тоді» вимагає доведення як прямої, так і оберненої теорем.

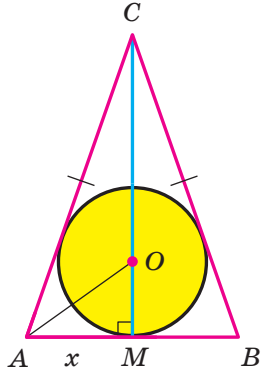


## 1.2. Методи розв'язування планіметричних задач

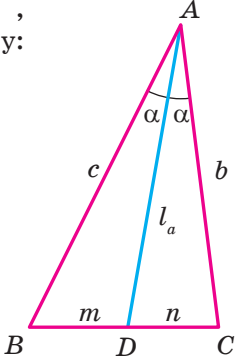
Таблиця 2

| 1. Методи розв'язування геометричних задач  |   |
|---|---|
| Геометричні методи  | Аналітичні методи   |
| Використання «ключового» трикутника, рівності та подібності трикутників, властивостей геометричних фігур  | Введення невідомих відрізків та кутів і використання рівнянь та їх систем чи властивостей функцій |
| Метод геометричних перетворень (симетрія відносно осі та точки, паралельне перенесення, поворот, подібність фігур)  | Метод площ  |
|   | Координатний метод  |
|   | Векторний метод   |
| <b>2. Введення невідомих для розв'язування геометричних задач на обчислення</b>   |   |
| <i>Орієнтир</i>   |   |
| Якщо умовою геометричної задачі на обчислення взагалі не дано відрізки або дані відрізки та кути не можна об'єднати в зручний для розв'язування задачі трикутник, то зазвичай вводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих). |   |

Продовження табл. 2

| <b>Приклад</b>   |  |
|--|--|
| <p>У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, дорівнює 25 см. Обчисліть площу цього трикутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 10 см.</p>  |  |
| <i>План</i>  | <i>Розв'язання і коментар</i>  |
| <p>1. Позначимо якоюсь буквою, наприклад <math>x</math>, невідомий відрізок (або кут, або кілька невідомих).</p>   | <p>Нехай у рівнобедреному трикутнику <math>ABC</math> (<math>AC = CB</math>) медіана <math>CM = 25</math> см (яка є і бісектрисою, і висотою) та радіус вписаного кола <math>OM = 10</math> см. Ці відрізки не є сторонами одного трикутника. Тому для розв'язання задачі виберемо який-небудь відрізок як невідомий. Необхідно, щоб вибраний відрізок разом із даними відрізками утворював зручні для розв'язування трикутники.</p> <p>Нехай <math>AM = x</math>, де <math>x &gt; 0</math>. Цей відрізок можна об'єднати в прямокутні трикутники і з медіаною <math>CM</math>, і з радіусом <math>OM</math>.</p>  |
| <p>2. Спробуємо скласти рівняння (чи систему) з уведеним невідомим.</p>  | <p>Із <math>\triangle AMC</math>: <math>AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}</math>. Щоб скласти рівняння, скористаємось тим, що центр вписаного кола лежить у точці перетину бісектрис: <math>AO</math> — бісектриса кута <math>BAC</math>. Тоді <math>AO</math> є також і бісектрисою <math>\triangle AMC</math>. За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника (див. пункт 3 табл. 2) <math>\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}</math>, тобто <math>\frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}</math>.</p>   |
| <p>3. Розв'язуємо одержане рівняння (чи систему рівнянь) або перетворюємо його (її) таким чином, щоб дістати відповідь на запитання задачі). З одержаних розв'язків вибираємо ті, які задовольняють умові геометричної задачі.</p> | <p>Підносячи обидві частини одержаного рівняння до квадрата та розв'язуючи останнє рівняння, отримуємо: <math>x^2 = 500</math>. Звідси</p> $x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$ <p>(Оскільки <math>x &gt; 0</math>, то другий корінь одержаного рівняння <math>x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}</math> не задовольняє умові задачі, і його не записують до розв'язання).</p>  |

Закінчення табл. 2

|   |  |
|---|--|
| <p>5. Користуючись знайденою величиною, даємо відповідь на запитання задачі.</p>  | <p>Тоді <math>S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5}</math> (см<sup>2</sup>).<br/>Відповідь. <math>250\sqrt{5}</math> см<sup>2</sup>.</p>  |
| <p><b>3. Використання методу площ для розв'язування геометричних задач</b></p>  |  |
| <p style="text-align: center;"><i>Зміст деяких варіантів методу площ</i></p>  |  |
| <p><i>Розбити даний многокутник на частини і записати окремо площу всього многокутника і окремо суму площ його частин та прирівняти одержані величини.</i><br/><i>Щоб знайти відношення відрізків, розміщених на одній прямій, іноді буває корисним замінити відношення відрізків відношенням площ трикутників зі спільною вершиною, основами яких є розглядувані відрізки.</i></p> |  |
| <p style="text-align: center;"><b>Приклад</b></p>   |  |
| <p><b>Доведіть, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін трикутника.</b></p>  |  |
| <p style="text-align: center;"><i>План</i></p>  | <p style="text-align: center;"><i>Розв'язання</i></p>  |
| <p>Щоб знайти відношення відрізків <math>BD</math> і <math>DC</math>, спробуємо знайти відношення площ трикутників <math>ABD</math> і <math>ACD</math> зі спільною вершиною <math>A</math>, основами яких є дані відрізки (тоді, і висота цих трикутників, проведена з вершини <math>A</math>, буде спільною).</p>  | <p>Нехай <math>AD = l_a</math> — бісектриса трикутника <math>ABC</math> зі сторонами <math>AB = c</math>, <math>AC = b</math> і <math>\angle BAD = \angle CAD = \alpha</math>, <math>BD = m</math>, <math>DC = n</math>. Тоді, з одного боку:</p> $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}cl_a \sin \alpha, \quad S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}bl_a \sin \alpha$ <p>і</p> $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}cl_a \sin \alpha}{\frac{1}{2}bl_a \sin \alpha} = \frac{c}{b}. \quad (1)$ <p>З іншого боку: <math>S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}mh_a</math>,</p> $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}nh_a \quad \text{і} \quad \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2}mh_a}{\frac{1}{2}nh_a} = \frac{m}{n}. \quad (2)$ <p>Прирівнюючи праві частини виразів (1) і (2), одержуємо <math>\frac{m}{n} = \frac{c}{b}</math>, що і потрібно було довести.</p>  |

## Пояснення й обґрунтування

У курсі планіметрії 7–9 класів ви розглянули значну кількість геометричних задач та їх розв'язань різними методами. Дамо короткий огляд розглянутих типів задач та методів їх розв'язування.

За вимогою геометричної задачі їх можна поділити на такі типи: на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження. Задачі кожного із цих типів розв'язують різними методами, які умовно поділяють на геометричні та аналітичні (див. пункт 1 табл. 2).

Нагадаємо, що значна частина теорем курсу планіметрії стосувалася геометрії трикутника. Це не випадково, оскільки розв'язування багатьох задач зводиться до розгляду одного чи декількох трикутників. Тому, говорячи про геометричні методи розв'язування планіметричних задач, можна умовно виділити метод «ключового» трикутника. За цим методом у даній фігурі потрібно знайти трикутник (або декілька трикутників), до дослідження якого (яких) зводиться розв'язування задачі. Інколи з цією

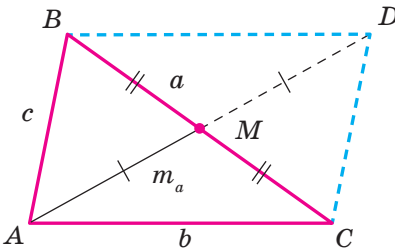


Рис. 1.13

метою спочатку слід виконати якусь додаткову побудову, наприклад у чотирикутнику провести діагональ. Деякі з часто використовуваних додаткових побудов корисно пам'ятати. Зокрема, якщо в умові задачі фігурує медіана трикутника, то буває зручним продовжити цю медіану за сторону на таку саму відстань і доповнити рисунок до паралелограма. Наприклад, у трикутнику  $ABC$  зі сторонами  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  (рис. 1.13) продовжимо медіану  $AM$  за сторону  $BC$  на відстань ( $MD = AM = m_a$ ) та з'єднаємо відрізками точку  $D$  з точками  $B$  і  $C$ . Тоді отримаємо паралелограм  $ABDC$ , оскільки його діагоналі в точці перетину діляться навпіл (табл. 7 додатку). Але сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін:

$$AD^2 + BC^2 = 2(AC^2 + AB^2), \text{ або } (2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Звідси

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Іноді додаткові побудови здійснюють, використовуючи певні геометричні перетворення (див. табл. 5 додатку). Наприклад, розв'язуючи задачі, пов'язані з трапецією, часто буває зручним використати паралельне перенесення її бічної сторони або діагоналі (див. у табл. 10 додатку другу і третю додаткові побудови).

Розв'язуючи геометричні задачі на доведення, слід пам'ятати, що твердження деяких з них доводять *методом від супротивного*. Нагадаємо його зміст:

1. *Робимо припущення, протилежне тому, що потрібно довести.*
2. *Спираючись на аксіоми та теореми, отримуємо з припущення наслідок, який суперечить умові або відомій властивості.*
3. *Робимо висновок, що наше припущення неправильне, а правильне твердження, що потрібно довести.*

Використовуючи метод доведення від супротивного, як правило, рисунки виконують до тієї геометричної ситуації, яка впливає з припущення. Наприклад, розв'язання задачі «Доведіть, що на площині *пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає і другу пряму*» може бути таким.

● 1) Нехай прямі  $a$  і  $b$  паралельні. Припустимо, що пряма  $c$ , що перетинає пряму  $a$  в точці  $A$ , не перетинає пряму  $b$  (рис. 1.14).

2) Отже, пряма  $c$  паралельна прямій  $b$ . Але тоді через точку  $A$  проходять дві прямі  $a$  і  $c$ , паралельні прямій  $b$ , що суперечить аксіомі паралельних.

3) Таким чином, наше припущення неправильне, і пряма  $c$  обов'язково перетне і пряму  $b$ . ●

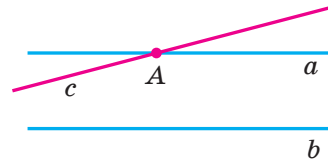


Рис. 1.14

Пристаючи до розв'язування геометричної задачі, слід урахувати, що майже кожна геометрична задача потребує індивідуального підходу, винахідливості та інтуїції. Проте можна дати деякі загальні рекомендації, що будуть корисні під час розв'язування багатьох задач.

Розв'язування практично будь-якої геометричної задачі починають з рисунка. Він повинен бути досить лаконічним. *Слід зображати лише «функціонуючі» частини геометричних фігур*. Так, наприклад, якщо в задачі розглядають радіус описаного кола, то часто можна не зображати коло (а зобразити тільки його центр і радіус). Але якщо в умові задачі йдеться про точку кола, то його зображення може бути корисним для розв'язання. *Необхідно уникати надмірного ускладнення рисунка*. Для цього можна, наприклад, виконати виносні рисунки, що зображають фрагменти даної конфігурації. З іншого боку, корисно безпосередньо на рисунку вказувати числові чи буквені значення лінійних або куткових величин. Зазначимо, що є такі задачі, у процесі розв'язування яких доводиться уточнювати особливості конфігурації, що розглядається, та переробляти початковий рисунок таким чином, що остаточного вигляду він набуває лише одночасно із закінченням розв'язування.

Розв'язуючи геометричну задачу, треба спиратися не лише на рисунок. Він може «підказати», що якісь точки лежать на одній прямій чи на одному колі. Проте в процесі розв'язування ці особливості розміщення точок повинні бути обґрунтовані без посилань на рисунок. Інколи рисунок може стати причиною неповного розв'язування задачі, оскільки ті співвідношення, які виконують на ньому і здаються очевидними, насправді потребують спеціального обґрунтування. Тому завжди намагайтеся зобразити всі можливі конфігурації, а потім за допомогою міркувань відкинути зайві (якщо ці зайві дійсно є). Нагадаємо, що додаткові побудови на початковому рисунку, якими вводять нові відрізки та кути, іноді полегшують розв'язування задачі.

У задачах на обчислення має сенс спочатку, не проводячи обчислень, визначити, які взагалі відрізки та кути можна знайти, виходячи з даних величин. Як тільки до цього переліку потрапить потрібний відрізок чи кут, можна легко скласти ланцюжок послідовних обчислень, що приведе до визначення шуканої величини. Іноді такий «прямий пошук» корисно доповнити пошуком плану розв'язування задачі «від шуканого», тобто виходячи з вимоги задачі (наприклад, «щоб знайти площу вписаного круга, достатньо знайти його радіус»).

Проте ці способи не завжди вдається застосувати. У таких випадках дуже часто допомагає алгебраїчний метод розв'язування геометричних задач на обчислення, пов'язаний із введенням невідомих та складанням рівняння або системи рівнянь. У пункті 2 табл. 2 наведено орієнтир, який дає змогу розпізнавати ситуації, коли потрібно вводити невідомі відрізки та кути, а також приклад відповідного розв'язання. Використовуючи цей метод для складання рівняння до задачі, часто поряд з вираженням даних елементів через невідомі зручно величину якогось елемента з розглядуваної конфігурації виразити двічі через введені невідомі. Крім того, не завжди, склавши рівняння чи систему рівнянь до геометричної задачі, доцільно прагнути повністю їх розв'язати. З одержаного рівняння чи системи, у першу чергу, слід знаходити ті невідомі (чи їх комбінацію), які дозволять дати відповідь на запитання задачі (див. розв'язання задачі 2 на с. 23).

У табл. 2 (пункт 3) показано можливість використання методу площ для розв'язування планіметричних задач. Зміст та приклади застосування координатного та векторного методів для розв'язування геометричних задач розглянуто в § 2.

### Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** У рівнобічній трапеції висота дорівнює 8 см, основи дорівнюють 21 см і 9 см. Знайдіть радіус описаного навколо трапеції кола.

## Розв'язання

► Нехай у трапеції  $ABCD$  (рис. 1.15)  $AB = CD$ ,  $AD = 21$  см,  $BC = 9$  см,  $BK = 8$  см ( $BK \perp AD$ ). Якщо коло проходить через чотири точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , то воно також проходить через будь-які три із цих точок і тому збігається з колом, описаним навколо трикутника  $ABD$ .

Знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABD$ . Якщо  $CM$  — друга висота даної рівнобічної трапеції, то, ураховуючи рівність прямокутних трикутників  $ABK$  та  $DCM$  і те, що  $AD \parallel BC$  і  $BSMK$  — прямокутник, одержуємо:

$$AK = MD = \frac{21-9}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

Тоді з  $\triangle ABK$ :

$$AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10 \text{ (см)}.$$

З прямокутного трикутника  $BKD$ :

$$BD = \sqrt{BK^2 + KD^2} = 17 \text{ (см)}.$$

Таким чином, радіус кола, описаного навколо трикутника  $ABD$  (а отже, і навколо трапеції  $ABCD$ ), дорівнює

$$R = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\triangle ABD}} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BK} = 10,625 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 10,625 см. ◀

## Коментар

Спробуємо виділити «ключовий» трикутник для розв'язування задачі. Для цього проведемо діагональ  $BD$  трапеції і згадаємо, що коло, яке проходить через вершини трикутника  $ABD$ , є описаним навколо трикутника. Обчислити його радіус можна за кількома формулами (табл. 11 додатку), зокрема:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \text{ та } R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}.$$

Із цих формул вибираємо ту, для якої легко знайти всі величини, що входять до її запису:  $R = \frac{abc}{4S_{\triangle}}$ . (Одну

сторону трикутника  $ABD$  дано за умовою, а дві інші легко визначити з відповідних прямокутних трикутників.)

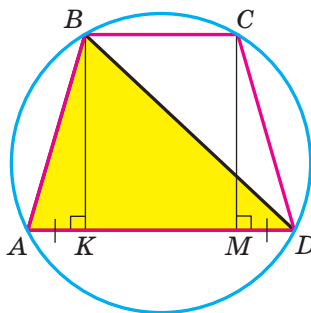


Рис. 1.15

## Задача 2.

Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а його площа —  $24 \text{ см}^2$ . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

## Розв'язання

► Нехай у прямокутному трикутнику  $ABC$  (рис. 1.16):  $\angle C = 90^\circ$ ,  $P = 24$  см,  $S = 24 \text{ см}^2$ .

## Коментар

Оскільки в умові цієї геометричної задачі на обчислення не дано жодного відрізка, для розв'язування такої

Позначимо  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ).

Записуючи дані периметр і площу та теорему Піфагора, одержуємо систему

$$\begin{cases} a + b + c = 24, \\ \frac{1}{2}ab = 24, \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases}$$

З першого рівняння  $a + b = 24 - c$ .  
Тоді

$$(a + b)^2 = (24 - c)^2$$

або

$$a^2 + b^2 + 2ab = 24^2 - 48c + c^2.$$

Підставляючи в цю рівність з другого рівняння  $ab = 48$  і з третього рівняння  $a^2 + b^2 = c^2$ , одержуємо

$$c^2 + 96 = 576 - 48c + c^2,$$

звідки  $c = 10$  (см). Оскільки радіус описаного кола прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то  $R = 5$  см.

*Відповідь:* 5 см. ◀

задачі доведеться ввести невідомий відрізок (або декілька невідомих відрізків). Щоб записати периметр трикутника, потрібно мати всі його сторони, тому введемо як невідомі всі сторони трикутника:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Для складання рівнянь використаємо теорему Піфагора та дані периметр і площу (записавши їх через невідомі). Оскільки в прямокутному трикутнику радіус описаного кола дорівнює половині гіпотенузи (табл. 11 додатку), то, щоб одержати відповідь, достатньо знайти із системи гіпотенузу  $c$ , а для цього з першого рівняння системи знайти суму  $a + b$ , піднести її до квадрата і використати друге та третє рівняння.

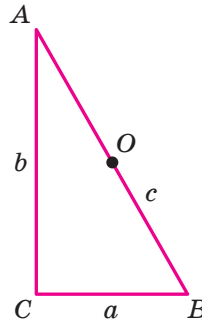


Рис. 1.16

### Запитання для контролю

1. Назвіть основні поняття планіметрії.
2. Скільки прямих можна провести через дві різні точки площини? Наведіть відповідну аксіому.
3. Чи завжди через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині пряму, паралельну даній? Скільки таких прямих можна провести? Наведіть відповідну аксіому.
4. Поясніть зміст поняття «обернена теорема» і наведіть приклади прямої та оберненої теорем. Наведіть приклад теореми, яка не має оберненої, та поясніть, чому її немає.



- 5\*. На прикладі твердження: «Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм» поясніть зміст понять «необхідна умова», «достатня умова». Сформулюйте дане твердження, використовуючи терміни: а) «необхідно»; б) «достатньо». Чи можна поєднати умову і висновок наведеного твердження терміном «необхідно і достатньо»? Якщо можна, то поясніть чому.
6. У яких випадках для розв'язування геометричної задачі на обчислення зручно вводити невідомі? Поясніть це на прикладі.
7. Поясніть, як можна використовувати метод площ для розв'язування геометричної задачі. Наведіть приклад.

## Вправи

- 1°. У табл. 4 додатку (с. 210) символічно зафіксовано наслідки теореми косинусів. Сформулюйте ці наслідки словесно.
- 2°. Визначте вид (за кутами) трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 11 см.
- 3°. Дано два рівнобедрених трикутники зі спільною основою. Доведіть, що їх медіани до основи лежать на одній прямій.
4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 12, а кут, протилежний до основи, —  $120^\circ$ . Знайдіть висоти трикутника.
- 5°. У рівнобедреному трикутнику основа і висота, проведена до основи, дорівнюють 4 см. Знайдіть площу круга, описаного навколо цього трикутника.
6. У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу на відрізки 9 і 16. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
7. У трикутнику  $ABC$  зі сторонами 4 і 6 та кутом між ними  $120^\circ$  знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини тупого кута.
8. У трикутнику  $ABC$  зі сторонами  $a$  і  $b$  медіани, проведені до цих сторін, взаємно перпендикулярні. Знайдіть довжину третьої сторони трикутника.
- 9°. Діагональ ромба завдовжки 10 см дорівнює його стороні. Знайдіть другу діагональ і кути ромба.
10. У паралелограмі  $ABCD$  проведено бісектрису кута  $A$ , яка перетинає сторону  $BC$  в точці  $K$ . Знайдіть довжину відрізка  $BK$ , якщо  $DC = 10$  см.
11. У прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу на відрізки 5 см і 12 см. Знайдіть катети трикутника.
12. У трапеції паралельні сторони дорівнюють 25 см і 4 см, а бічні сторони — 20 см і 13 см. Знайдіть площу трапеції.

13. Навколо кола описано рівнобічну трапецію, у якої бічна сторона ділиться точкою дотику на відрізки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.
14. У рівнобічну трапецію з бічною стороною 17 см вписано коло, діаметр якого 15 см. Знайдіть основи трапеції.
- 15\*. У трапеції, основи якої дорівнюють  $a$  і  $b$ , через точку перетину діагоналей проведена пряма, паралельна основам. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який відтинають бічні сторони трапеції.
16. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть радіуси кіл, якщо відстані між їх центрами дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.
17. У трикутнику  $ABC$  зі сторонами  $AC = 10$  см,  $CB = 20$  см і кутом  $ACB$ , рівним  $135^\circ$ , проведено медіану  $CD$ . Знайдіть площу трикутника  $ACD$ .
18. У трапеції  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) діагоналі перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що площі трикутників  $ABO$  і  $COD$  рівні (тобто ці трикутники рівновеликі).
19. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, висота якої дорівнює 10 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.
- 20\*. Доведіть, що сума відстаней від точки, узятої всередині правильного трикутника, до його сторін дорівнює висоті цього трикутника.
21. У трикутнику  $ABC$  кут  $A$  прямий, кут  $B$  дорівнює  $30^\circ$ . У трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює  $\sqrt{3}$ . Знайдіть відстань від вершини  $C$  до точки  $N$  дотику цього кола з катетом  $AB$ .
22. Середня лінія трапеції дорівнює 10 і ділить площу трапеції у відношенні 3 : 5. Знайдіть довжину основи цієї трапеції.
23. У рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 42 і 18, а висота — 16. Знайдіть довжину описаного навколо трапеції кола.
24. У трапеції  $ABCD$  з основами  $AB$  і  $CD$  діагоналі перетинаються в точці  $E$ . Знайдіть площу трикутника  $BCE$ , якщо  $AB = 30$ ,  $DC = 24$ ,  $AD = 3$  і  $\angle DAB = 60^\circ$ .
25. У трапецію  $ABCD$  з основами  $AD$  і  $BC$  вписано коло із центром  $O$ . Знайдіть площу трапеції, якщо  $\angle DAB = 90^\circ$ ,  $OC = 2$  і  $OD = 4$ .
26. Одна з діагоналей паралелограма розбиває його на два рівносторонніх трикутники зі стороною  $a$ . Знайдіть довжину другої діагоналі.
27. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагоналі дорівнюють 3 і 5, а гострий кут паралелограма дорівнює  $60^\circ$ .
28. Висота ромба дорівнює 12, а одна з його діагоналей — 15. Знайдіть площу ромба.
29. На площині розміщено квадрат  $ABCD$  і точку  $O$ . Відомо, що  $OB = OD = 13$ ,  $OC = 5\sqrt{2}$  і площа квадрата більша за 225. Знайдіть сторону квадрата і з'ясуйте, де розміщена точка  $O$  — усередині квадрата чи поза ним.
30. Квадрат зі стороною 3 см зрізали по кутах так, що утворився правильний восьмикутник. Знайдіть сторону восьмикутника.

**§ 2**

**ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ**

Таблиця 3

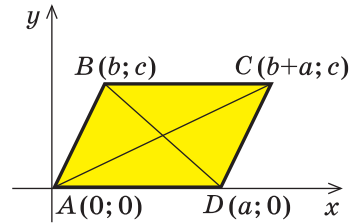
**ЗАСТОСУВАННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ  
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ**

1. Використання координат для розв'язування геометричних задач

**Приклад 1.** Доведіть, що в паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.

*Розв'язання*

Уведемо систему координат так, як її зображено на рисунку. Точка  $A$  має координати  $(0; 0)$ . Якщо позначити координати точки  $B(b; c)$ , а координати точки  $D(a; 0)$ , то координати точки  $C$  будуть  $(b + a; c)$  (поясніть чому). Запишемо в координатах суму квадратів діагоналей і суму квадратів усіх сторін:



$$AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (b - a)^2 + c^2 = 2b^2 + 2a^2 + 2c^2;$$

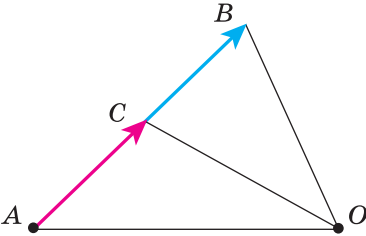
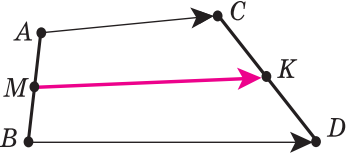
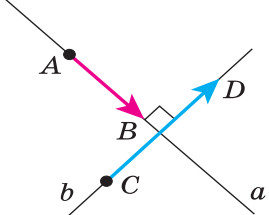
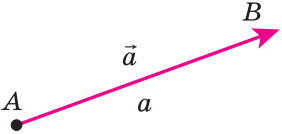
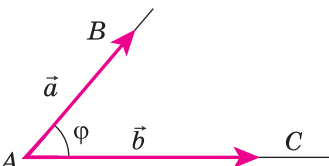
$$2AB^2 + 2AD^2 = 2(b^2 + c^2) + 2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2a^2.$$

Як бачимо,  $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$ , що і потрібно було довести.

2. Переклад геометричних фактів на векторну мову і векторних співвідношень на геометричну мову

| № з/п | Рисунок | Твердження геометричною мовою  | Твердження векторною мовою  |
|-------|---------|--|---|
| 1     |         | Прямі паралельні<br>$a \parallel b$<br>(прямі $a$ і $b$ не збігаються) | Вектори колінеарні<br>$\overline{AB} = \lambda \overline{CD}$<br>$\left(\frac{CD}{AB} = \lambda\right)$                                 |
| 2     |         | $C \in AB$<br>$\left(\frac{AB}{AC} = \lambda\right)$                   | Вектори колінеарні<br>$\overline{AB} = \lambda \overline{AC}$<br>або<br>$\overline{OC} = p \overline{OA} + (1 - p) \cdot \overline{OB}$ |

Продовження табл. 3

| № з/п | Рисунок   | Твердження геометричною мовою   | Твердження векторною мовою   |
|-------|---|---|--|
| 3     |    | $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$   | а) $\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB}$ ;   |
|       |   | <p>Точка <math>C</math> — середина <math>AB</math><br/> <math>\left(\frac{AC}{CB} = 1\right)</math></p> | б) $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$  |
| 4     |    | Точка $M$ — середина $AB$ ,<br>точка $K$ — середина $CD$  | $\overline{MK} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$   |
| 5     |   | $a \perp b$   | $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ $(\overline{AB} \neq \vec{0}, \overline{CD} \neq \vec{0})$   |
| 6     |  | $AB = a$  | $\vec{a}^2 =  \vec{a} ^2,$ <p>де <math>\vec{a} = \overline{AB}</math>, <math> \vec{a}  = a</math>.<br/> У координатах:<br/> <math> \vec{a}  = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}</math>,<br/> <math>\vec{a} = (x_a; y_a)</math></p>                                    |
| 7     |  | $\angle BAC = \varphi$  | $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$ <p>де <math>\overline{AB} = \vec{a}</math>, <math>\overline{AC} = \vec{b}</math>,<br/> <math>\varphi</math> — кут між векторами <math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math></p> |

Закінчення табл. 3

## 3. Схема розв'язування геометричних задач векторним методом

1. Перекласти вимогу задачі на векторну мову (для цього можна користуватися співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).
2. Увести прямокутну систему координат або вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні (базисні).
3. Знайти координати векторів, виділених у пункті 1, або виразити ці вектори через основні.
4. Довести або знайти виділене у пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову (для перекладу знову скористаємося співвідношеннями, наведеними на с. 27–28).

4. Використання векторів (у координатній формі)  
для розв'язування геометричних задач

**Приклад 2.** У прямокутному трикутнику  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $AC = a$ ,  $BC = a\sqrt{2}$ . Доведіть, що медіани, проведені з вершин  $A$  і  $C$ , взаємно перпендикулярні.

## Розв'язання

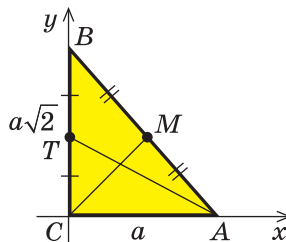
1. Якщо  $AT$  і  $CM$  — медіани даного прямокутного трикутника, то для доведення їх перпендикулярності достатньо довести, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю, тобто довести, що  $\overline{AT} \cdot \overline{CM} = 0$ .
2. Уведемо систему координат так, як зображено на рисунку. Тоді точки  $A$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $T$ ,  $M$  ( $T$  — середина  $CB$ ,  $M$  — середина  $AB$ ) мають координати:  $A(a; 0)$ ,  $C(0; 0)$ ,  $B(0; a\sqrt{2})$ ,  $T(0; \frac{a\sqrt{2}}{2})$ ,  $M(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2})$ .
3. Запишемо координати векторів, виділених у пункті 1:

$$\overline{AT} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \quad \overline{CM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. Знайдемо скалярний добуток цих векторів:

$$\overline{AT} \cdot \overline{CM} = -a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Але ця рівність і означає, що вектори  $\overline{AT}$  і  $\overline{CM}$  перпендикулярні, тобто медіани  $AT$  і  $CM$  взаємно перпендикулярні.



## Пояснення й обґрунтування

Уведення координат та векторів для розв'язування геометричних задач дозволяє скласти аналітичну модель даної задачі й використати потужний потенціал курсу алгебри для дослідження цієї моделі. Як правило, це дає змогу уникнути специфічних додаткових побудов, які часто доводиться виконувати, розв'язуючи задачі геометричними методами.

Для розв'язання геометричної задачі координатним методом:

- 1) уводимо прямокутну систему координат;
- 2) записуємо координати даних точок;
- 3) записуємо в координатах дані та шукані співвідношення, які пов'язані з умовою і вимогою задачі, та аналізуємо одержані співвідношення з метою отримання відповіді на запитання задачі.

Приклад застосування координат до розв'язування геометричної задачі наведено в пункті 1 табл. 3.

Слід ураховувати, що координатний чи векторний методи зручно використовувати тоді, коли після введення системи координат або основ-

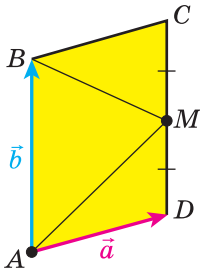


Рис. 2.1

них векторів (так званих *базисних векторів*, через які виражають усі інші вектори) легко записати всі геометричні співвідношення, дані умовою та вимогою задачі. Частину таких співвідношень у координатній та векторній формах наведено в табл. 13 додатку, а частину — у пункті 2 табл. 3. У пункті 3 цієї таблиці наведено схему розв'язування геометричної задачі векторним (чи векторно-координатним) методом, а в пункті 4 — застосування запропонованої схеми.

## Приклади розв'язання задач

**Задача.** У паралелограмі  $ABCD$  (рис. 2.1)  $AB = 2BC$  і точка  $M$  — середина сторони  $CD$ . Довести, що відрізки  $AM$  і  $BM$  перпендикулярні.

### Розв'язання

► Щоб довести, що відрізки  $AM$  і  $BM$  перпендикулярні, достатньо довести, що скалярний добуток векторів  $\overline{AM}$  і  $\overline{BM}$  дорівнює нулю.

Виберемо основні вектори:

$$\overline{AD} = \vec{a} \text{ і } \overline{AB} = \vec{b}.$$

Виразимо потрібні нам вектори  $\overline{AM}$

### Коментар

Спробуємо розв'язати цю задачу векторним методом (без введення системи координат). Для цього використаємо схему розв'язування, наведену в пункті 3 табл. 3:

- 1) *перекласти вимогу задачі на векторну мову* (враховуючи співвідношення 5, наведені в

і  $\overline{BM}$  через основні. Оскільки точка  $M$  — середина  $DC$ , то  $\overline{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

і  $\overline{BM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

Знайдемо скалярний добуток векторів  $\overline{AM}$  і  $\overline{BM}$ .

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{b}^2.$$

Але  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ ,  $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2$ . Ураховуючи, що за умовою  $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ , одержуємо:  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$ , отже, відрізки  $AM$  і  $BM$  перпендикулярні.  $\triangleleft$

пункті 2 табл. 3, достатньо довести, що  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$ );

- 2) *вибрати два неколінеарних вектори на площині як основні (найчастіше вибирають такі, що виходять з однієї точки);*
- 3) *виразити вектори, виділені в пункті 1, через основні;*
- 4) *довести або знайти виділене в пункті 1 співвідношення і перекласти результат на геометричну мову (для перекладу знову скористатися співвідношеннями пункту 2 табл. 3).*

### Заяпитання для контролю

1. Укажіть основні етапи розв'язування геометричної задачі координатним та векторним методами.
2. Наведіть приклади розв'язування геометричної задачі координатним і векторним методами.

### Вправи

- 1°. На рисунку 2.2 зображено прямокутний трикутник з катетами  $a$  і  $b$  ( $a > b$ ). Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався у вершині прямого кута, а дві інші вершини — на осях координат. Запишіть координати всіх вершин трикутника. Запишіть координати середин його сторін.

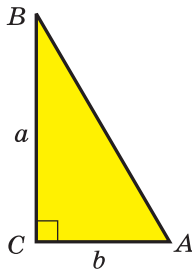


Рис. 2.2

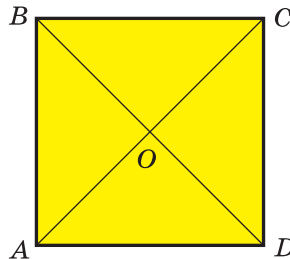


Рис. 2.3

2. На рисунку 2.3 зображено квадрат зі стороною  $a$ . Виберіть систему координат так, щоб: 1°) три вершини квадрата розміщувалися на

- осях координат; 2) усі вершини квадрата розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин квадрата і точки перетину його діагоналей.
- На рисунку 2.4 зображено рівнобедрений трикутник з основою  $2a$  і висотою  $b$ . Виберіть систему координат так, щоб усі його вершини знаходилися на осях координат. Запишіть координати вершин трикутника і середин його сторін.
  - На рисунку 2.5 зображено прямокутник зі сторонами  $a$  і  $b$ . Виберіть систему координат так, щоб три його вершини розміщувалися на осях координат. Запишіть координати вершин прямокутника і точки перетину його діагоналей.
  - На рисунку 2.6 зображено ромб з діагоналями  $2a$  і  $2b$ . Виберіть систему координат так, щоб початок координат розміщувався в точці перетину діагоналей, а всі вершини — на осях координат. Запишіть координати вершин ромба.

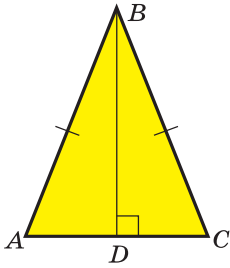


Рис. 2.4

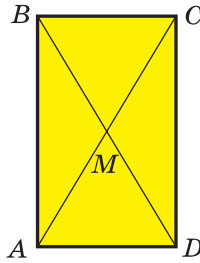


Рис. 2.5

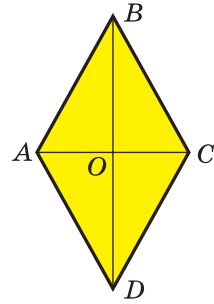


Рис. 2.6

- За допомогою координат доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від усіх його вершин.
- За допомогою координат доведіть, що сума квадратів відстаней від точки, узятої на діаметрі кола, до кінців будь-якої паралельної йому хорди, постійна.
- У квадрат зі стороною 2 вписано коло. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до всіх вершин квадрата є величина постійна.
- За допомогою координат доведіть, що в трапеції сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів бічних сторін плюс подвоєний добуток основ (рис. 2.7).
- (Теорема Ейлера.)* За допомогою координат доведіть, що сума квадратів довжин сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей плюс почотверений квадрат відстані між серединами діагоналей.



- 11\*. Обґрунтуйте справедливість співвідношень, наведених у пункті 2 табл. 3.
12. За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.
- 13\*. За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трапеції.
14. За допомогою векторів доведіть, що діагоналі ромба перпендикулярні.
15. У прямокутнику  $ABCD$  зі сторонами  $AD = BC = 4$  і  $AB = CD = 5$  на сторонах  $AD$  і  $BC$  вибрано відповідно точки  $K$  і  $M$  так, що  $AK = 1$  і  $BM = 3$ . За допомогою векторів доведіть, що прямі  $BK$  і  $MD$  паралельні.
16. За допомогою векторів знайдіть кут між гіпотенузою прямокутного трикутника та його медіаною, проведеною до більшого катета, якщо катети дорівнюють 6 см і 4 см.
17. За допомогою векторів доведіть, що середини основ трапеції лежать на одній прямій з точкою перетину продовжень бічних сторін.
- 18\*. У квадраті  $ABCD$  на діагоналі  $BD$  взяли таку точку  $M$ , що  $\frac{BM}{BD} = \frac{2}{3}$ , а на стороні  $BC$  — таку точку  $K$ , що  $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$ . Доведіть, що кут  $AMK$  дорівнює  $90^\circ$ .
- 19\*. У трикутнику зі сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  довжини сторін пов'язані співвідношенням  $a^2 + b^2 = 5c^2$ . Доведіть, що медіани, проведені до сторін  $a$  і  $b$ , перпендикулярні.

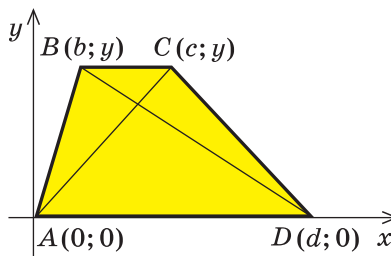


Рис. 2.7



# Розділ 2

## ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ

### ОСНОВНИЙ МАТЕРІАЛ

- § 3. Аксиоми стереометрії та їх найпростіші наслідки
- § 4. Найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників

### ДОДАТКОВИЙ МАТЕРІАЛ

- § 5. Поняття про аксіоматичний метод у геометрії

**В основній частині розділу ви:**

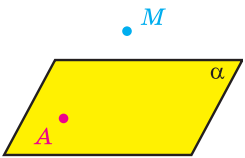
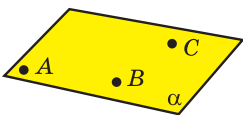
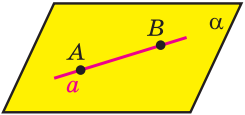
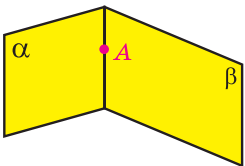
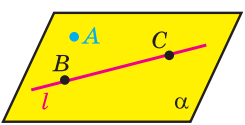
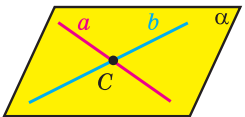
ознайомитеся з основними поняттями й аксіомами стереометрії та наслідками з них;

навчитеся, застосовуючи їх, розв'язувати найпростіші задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди.

**У додатковій частині розділу** ви зможете детальніше ознайомитися із застосуванням у геометрії аксіоматичного методу — одного з методів побудови наукової теорії.

## § 3 АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ

Таблиця 4

| АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ   |   |
|--|---|
| Ілюстрація   | Формулювання  |
|                     | <p>Якби не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.</p> $A \in \alpha; \quad M \notin \alpha.$  |
|                     | <p>Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>  |
|                     | <p>Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.</p> <p>Якщо <math>A \in \alpha</math> і <math>B \in \alpha</math>, то <math>AB \subset \alpha</math>.</p> |
|                    | <p>Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.</p>  |
| Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки. |   |
| Наслідки аксіом  |   |
|                   | <p>Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>   |
|                   | <p>Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.</p>  |

## Пояснення й обґрунтування

**1. Поняття про стереометрію.** Курс геометрії включає планіметрію і стереометрію. На уроках геометрії в 7–9 класах ви вивчали в основному планіметрію, тобто геометрію на площині. Усі фігури, які розглядають у планіметрії, наприклад трикутник, паралелограм, коло лежать в одній і тій самій площині. Усі точки кожної із цих фігур належать площині. Тому такі фігури називають *плоскими*.

Цього року ми вивчатимемо геометрію в просторі — стереометрію (грецьке слово «стерео» означає просторовий). Таким чином, *стереометрією* називається розділ геометрії, що вивчає просторові фігури та їх властивості. Просторові фігури можуть бути неплоскими (наприклад, куб чи сфера) або плоскими. Усю сукупність точок, які розглядають у стереометрії, називають *простором*. *Фігурою* (або фігурою в просторі) називатимемо довільну множину точок, розташованих у просторі. Зокрема, це всі фігури, розміщені в якій-небудь площині, у тому числі і сама ця площина. Отже, плоскі фігури також є просторовими фігурами. Тому основними властивостями плоских фігур, відомими з курсу планіметрії, ми користуватимемося і в стереометрії.

Проте в стереометрії найважливішими є просторові фігури, що не лежать цілком ні в одній площині, *неплоскі* фігури.

З деякими простими неплоскими фігурами ви ознайомилися в курсі геометрії 9 класу. До них відносять (рис. 3.1): куб (*a*); прямокутний паралелепіпед (*б*); призму (*в*); піраміду (*г-г*); конус (*д*); циліндр (*е*); кулю (*є*).

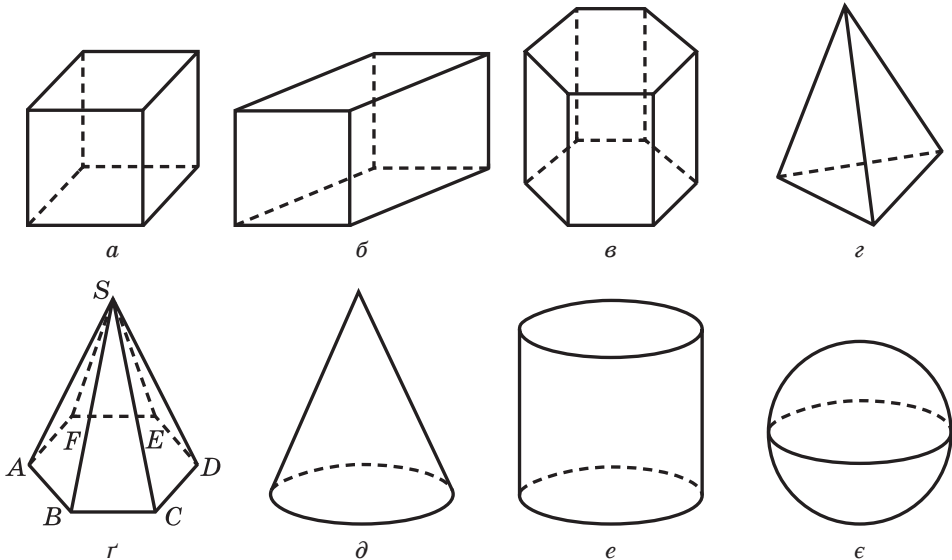


Рис. 3.1

Деякі фігури в просторі ще називають *тілами*<sup>1</sup>. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, що займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — центра — на відстань, що *дорівнює радіусу*. Ця поверхня обмежує кулю, яка складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — центра — на відстань, що *не перевищує радіуса*.

Куб, паралелепіпед, призма і піраміда є многогранниками. Строге означення многогранника дамо в 11 класі. Проте оскільки ми почнемо працювати з деякими видами многогранників у 10 класі, то нагадаємо означення, відомі вам з курсу геометрії 9 класу, що спираються на наочно-інтуїтивні уявлення.

*Многогранником* називатимемо обмежене тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників. Кожний із цих многокутників називають *гранню* многогранника, сторони многокутників — *ребрами* многогранника (рис. 3.2). *Вершинами* многогранника називають вершини його граней. Відрізок, що сполучає вершини многогранника, які не належать одній грані, називають *діагоналлю* многогранника.

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати, а всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Многогранник, дві грані якого — рівні  $n$ -кутники, а всі інші  $n$  граней — паралелограми, називають  *$n$ -кутною призмою*. Рівні  $n$ -кутники називають *основами призми*, а паралелограми — *бічними гранями*. Куб і прямокутний паралелепіпед є частковими випадками чотирикутної призми.

*Пірамідою* називається многогранник, одна з граней якого плоский многокутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину (див. рис. 3.1,  $g-r$ ). Трикутні грані називаються *бічними гранями піраміди*, спільна вершина бічних граней — *вершиною піраміди*, а многокутник — *основаю піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи, називаються *бічними ребрами піраміди*. Піраміда називається  *$n$ -кутною*, якщо її основою є  $n$ -кутник. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а всі бічні ребра рівні. Наприклад, якщо в піраміді  $SAB CDEF$  (див. рис. 3.1,  $r$ )  $ABCDEF$  — правильний шестикутник і  $SA = SB = SC = SD = SE = SF$ , то це правильна шестикутна піраміда.

Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром* (див. рис. 3.1,  $g$ ). Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називається *правильним*.

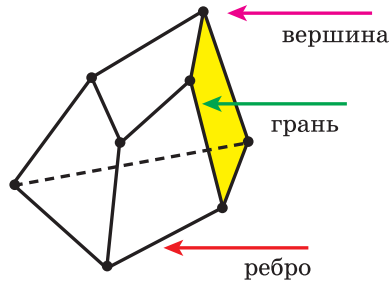


Рис. 3.2

<sup>1</sup> Строге означення тіла та його поверхні буде дано в курсі геометрії 11 класу.

**2. Основні поняття стереометрії.** Основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Як і в курсі планіметрії, точки в просторі будемо позначати великими латинськими буквами  $A, B, C, D, \dots$ , а прямі — малими латинськими буквами —  $a, b, c, \dots$  (або двома точками, що лежать на прямій). Площини позначатимемо малими грецькими буквами —  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , а зображатимемо у вигляді паралелограмів або довільних замкнутих областей

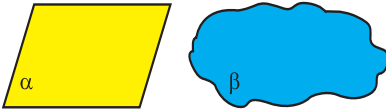


Рис. 3.3

(рис. 3.3). Ці способи зображення відповідають наочному уявленню про площину як про гладеньку поверхню стола, озера<sup>1</sup> (рис. 3.4) тощо. При цьому площину уявляють необмеженою в усі боки, ідеально рівною, що не має ніякої товщини.

Якщо  $A$  — точка площини  $\alpha$ , кажуть, що *точка  $A$  лежить у площині  $\alpha$* , а *площина  $\alpha$  проходить через точку  $A$* . Це можна записати так:  $A \in \alpha$ . Якщо точка  $M$  не належить площині  $\alpha$ , то це записують так:  $M \notin \alpha$  (рис. 3.5).

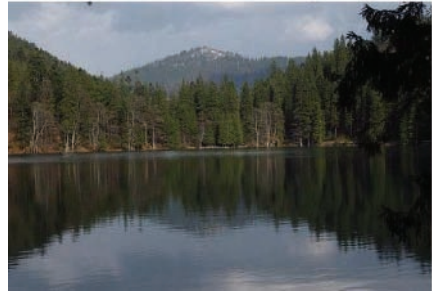


Рис. 3.4

Якщо кожна точка прямої  $a$  належить площині  $\alpha$ , то кажуть, що *пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$* , а *площина  $\alpha$  проходить через пряму  $a$*  (рис. 3.6). Це можна позначати так:  $a \subset \alpha$ . Якщо пряма  $b$  не належить площині  $\alpha$ , то це позначають так:  $b \not\subset \alpha$ .

Якщо пряма  $a$  і площина  $\alpha$  мають тільки одну спільну точку  $A$ , то кажуть, що вони *перетинаються в точці  $A$* , і записують так<sup>2</sup>:  $a \cap \alpha = A$ . На відповідному рисунку частину прямої, яка «закрита» зображенням площини, вважають невидимою і зображають штриховою лінією (рис. 3.7).

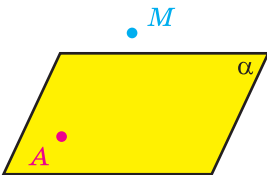


Рис. 3.5

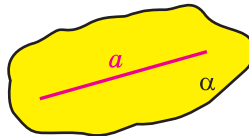


Рис. 3.6

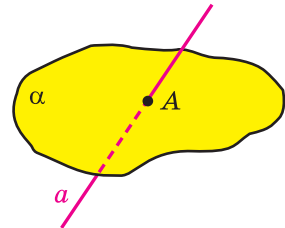


Рис. 3.7

<sup>1</sup> Озеро Синевир у Карпатах.

<sup>2</sup> У наведеному записі літерою  $A$  позначено геометричну фігуру — множину точок, яка складається з однієї точки.

**3. Аксиоми стереометрії.** У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур установлюють шляхом доведення відповідних теорем. Але на початку курсу, коли нам не відомо жодної властивості фігур у просторі, доводиться якісь властивості основних фігур приймати без доведення. Як і в планіметрії, ті властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. Нагадаємо, що основними фігурами в просторі є точка, пряма і площина. Аксиоми виражають інтуїтивно зрозумілі властивості площин та їх зв'язок з іншими основними фігурами — точками і прямими.

**Аксиома 1.** *Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.*

**Аксиома 2.** *Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.*

**Аксиома 3.** *Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.*

**Аксиома 4.** *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (рис. 3.8).*

**Аксиома 5.** *Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.*

У курсі стереометрії ми будемо також вважати, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксиоми планіметрії.

Зокрема, на кожній площині між двома вибраними точками є певна відстань — довжина відрізка, що їх сполучає. Хоча дві точки можуть належати одночасно різним площинам, але за аксіомою 5 відстань між ними на кожній із цих площин буде одна і та сама. Після того як вибрано одиничний відрізок, довжину кожного відрізка можна виразити додатним числом. До цього числа приписують назву одиничного відрізка: 2 см, 1,5 км тощо. Якщо одиничний відрізок не має назви, а довжина відрізка  $AB$  дорівнює, наприклад, 5 одиницям довжини, то пишемо:  $AB = 5$ , що є скороченням запису  $AB = 5$  одиниць.

Аксиома про відстані дозволяє порівнювати фігури, розміщені на різних площинах, зокрема, застосовувати до них теореми про рівність і подібність трикутників.

Користуючись поняттям відстані, можна означити рівність і подібність фігур у просторі абсолютно так само, як це було зроблено в планіметрії. Зокрема,

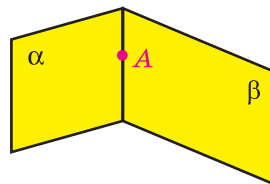


Рис. 3.8

дві фігури називаються *рівними*, якщо існує відповідність<sup>1</sup> між їх точками, при якій відстані між парами відповідних точок рівні<sup>2</sup>.

Так само, як і на площині,

дві фігури називаються *подібними*, якщо існує відповідність між їх точками, при якій відстані між відповідними точками змінюються в одне і те саме число разів.

Інакше кажучи, для двох довільних точок  $X$  і  $Y$  першої фігури і точок  $X'$  і  $Y'$  другої фігури, які їм відповідають, справедлива рівність  $X'Y' = k \cdot XY$ .

Надалі аксіому 5 ми, як правило, будемо використовувати неявно, тобто не посилаючись на неї, на відміну від перших чотирьох аксіом.

**4. Наслідки аксіом стереометрії.** Використовуючи аксіоми стереометрії, за допомогою логічних міркувань установлюють справедливості інших властивостей. Розглянемо деякі з них.

**Теорема 3.1.** *Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.*

● *Доведення.* Нехай точка  $A$  не лежить на прямій  $l$ . Виберемо на прямій  $l$  довільні точки  $B$  і  $C$  (рис. 3.9). Через точки  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій  $l$ , за аксіомою 2 проходить єдина площина  $\alpha$ . За аксіомою 3 пряма  $l$  лежить у площині  $\alpha$ . Отже, площина  $\alpha$  проходить через пряму  $l$  і точку  $A$ .

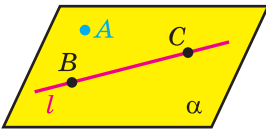


Рис. 3.9

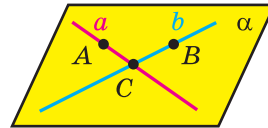


Рис. 3.10

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через пряму  $l$  і точку  $A$ , проходитиме також через точки  $A, B, C$ . За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною  $\alpha$ . ●

**Теорема 3.2.** *Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.*

● *Доведення.* Нехай прямі  $a$  і  $b$  перетинаються в точці  $C$  (рис. 3.10). Виберемо на прямій  $a$  довільну точку  $A$ , а на прямій  $b$  — точку  $B$ , від-

<sup>1</sup> Нагадаємо, що при встановленні відповідності між двома фігурами кожній точці однієї фігури ставиться у відповідність єдина точка другої фігури.

<sup>2</sup> Як і на площині, відповідність між двома фігурами, при якій зберігаються відстані між відповідними точками цих фігур, називають *переміщенням*, або *рухом*. Детальніше рух буде розглянуто в курсі геометрії 11 класу.



мінні від точки  $C$ . Через точки  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проходить єдина площина  $\alpha$ . За аксіомою 3 пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$  і пряма  $b$  лежить у площині  $\alpha$ . Отже, площина  $\alpha$  проходить через прямі  $a$  і  $b$ .

Покажемо, що ця площина єдина. Дійсно, будь-яка інша площина, що проходить через прямі  $a$  і  $b$ , проходитиме також через точки  $A, B, C$ . За аксіомою 2 вона повинна збігатися з площиною  $\alpha$ . ◉

*Зауваження.* Оскільки три точки  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій, однозначно визначають деяку площину, то іноді площину, що проходить через ці точки, позначають так:  $(ABC)$ .

Вираз «площина  $ABC$ » записують також скорочено: «пл.  $ABC$ ». Інколи, щоб підкреслити, що розглядувані чотири або більше точок лежать в одній площині, використовують скорочені записи «площина  $ABCD$ » або «пл.  $ABCD$ », які означають, що площина проходить через точки  $A, B, C, D$ .

З аксіом 2 та доведених теорем випливає, що *площину можна задати*:

- 1) *трьома точками, які не лежать на одній прямій;*
- 2) *прямою і точкою, яка не лежить на ній;*
- 3) *двома прямими, які перетинаються.*

Ми домовилися, що для будь-якої площини в просторі мають місце всі основні означення, теореми і аксиоми планіметрії. Тому в нашому викладі система аксіом стереометрії фактично складається з групи аксіом 1–5 стереометрії і з групи аксіом планіметрії (одну з можливих аксіоматик шкільного курсу планіметрії наведено в § 1). Але в планіметрії ми мали одну площину, на якій розміщались усі фігури, що розглядаються. У стереометрії багато, навіть нескінченно багато, площин. Через це розуміння деяких аксіом планіметрії як аксіом стереометрії потребує уточнення.

Наприклад, у будь-якому підручнику планіметрії використовують аксіому  $I_1$ : *яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.*

У планіметрії вона стверджує існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури), і саме в такому розумінні застосовувалась у процесі побудови геометрії на площині. У стереометрії ця аксіома набуває іншого змісту. Вона стверджує взагалі існування точок, які не лежать на даній прямій. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на іншій площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення. (Таке доведення, а також уточнені формулювання інших аксіом планіметрії див. у § 5.)

### Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Чи можуть три з них лежати на одній прямій?

#### Розв'язання

► Нехай дано чотири точки  $A, B, C, D$ , які не лежать в одній площині. Припустимо, що три з даних точок, наприклад  $A, B, C$ , лежать на одній прямій  $a$  (а четверта точка  $D$  не лежить на цій прямій).

Тоді через три точки  $A, B, D$ , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 можна провести площину  $\alpha$  (рис. 3.11). Але за аксіомою 3, якщо дві різні точки  $A$  і  $B$  прямої  $a$  лежать у площині  $\alpha$ , то і вся пряма лежить у цій площині, а отже, і точка  $C$  теж лежить у площині  $\alpha$ . Таким чином, усі чотири точки лежать в одній площині  $\alpha$ , що суперечить умові.

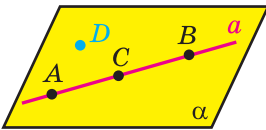


Рис. 3.11

Отже, наше припущення неправильне, і якщо чотири точки не лежать в одній площині, то жодні три з них не лежать на одній прямій. ◁

**Задача 2\*.** Доведіть, що через будь-які дві різні точки простору можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

#### Розв'язання

► Нехай  $A$  і  $B$  — дві різні точки простору. Виберемо точку  $C$ , яка не лежить на одній прямій з точками  $A$  і  $B$  (за відповідною аксіомою планіметрії).

#### Коментар

На запитання «Чи може виконуватися дане твердження?» можна дати відповідь:

«Так», і тоді достатньо навести хоча б один приклад, коли це твердження виконується;

«Ні», і тоді потрібно довести, що це твердження ніколи не виконується (найчастіше це доводять методом від супротивного).

Використовуючи метод від супротивного, потрібно:

- 1) зробити припущення, протилежне тому, що ми хочемо довести;
- 2) спираючись на аксіоми та вже доведені теореми, отримати суперечність з умовою або з відомою властивістю;
- 3) зробити висновок, що наше припущення неправильне, а правильне те, що потрібно було довести.

#### Коментар

У планіметрії твердження «Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну» було аксіомою (див. §1). Проте в стереометрії ця аксіома

Через точки  $A, B, C$ , які не лежать на одній прямій, за аксіомою 2 проведемо площину  $\alpha$ . У площині  $\alpha$  за відповідною аксіомою планіметрії через точки  $A$  і  $B$  можна провести пряму  $a$ . Припустимо, що в просторі через точки  $A$  і  $B$  можна провести ще одну пряму  $a_1$ , відмінну від прямої  $a$ . За аксіомою 3 пряма  $a_1$  лежить у площині  $\alpha$  (оскільки дві її точки  $A$  і  $B$  лежать у площині  $\alpha$ ). Тоді в площині  $\alpha$  через дві різні точки  $A$  і  $B$  проведено дві різні прямі  $a$  і  $a_1$ , що суперечить відповідній аксіомі планіметрії. Отже, через дві різні точки в просторі можна провести тільки одну пряму.  $\triangleleft$

стверджує тільки те, що *в розглядуваній площині через дві різні точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну*.

Відповідний факт у просторі потребує доведення. Для цього слід використати додатково таку аксіому планіметрії: «*Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, які не належать їй*».

Ця аксіома і в просторі гарантує існування точок, які не належать даній прямій.

**Задача 3.** Дано пряму і точку, що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать в одній площині.

#### Розв'язання

► Нехай дано пряму  $a$  в просторі і точку  $B$ , яка не лежить на ній. Через пряму  $a$  і точку  $B$  проведемо площину  $\alpha$  (за теоремою 3.1 ця площина єдина). Нехай довільна пряма  $b$  проходить через точку  $B$  і перетинає пряму  $a$  в точці  $A$  (рис. 3.12). Тоді точки  $A$  і  $B$  прямої  $b$  належать площині  $\alpha$ , отже, за аксіомою 3 і вся пряма  $b$  лежить у площині  $\alpha$ . Таким чином, усі прямі, які перетинають дану пряму  $a$  і проходять через дану точку  $B$ , що не лежить на ній, лежать в одній площині  $\alpha$ .  $\triangleleft$

#### Коментар

Спочатку побудуємо площину, яка проходить через дану пряму і точку. Потім доведемо, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку, лежать у цій площині.

Для коректного доведення слід також упевнитися, що побудована площина єдина.

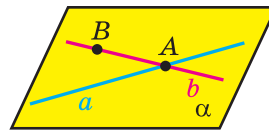


Рис. 3.12

### Запитання для контролю

1. Наведіть приклади просторових фігур, плоских фігур, неплоских фігур. Яке мінімальне число точок може містити неплоска фігура?
2. Назвіть основні поняття стереометрії. Сформулюйте аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них.
- 3\*. Дайте означення рівності та подібності фігур у просторі.
- 4\*. Доведіть, що через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
- 5\*. Доведіть, що через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

### Вправи

- 1°. Поясніть, чому стіл, який має три ніжки, обов'язково стійкий, а про стіл із чотирма ніжками цього стверджувати не можна.
- 2°. (*Жарт.*) Три мухи одночасно злетіли з кришки стола. Чи можуть вони знову опинитися в одній площині?
- 3°. Як можна перевірити якість виготовлення лінійки, якщо є гарно оброблена плоска плита? На який теоретичний факт спирається ця перевірка?
- 4°. Чи можна провести площину через три точки, які лежать на одній прямій? Відповідь поясніть, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
- 5°. Скільки площин може проходити через три дані точки?
6. Доведіть, що площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці.
7. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає дану площину.
8. Точка  $M$  належить площині  $\alpha$ , а точка  $N$  не належить їй. Чи належить площині  $\alpha$  середина відрізка  $MN$ ? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
9. Чи правильно, що можна провести площину через будь-які: 1) дві точки; 2) три точки; 3) чотири точки? Поясніть відповідь, спираючись на відповідні аксіоми чи наслідки з них.
- 10°. Скільки площин можна провести через одну пряму? Обґрунтуйте свою відповідь.
- 11°. Чи можуть дві площини мати: 1) тільки одну спільну точку; 2) тільки дві спільні точки?
- 12°. Чи можуть дві різні площини мати дві різні спільні прямі?
- 13°. Столяр за допомогою двох ниток перевіряє, чи буде стійко стояти на полу виготовлений стіл, який має чотири ніжки. Як потрібно натягнути ці нитки?
14. Як розташовані дві площини, якщо в кожній із них лежить один і той самий трикутник?

15. Доведіть, що існує площина, яка перетинає дану площину.
16. Точки  $A, B, C, D$  не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі  $AC$  і  $BD$  не перетинаються.
17. Дано площину  $\alpha$  і квадрат  $ABCD$ . Чи може площині  $\alpha$  належати: 1) тільки одна вершина квадрата; 2) тільки дві його вершини; 3) тільки три вершини?
- 18\*. Дві вершини трикутника належать площині  $\alpha$ . Чи належить цій площині третя вершина, якщо відомо, що даній площині належить: 1) точка перетину медіан трикутника; 2) центр вписаного в трикутник кола?
- 19\*. Чи кожна точка кола належить площині, якщо відомо, що цій площині належать: 1) дві точки кола; 2) три точки кола?
- 20\*. Чи правильно, що через три прямі, які попарно перетинаються, проходить єдина площина?
21. Із прямих і площин, що проходять через вершини куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 3.13), назвіть:
- 1) пари прямих, що перетинаються;
  - 2) трійки прямих, які перетинаються в одній точці;
  - 3) пари площин, що перетинаються;
  - 4) трійки площин, які перетинаються в одній точці.
- 22\*. Дано дві прямі, які перетинаються. Доведіть, що всі прямі, що перетинають обидві дані прямі і не проходять через їх точку перетину, лежать в одній площині.
- 23\*. Три площини мають спільну точку. Чи правильне твердження, що всі ці площини мають спільну пряму? Скільки прямих можна отримати у разі попарного перетину цих площин?
- 24\*. Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.
25. Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві із цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.
26. Чи лежать в одній площині прямі  $a, b$  і  $c$ , якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить всім трьом прямим? Виконайте рисунок.
27. Прямі  $a, b$  і  $c$ , що лежать в одній площині, перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку  $O$  та перетинає три дані прямі  $a, b$  і  $c$ .

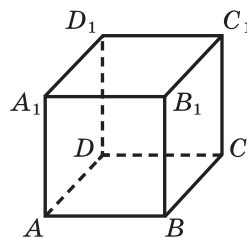
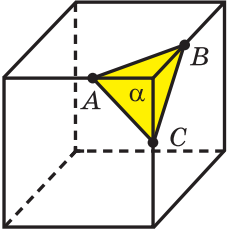
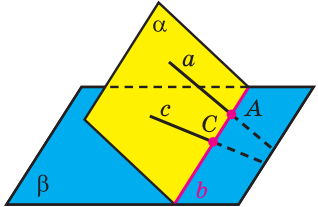
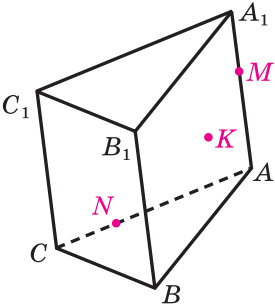


Рис. 3.13

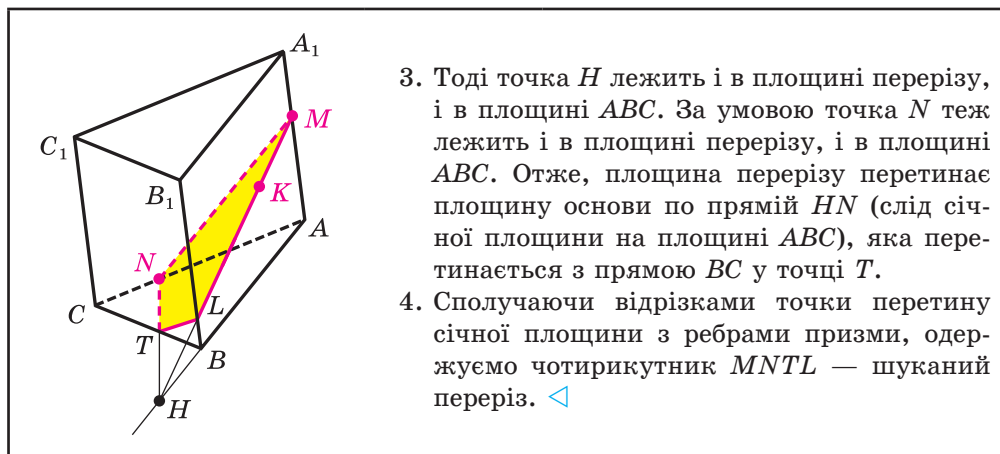
## § 4

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ  
ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

Таблиця 5

| ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ  |  |
|---|--|
| Означення і зміст побудови  | Приклад  |
| <p><i>Перерізом</i> многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і цієї площини.</p> <p>Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника, а для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).</p>  |  <p>Перерізом куба площиною <math>\alpha</math>, яка проходить через точки <math>A, B, C</math> на ребрах куба, що виходять з однієї вершини, є трикутник <math>ABC</math>.</p>  |
| ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ   |  |
| Основні поняття   |  |
|  <p>Якщо площина <math>\alpha</math> перетинає площину <math>\beta</math> по прямій <math>b</math>, то пряма <math>b</math> називається <i>слідом площини <math>\alpha</math> на площині <math>\beta</math></i>.</p> <p>Для того щоб отримати слід площини <math>\alpha</math> на площині <math>\beta</math> (тобто пряму <math>b</math>), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини <math>\alpha</math> з площиною <math>\beta</math>.</p> |  |
| Приклад   |  |
| <p>Побудуйте переріз призми <math>ABCA_1B_1C_1</math> площиною, яка проходить через точки <math>K, M, N</math>, де <math>M \in AA_1</math>, <math>N \in AC</math> і точка <math>K</math> лежить у грані <math>AA_1B_1V</math>.</p>   | <p><i>Розв'язання</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Розглянемо допоміжну площину <math>AA_1B_1V</math>. Слід цієї площини на площині основи — пряма <math>AB</math>.</li> <li>2. У допоміжній площині розглянемо пряму <math>MK</math>, яка лежить у площині перерізу. Її точка перетину з площиною <math>ABC</math> лежить на прямій <math>AB</math> — це точка <math>H</math> (а точка перетину з ребром <math>BB_1</math> — точка <math>L</math>).</li> </ol> |

Продовження табл. 5



3. Тоді точка  $H$  лежить і в площині перерізу, і в площині  $ABC$ . За умовою точка  $N$  теж лежить і в площині перерізу, і в площині  $ABC$ . Отже, площина перерізу перетинає площину основи по прямої  $HN$  (слід січної площини на площині  $ABC$ ), яка перетинається з прямою  $BC$  у точці  $T$ .
4. Сполучаючи відрізками точки перетину січної площини з ребрами призми, одержуємо чотирикутник  $MNTL$  — шуканий переріз. ◁

### Пояснення й обґрунтування

**1. Зміст задач на побудову в стереометрії.** У планіметрії задачі на побудову найчастіше розв'язували з використанням циркуля і лінійки. За їх допомогою можна будувати відповідні фігури площини (прямі, кола, трикутники тощо). Але не існують креслярські інструменти, які дозволяли б у просторі будувати неплоскі фігури. Із цієї причини завдання на побудову в стереометрії за своїм змістом суттєво відрізняються від конструктивних завдань планіметрії. Стереометричні побудови виконують, у першу чергу, у думках. Вони є більше завданнями на доведення існування фігури, що задовольняє дані умови. Це доведення повинно спиратися на відповідні аксіоми та властивості стереометричних фігур.

Задачі на побудову в стереометрії можна умовно поділити на дві групи: задачі на *уявлювані побудови* (типу: провести площину через пряму і точку поза нею) і задачі на зображеннях просторових тіл — так звані задачі на *проекційному рисунку*. Розв'язання стереометричних задач на побудову зазвичай супроводжують рисунками, що можуть бути двох принципово різних типів. Для задач на уявлювані побудови це, як правило, ескізний рисунок, що ілюструє основні етапи побудови. Під час його виконання допускається певна довільність, якщо вона не приводить до суперечностей з умовою задачі (це, наприклад, рисунки 3.3 та 3.5–3.12). Другий тип рисунка до задачі — це плоске зображення на проекційному рисунку, виконане з використанням властивостей паралельного проектування<sup>1</sup>. Побудови на проекційному рисунку однозначно відповідають просторовим побудовам зображуваної фігури в оригіналі.

<sup>1</sup> Властивості паралельного проектування буде розглянуто в § 9.

**2. Задачі на побудову перерізів многогранників. Метод слідів.** Під час розв'язування деяких стереометричних задач, пов'язаних із многогранником, доводиться будувати фігуру, що є перетином многогранника з площиною. Якщо такою фігурою є многокутник, то його називають перерізом<sup>1</sup> многогранника. Інакше кажучи,

*перерізом многогранника площиною називається многокутник, який є спільною частиною многогранника і площини.*

Цю площину ще називають *січною площиною*. У таких задачах зазвичай дано многогранник (тобто зображення многогранника) і потрібно побудувати переріз (тобто зображення перерізу) площиною, яка задана певним чином, найчастіше трьома точками. Для побудови перерізу достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з відповідними гранями многогранника. Для цього потрібно побудувати точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їх продовженнями).

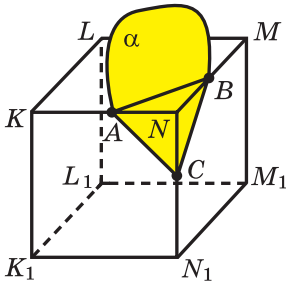


Рис. 4.1

Наприклад, дано зображення куба і три точки  $A, B, C$ , які належать ребрам, що виходять з однієї вершини (рис. 4.1). Для побудови перерізу куба площиною  $\alpha$ , яка проходить через ці точки, достатньо сполучити їх відрізками.

Дійсно, площина  $\alpha$  має з площиною  $KNN_1K_1$  передньої грані куба дві спільні точки  $A$  і  $C$ . Отже,  $AC$  — пряма перетину цих площин, а значить, площина  $\alpha$  перетинає передню грань — квадрат  $KNN_1K_1$  по відрізку  $AC$ . Аналогічно дана площина  $\alpha$  перетинає верхню грань по відрізку  $AB$ , а бічну грань — по відрізку  $BC$ . Отже, трикутник  $ABC$  і є шуканим зображенням перерізу куба.

У складніших випадках, для того щоб побудувати переріз многогранника, часто буває зручним побудувати спочатку *пряму перетину січної площини з площиною якоїсь грані* (так званий «слід» січної площини на цій грані), а потім знайти точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (чи з їх продовженнями). Іноді доводиться розглядати певні допоміжні площини, для яких також будують слід січної площини (або слід допоміжної площини на площині якоїсь грані). Цей метод побудови перерізів часто називають *методом слідів*.

Для того щоб отримати слід (тобто пряму  $b$ ) площини  $\alpha$  на площині  $\beta$  (рис. 4.2), достатньо знайти точки перетину двох прямих площини  $\alpha$  з площиною  $\beta$  (оскільки

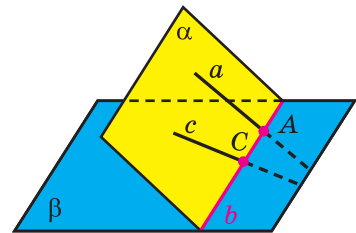


Рис. 4.2

<sup>1</sup> Детальніше побудову перерізів многогранників див. у § 12.



дві точки, наприклад,  $A$  і  $C$  однозначно визначають пряму  $b$ ). Відзначимо також, що *точка перетину будь-якої прямої  $a$  площини  $\alpha$  з площиною  $\beta$  завжди належить сліду площини  $\alpha$  на площині  $\beta$*  (тобто прямій  $b$ ).

Приклад застосування методу слідів для побудови перерізу призми наведено в табл. 5, а методу слідів і допоміжних площин для побудови перерізу піраміди наведено нижче.

### Приклад розв'язання задач

**Задача\*.** Побудуйте переріз піраміди  $ABCD$  площиною, що проходить через точки  $K, L, M$  (рис. 4.3, *a*), де  $L \in AC$ , а точки  $K$  і  $M$  лежать у гранях  $ABD$  і  $BCD$  відповідно.

#### Розв'язання<sup>1</sup>

▶ Відразу побудувати «слід» площини перерізу на якійсь із граней не можливо. Розглянемо допоміжну площину  $DKM$ . Спочатку знайдемо слід цієї площини на площині основи  $ABC$ . Для цього знайдемо точки перетину з площиною основи двох прямих  $DK$  і  $DM$  з допоміжної площини. Оскільки точка  $K$  лежить у площині  $ABD$ , то пряма  $DK$  перетинає пряму  $AB$  (а значить, і площину  $ABC$ ) у деякій точці  $E$  (рис. 4.3, *б*). Аналогічно точка  $F$  перетину прямої  $DM$  з прямою  $BC$  є точкою перетину прямої  $DM$  з площиною основи. Отже, слід допоміжної площини на площині основи — це пряма  $EF$ .

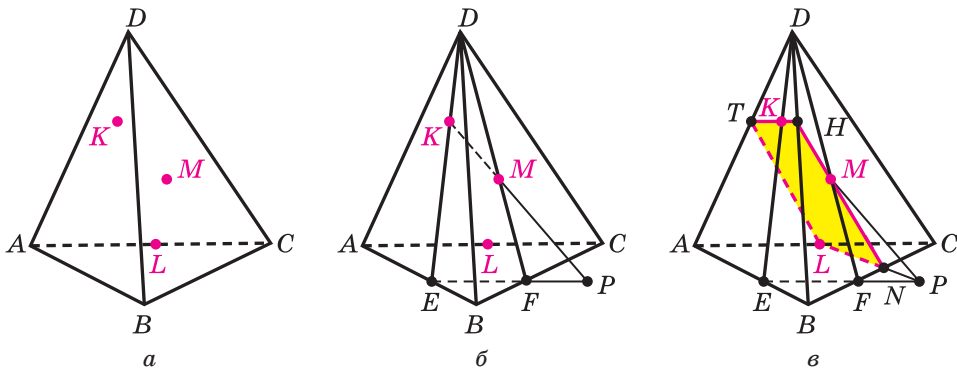


Рис. 4.3

Далі розглянемо в допоміжній площині  $DKM$  пряму  $KM$ . Оскільки точка перетину прямої  $KM$  з площиною основи лежить на прямій  $EF$  (на сліді допоміжної площини), то знаходимо точку  $P$  перетину прямих  $KM$  і  $EF$ . Це і буде точка перетину прямої  $KM$  з площиною основи  $ABC$ .

Точка  $P$  лежить у площині перерізу і в площині  $ABC$ . Але в цій самій площині лежить і точка  $L$ . Отже, площина перерізу перетинає площину

<sup>1</sup> Коментар включено в запис розв'язання.

основи по прямій  $LP$  (рис. 4.3, *в*), що перетинається з прямою  $BC$  в точці  $N$ . Тепер можемо послідовно знайти точки перетину площини перерізу з іншими ребрами піраміди. Точки  $N$  і  $M$  лежать у площині перерізу та в грані  $BCD$ . Тоді пряма  $NM$  перетинає ребро  $BD$  у точці  $H$  — це і буде наступна вершина многокутника перерізу. Аналогічно в площині  $ABD$  проводимо пряму  $HK$ , яка перетинає ребро  $AD$  у точці  $T$ , і сполучаємо відрізком точки  $T$  і  $L$ . Чотирикутник  $LNHT$  — шуканий переріз.  $\triangleleft$

### Запитання для контролю

1. Поясніть, що називають перерізом многогранника площиною. Якою фігурою є переріз многогранника?
2. Поясніть, що називають слідом площини  $\alpha$  на площині  $\beta$ . Як можна одержати цей слід, маючи декілька прямих у площині  $\alpha$ ?
3. Поясніть на прикладі, як можна побудувати переріз многогранника методом слідів.

### Вправи

- 1°. Користуючись зображенням куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , наведеним на рисунку 4.4, назвіть: 1) точку перетину прямої  $MC$  ( $M \in AA_1$ ) із площиною  $B_1 BC_1$ ; 2) лінію перетину площин  $MC_1 C$  і  $BCB_1$ .
- 2°. За зображенням піраміди, наведеним на рисунку 4.5, назвіть: 1) точку перетину прямої  $MD$  ( $M \in BD$ ) і площини  $ABC$ ; 2) лінію перетину площин  $MBC$  і  $BEC$  ( $E \in AC$ ).

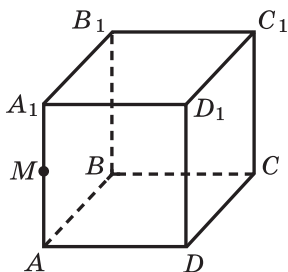


Рис. 4.4

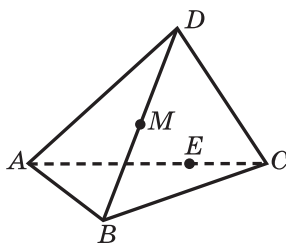


Рис. 4.5

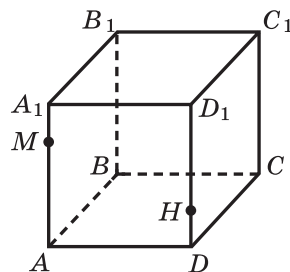


Рис. 4.6

- 3°. Нарисуйте в зошиті зображення куба, наведене на рисунку 4.6, і побудуйте: 1) точку перетину прямої  $MH$  з площиною  $ABC$ ; 2) лінію перетину площин  $MHC$  і  $ADC$ .
- 4°. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди, наведене на рисунку 4.7, і побудуйте: 1) точку перетину прямої  $MH$  з площиною  $ABC$ ; 2) лінію перетину площин  $MHB$  і  $ABC$ .
- 5°. Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через: 1) точки  $A_1$ ,  $B$  і  $C_1$ ; 2) точки  $B$ ,  $D$  і середину ребра  $CC_1$ .

- 6°. Побудуйте переріз піраміди  $ABCD$  площиною, що проходить через:  
 1) точки  $C$  і  $D$  та середину ребра  $AB$ ; 2) точку  $C$  та середини ребер  $AD$  і  $BD$ .
- 7°. Користуючись рисунком 4.8, опишіть побудову перерізу трикутної піраміди  $SKLM$  площиною, що проходить через точки  $A, B, C$  ( $A \in KM, B \in SK, C \in SL$ ), та поясніть правильність її виконання, спираючись на відповідні аксіоми і теореми.

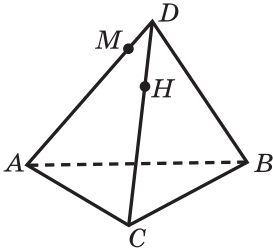


Рис. 4.7

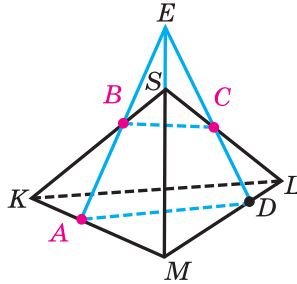


Рис. 4.8

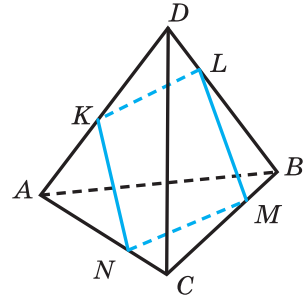


Рис. 4.9

8. Чи може в перерізі тетраедра  $ABCD$  площиною бути чотирикутник  $KLMN$ , зображений на рисунку 4.9?
9. Нарисуйте в зошиті зображення прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 4.10) і побудуйте: 1) точку перетину прямої  $D_1 M$  з площиною основи  $ABCD$  ( $M \in CC_1$  і  $CM = \frac{1}{4} CC_1$ ); 2) точку перетину прямої  $D_1 K$  з площиною основи  $ABCD$  ( $K \in AA_1$  і  $AK = \frac{1}{5} AA_1$ ); 3) слід площини  $D_1 KM$  на площині основи  $ABCD$ ; 4) переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $D_1, K$  і  $M$ .

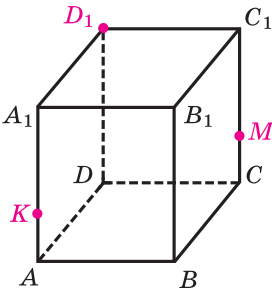


Рис. 4.10

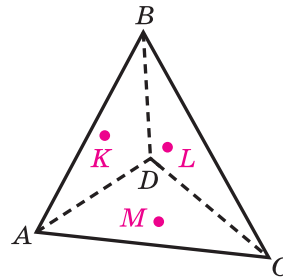


Рис. 4.11

- 10\*. Нарисуйте в зошиті зображення піраміди  $ABCD$  (рис. 4.11) і побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через точки  $K$ ,  $L$  і  $M$ , які знаходяться на гранях  $ABD$ ,  $BCD$  і  $ACD$  відповідно.
11. У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром  $a$   $O$  — точка перетину діагоналей грані  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , точка  $K$  — середина ребра  $DC$ ; точка  $M$  лежить на промені  $BB_1$ ,  $B_1 M = 2a$ . Побудуйте переріз куба площиною  $OKM$ .
12. Побудуйте переріз піраміди  $ABCD$  площиною, яка проходить через точки  $K$ ,  $M$ ,  $N$ , де  $K$  і  $M$  — середини ребер  $DC$  і  $BC$ , а  $N$  — точка ребра  $AB$ , така, що  $AN = \frac{1}{3} AB$ .
13. Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через середини  $M$ ,  $N$ ,  $K$  його ребер  $AD$ ,  $DC$ ,  $BB_1$ .
14. Побудуйте переріз куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через середини  $K$ ,  $L$ ,  $M$  його ребер  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $DC$ .
15. На рисунках 4.12–4.23 вказано точки  $M$ ,  $P$  і  $R$ , які лежать або на ребрах, або на гранях куба. Побудуйте переріз куба площиною  $MRP$  для кожного із даних розміщень точок.

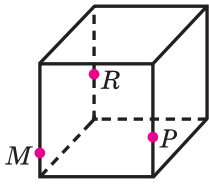


Рис. 4.12

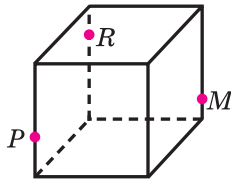


Рис. 4.13

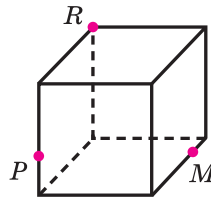


Рис. 4.14

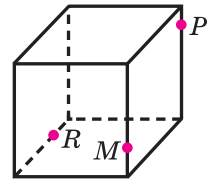


Рис. 4.15

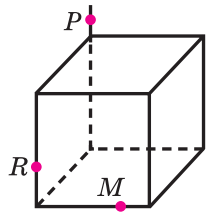


Рис. 4.16

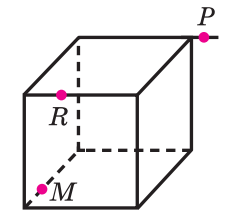


Рис. 4.17

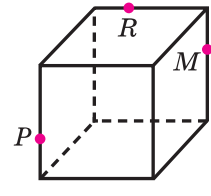


Рис. 4.18

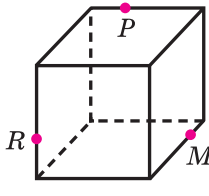


Рис. 4.19

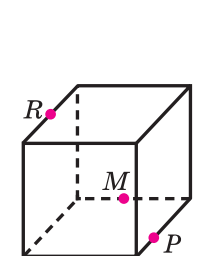


Рис. 4.20

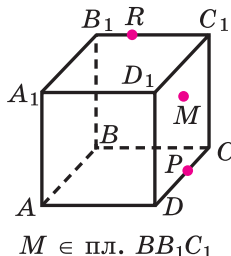


Рис. 4.21

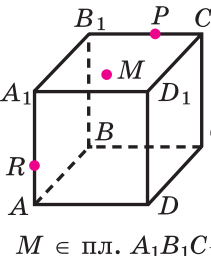


Рис. 4.22

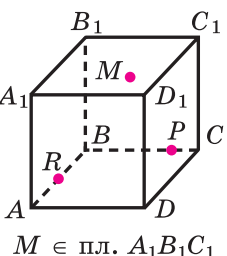


Рис. 4.23

## § 5 ПОНЯТТЯ ПРО АКСІОМАТИЧНИЙ МЕТОД У ГЕОМЕТРІЇ

**Аксіоматична побудова геометрії.** Курс планіметрії, який ви вивчали в 7–9 класах, і запропонований курс стереометрії значною мірою спираються на певні наочні уявлення про геометричні фігури. Разом з тим геометрія як наукова теорія про властивості фігур, розташованих у просторі, може бути побудована логічним (дедуктивним) методом на основі системи аксіом.

Пояснимо суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Вводять основні (*неозначувані*) поняття — «фігури» і формулюють основні положення (*аксіоми*), у яких виражені основні співвідношення між основними поняттями<sup>1</sup>. Далі, використовуючи основні поняття і основні співвідношення між ними, визначають нові поняття — «фігури», формулюють і доводять нові твердження — *теореми* про властивості введених понять. При цьому доводять теореми строго логічним шляхом, спираючись на аксіоми і раніше доведені теореми. Таким чином одержують геометричну систему тверджень, пов'язаних низкою логічних залежностей.

*До системи аксіом висувають такі вимоги.* Вона повинна бути:

1) *несуперечливою*, тобто такою, щоб із цієї системи аксіом неможливо було одержати логічним шляхом два твердження, які суперечать одне одному, — деяке твердження та його заперечення;

2) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом даної системи не була логічним наслідком інших її аксіом;

3) *повною*, тобто такою, щоб за допомогою аксіом тільки цієї системи, не додаючи нових аксіом, можна було довести (або спростувати) строго логічним шляхом будь-яке твердження про властивості фігур даної геометрії.

У шкільних курсах геометрії найчастіше реалізується тільки перша вимога — несуперечливість системи аксіом. Через прагнення досягти більшої наочності і простоти доведень застосовують систему аксіом, яка не є незалежною і, як правило, не є повною<sup>2</sup>. Тому для строгішого і докладнішого викладення матеріалу потрібно доповнити та уточнити запропоновану систему аксіом і обґрунтувати певні властивості, які необхідні для розгляду подальшого матеріалу курсу стереометрії.

Дамо уточнені формулювання<sup>3</sup> деяких аксіом планіметрії (які наведено в § 1) для їх використання в стереометрії.

<sup>1</sup> Зауважимо, що крім чисто геометричних у планіметрії та стереометрії використовують деякі основні (неозначувані) поняття, загальні і для інших розділів математики, наприклад, поняття «множина».

<sup>2</sup> Повна система аксіом евклідової геометрії наведена на с. 59.

<sup>3</sup> У наведених формулюваннях уточнення виділено курсивом.

- Пряма, яка належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.
- Від півпрямой на площині, яка містить її, у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за  $180^\circ$ , і тільки один.
- На площині через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більше як одну пряму, паралельну даній.

Як уже зазначалося в § 1, аксіома планіметрії  $I_1$ :

яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй, у стереометрії набуває дещо іншого змісту. У планіметрії ця аксіома стверджувала існування точок поза даною прямою на тій площині, на якій лежить пряма (і всі розглядувані фігури). Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, що не лежать на даній прямій. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на іншій площині, на якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення.

● Нехай дано площину  $\alpha$  і  $a$  — пряму в цій площині (рис. 5.1). Доведемо існування точок у площині  $\alpha$ , що не лежать на прямій  $a$ .

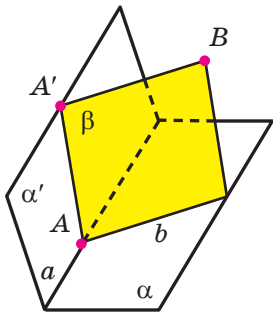


Рис. 5.1

Позначимо точку  $A$  на прямій  $a$  і точку  $A'$  поза площиною  $\alpha$ . Через пряму  $a$  і точку  $A'$  проведемо площину  $\alpha'$ . Візьмемо точку  $B$  поза площиною  $\alpha'$  та проведемо через пряму  $AA'$  і точку  $B$  площину  $\beta$ . Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $b$ , яка проходить через точку  $A$  і відмінна від прямої  $a$ . Точки цієї прямої, відмінні від точки  $A$ , лежать у площині  $\alpha$  поза прямою  $a$ , що й потрібно було довести. ●

Для розгляду деяких стереометричних понять корисно ввести також поняття «розбиття простору на частини кожною з площин».

Пригадаємо, що кожна з прямих на площині розбиває її на дві півплощини (рис. 5.2), що мають такі властивості:



Рис. 5.2

- 1) півплощина, обмежена прямою  $a$ , містить цю пряму, але не збігається з нею;
- 2) якщо кінці  $A$  і  $B$  відрізка  $AB$  лежать в одній півплощині (але не належать прямій  $a$ ), то відрізок  $AB$  не перетинає пряму  $a$  (рис. 5.2, а);

3) якщо ж кінці  $A$  і  $B$  відрізка  $AB$  належать різним півплощинам (але не належать прямій  $a$ ), то відрізок  $AB$  перетинає пряму  $a$  (рис. 5.2, б).

Аналогічно означають і частину простору, обмежену даною площиною, — *півпростір*.

Площина, яка обмежує півпростір, називається його *границею*.

**Теорема 5.1.** Площина розбиває простір на два півпростори. Якщо точки  $A$  і  $B$  належать одному півпростору, то відрізок  $AB$  не перетинає площину (рис. 5.3, а). Якщо ж точки  $A$  і  $B$  належать різним півпросторам, то відрізок  $AB$  перетинає площину (рис. 5.3, б).

● *Доведення.* Нехай  $\alpha$  — дана площина. Позначимо точку  $D$ , яка не лежить на площині  $\alpha$ . Така точка існує за аксіомою 1 стереометрії. Розіб'ємо всі точки простору, які не лежать на площині  $\alpha$ , на два півпростори таким чином. Точку  $A$  віднесемо до одного півпростору, якщо відрізок  $AD$  не перетинає площину  $\alpha$ , і до другого півпростору, якщо відрізок  $AD$  перетинає площину  $\alpha$ . Покажемо, що це розбиття простору має властивості, названі в теоремі.



Рис. 5.3

Нехай точки  $A$  і  $B$  належать першому півпростору. Проведемо через точки  $A$ ,  $B$  і  $D$  площину  $\alpha'$ . Якщо площина  $\alpha'$  не перетинає площину  $\alpha$ , то відрізок  $AB$  теж не перетинає цю площину. Припустимо, що площина  $\alpha'$  перетинає площину  $\alpha$  (рис. 5.4). Оскільки площини різні, то їх перетин відбувається по деякій прямій  $a$ . Пряма  $a$  розбиває площину  $\alpha'$  на дві півплощини. Точки  $A$  і  $B$  належать одній півплощині, а саме тій, у якій лежить точка  $D$ . Тому відрізок  $AB$  не перетинає пряму  $a$ , а отже, і площину  $\alpha$ .

Якщо точки  $A$  і  $B$  належать другому півпростору, то площина  $\alpha'$  перетинає площину  $\alpha$ , оскільки відрізок  $AD$  перетинає площину  $\alpha$ . Точки  $A$  і  $B$  належать одній півплощині розбиття площини  $\alpha'$  прямою  $a$ . Звідси випливає, що відрізок  $AB$  не перетинає пряму  $a$ , а отже, і площину  $\alpha$ .

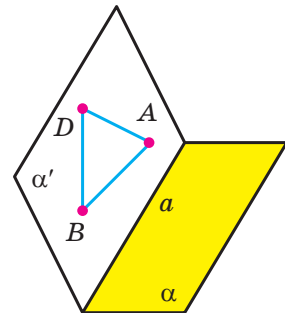


Рис. 5.4

Якщо, нарешті, точка  $A$  належить одному півпростору, а точка  $B$  — іншому, то площина  $\alpha'$  перетинає площину  $\alpha$ , а точки  $A$  і  $B$  лежать у різних півплощинах площини  $\alpha'$  відносно прямої  $a$ . Тому відрізок  $AB$  перетинає пряму  $a$ , а отже, і площину  $\alpha$ .  $\bullet$

Необхідно зазначити, що в стереометрії існує декілька рівносильних систем аксіом, одну з яких ми і обрали. Якби ми обрали іншу систему, деякі з аксіом, наведених у § 1 і 3, перетворилися б на теореми, а деякі теореми стали б аксіомами.

На виняткове значення властивості про розбиття площиною простору на два півпростори чи не вперше звернув увагу всесвітньо відомий український математик Михайло Васильович Остроградський. Він написав підручник з елементарної геометрії, який справляв величезний вплив на викладання геометрії впродовж усього XIX ст.

Народився М. В. Остроградський у селі Пашенній Кобеляцького повіту Полтавської губернії (тепер це Козельщинський район Полтавської області) в сім'ї дрібного поміщика. З діда-прадіда Остроградські належали до козацької старшини, а сам рід, за легендою, походив від знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких; звідси і прізвище — Остроградські. Михайло Остроградський навчався спочатку в Полтавській гімназії, а потім — у щойно відкритому Харківському університеті. Після закінчення університету Остроградський у 1822 р. їде до Парижа, де слухає лекції таких

корифеїв математичної науки, як Лаплас, Пуассон, Ампер, Фур'є, Штурм, Коші, Пуансо та ін. У 1826 р. Огюстен Коші в одній зі своїх праць дуже схвально відгукнувся про успіхи молодого Остроградського. Такий відгук цінився тоді більше від будь-якого диплома. Тож, коли невдовзі Остроградський переїхав до Петербурга, за ним прибула і слава першого математика Росії. Подальшими своїми дослідженнями він неодноразово підтверджував цей почесний статус.

М. В. Остроградський створив велику наукову школу, традиції якої ще й досі помітні в проблематиці математичних досліджень вітчизняних учених. Він був обраний академіком багатьох академій, почесним членом університетів і наукових товариств. Поховали його на батьківщині. У Полтавському педагогічному інституті відкрито музей М. В. Остро-



Михайло Васильович  
Остроградський  
(1801–1861)

градського. 200-річчя з дня народження видатного українського математика занесено до календаря пам'ятних дат ЮНЕСКО.



У нашому курсі система аксіом (так само, як і в інших підручниках для школи) не є повною. Так, зокрема, із наведеної системи аксіом не випливає, що між двома даними точками прямої обов'язково лежить ще точка цієї прямої. Це здається очевидним, оскільки пряма, за нашими уявленнями, суцільна, неперервна, без «дірок». Але таке уявлення повинне одержати точне означення у вигляді властивості прямої. Аксіоми, які задають цю властивість, — це аксіоми неперервності<sup>1</sup>. Ми не наводимо їх, оскільки це утруднило б виклад, тому доводиться частково поступитися строгістю заради наочності і простоти доведення.

### Запитання для контролю

1. Поясніть суть аксіоматичного методу побудови геометрії.
2. Які вимоги висувають до системи аксіом? Поясніть суть кожної з вимог.
3. Поясніть, що називається півпростором, який визначається даною площиною  $\alpha$ .
4. Сформулюйте теорему про розбиття простору площиною. Поясніть її зміст.
- 5\*. Доведіть теорему про розбиття простору площиною.

### Вправи

1. На яке найбільше число частин можуть розбивати простір: 1) дві площини; 2) три площини; 3) чотири площини?
2. Поясніть, чому весь простір не може бути півпростором, що визначається деякою площиною  $\alpha$ .
3. Чи може площина, що перетинає площину  $\alpha$ , бути повністю розташованою в одному з півпросторів, які визначає площина  $\alpha$ ?
4. Що можна сказати про взаємне розташування двох півпросторів та їх границь  $\alpha$  і  $\beta$ , якщо: 1) перетином<sup>2</sup> цих півпросторів є площина  $\alpha$ ; 2) перетин цих півпросторів збігається з їх об'єднанням?
5. У результаті перетину скількох півпросторів можна отримати: 1) куб; 2) трикутну піраміду?
6. Кінці ламаної, яка складається з двох ланок, лежать по різні боки від площини  $\alpha$ . Доведіть, що ламана перетинає площину  $\alpha$ .
7. Поясніть, звідки випливає, що в кожному півпросторі лежить нескінченна множина: 1) точок; 2) прямих.
8. Дано  $n > 4$  точок, кожні чотири з яких лежать в одній площині. Доведіть, що всі ці  $n$  точок лежать в одній площині.

<sup>1</sup> Формулювання аксіом неперервності див. на с. 60.

<sup>2</sup> Під перетином півпросторів розуміємо фігуру, яка складається з усіх спільних точок цих півпросторів.

9. Дано  $n > 3$  прямих, кожні дві з яких перетинаються. Доведіть, що всі  $n$  прямих лежать в одній площині або всі проходять через одну точку.
10. Скільки різних площин можуть визначати 5 точок? Дайте всі можливі відповіді. Наведіть відповідні рисунки.
11. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямої  $a$ . Через точку  $A$  прямої  $a$  проведено площину  $\gamma$ , що не містить прямої  $a$ . Доведіть, що площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по двох різних прямих.
12. Дано площину  $\alpha$  та три прямі  $AB$ ,  $BC$  і  $AC$ , які перетинають її відповідно в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Доведіть, що точки  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  належать одній прямій.
- 13\*. Ребро правильного тетраедра  $MABC$  дорівнює 18. Точки  $P$  і  $K$  є відповідно серединами ребер  $AM$  і  $BM$ , а точка  $T$  ділить ребро  $MC$  у відношенні  $MT : TC = 4 : 1$ . Знайдіть відстань від вершини  $C$  до прямої перетину площин  $TPK$  і  $ABC$ .
- 14\*. У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  довжина ребра дорівнює 4. Точка  $M$  належить ребру  $AA_1$ ,  $AM = 3$ , точка  $P$  належить ребру  $CC_1$  і  $PC_1 = 1$ , точка  $K$  ділить ребро  $DD_1$  у відношенні  $1 : 3$ , починаючи від точки  $D$ . Знайдіть відстань від вершини  $B$  до прямої перетину площин  $KMP$  і  $ADC$ .

### Відомості з історії

Ідею дедуктивного методу побудови геометрії висунув ще давньогрецький філософ, учень Сократа (469–399 рр. до н. е.), Платон (422–347 рр. до н. е.). Проте дійсним родоначальником наукової теорії логічного виведення вважають учня Платона, давньогрецького мислителя Аристотеля (384–322 рр. до н. е.).

Стосовно геометрії ідеї Аристотеля реалізував давньогрецький математик Евклід (III ст. до н. е.) у своєму трактаті з геометрії «Начала». Протягом 2000 років це творіння Евкліда служило єдиним керівництвом, за яким навчали геометрії; від нього йшли й усі задуми подальшого досконалішого обґрунтування геометрії. Слід зазначити, що система сформульованих Евклідом аксіом (постулатів) потребувала вдосконалення, оскільки була неповною, а тому доведення нерідко «грішили» зверненням до наочності.

Кропітка праця багатьох поколінь математиків світу дозволила створити науковий аксіоматичний метод побудови геометрії. Велика роль у цьому належить відомим німецьким математикам Феліксу Клейну (1849–1925) і Давиду Гільберту (1862–1943). У 1899 р. з'явилося видання «Основ геометрії» Гільберта, де він сконструював аксіоматику таким чином, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою.

**Аксіоматика евклідової геометрії.** Сучасна система аксіом евклідової геометрії складається з п'яти груп і спирається на шість основних (неозначуваних) понять. Це — об'єкти трьох видів: точки, прямі та площини і три види відношень між ними, які виражаються словами «належить», «лежить між», «рух».

**I. Аксіоми належності.**

- $I_1$ . Через кожні дві точки можна провести пряму, і причому тільки одну.
- $I_2$ . На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, які не лежать на одній прямій.
- $I_3$ . Через кожні три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і причому тільки одну.
- $I_4$ . На кожній площині лежать принаймні три точки та існують хоча б чотири точки, які не лежать в одній площині.
- $I_5$ . Якщо дві точки даної прямої лежать на даній площині, то і сама пряма лежить на цій площині.
- $I_6$ . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку (а отже, і спільну пряму).

**II. Аксіоми порядку.**

- $II_1$ . Якщо точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ , то всі три точки лежать на одній прямій.
- $II_2$ . Для будь-яких точок  $A$  і  $B$  існує така точка  $C$ , що  $B$  лежить між  $A$  і  $C$ .
- $II_3$ . Із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.
- $II_4$ . (Аксіома Паша.) Якщо пряма  $l$  перетинає одну сторону трикутника (рис. 5.5), то вона перетинає ще й іншу його сторону або проходить через його вершину (відрізок  $AB$  означають як множину точок, які лежать між точками  $A$  і  $B$ ; відповідно означають і сторони трикутника).

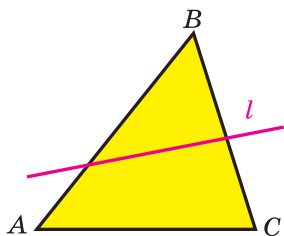


Рис. 5.5

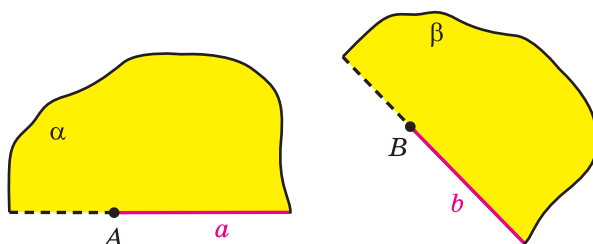


Рис. 5.6

**III. Аксіоми руху.**

- $III_1$ . Рух ставить у відповідність точкам точки, прямим — прямі, площинам — площини, зберігаючи належність точок прямим і площинам.
- $III_2$ . Два послідовних рухи дають знову рух, і для всякого руху є обернений рух.

III<sub>3</sub>. Якщо дано точки  $A, B$  і півплощини  $\alpha$  та  $\beta$ , що обмежені продовженими півпрямими  $a, b$ , які виходять з точок  $A, B$  (рис. 5.6), то існує рух, і причому єдиний, який переводить точку  $A$ , півпряму  $a$ , півплощину  $\alpha$  відповідно в точку  $B$ , пряму  $b$ , півплощину  $\beta$  (півпряма і півплощина легко означаються на основі понять належності та порядку).  
IV. Аксиоми неперервності.

IV<sub>1</sub>. (Аксиома Архімеда.) Усякий відрізок  $AB$  можна перекрити меншим відрізком  $AA_1$ , відкладаючи його на  $AB$  достатнє число разів:  $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_nA_{n+1}$  (рис. 5.7); відкладання відрізка здійснюється рухом.



Рис. 5.7

IV<sub>2</sub>. (Аксиома Кантора.) Для послідовності вкладених відрізків  $A_nB_n$  (рис. 5.8), довжини яких прямують до нуля, існує, і притому єдина, точка  $C$ , що належить усім відрізкам  $A_nB_n$ .

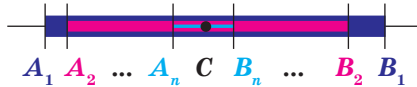


Рис. 5.8

V. Аксиома паралельності.

V<sub>1</sub>. Через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто не більш як одну пряму, паралельну даній.

У наведеній системі аксіом III група містить аксіоми руху, які запропонував на початку XX ст. німецький математик Ф. Шур. Д. Гільберт до числа основних понять замість руху ввів поняття «конгруентність». Відповідно до цього в системі аксіом Гільберта III група містить п'ять аксіом конгруентності фігур.

За допомогою основних визначають решту понять евклідової геометрії. Усі твердження про властивості геометричних фігур, що їх не містять аксіоми, повинні бути доведені чисто логічним виведенням із цих аксіом. Наведена система аксіом евклідової геометрії має властивості повноти і несуперечності.

Якщо в аксіоматиці евклідової геометрії замінити аксіому паралельності (через дану точку поза даною прямою можна провести на площині не більш як одну пряму, що не перетинає дану, тобто паралельну даній) на твердження, що через точку, що не лежить на даній прямій, проходять хоча б дві прямі, які лежать з даною в одній площині,

ні і не перетинають її, то одержимо іншу систему аксіом. Це система аксіом геометрії Лобачевського, що є теж несуперечливою. У ній аксіома паралельності не залежить від решти аксіом евклідової геометрії.

Здавалося б, нова аксіома суперечить звичайним уявленням. Проте при належному розумінні як ця аксіома, так і вся геометрія Лобачевського мають цілком реальний сенс. Її створив і розвинув російський учений М. І. Лобачевський, який уперше повідомив про неї в 1826 р. Деяко пізніше з тією ж теорією виступив угорський учений Я. Больяї; тому геометрію Лобачевського називають іноді геометрією Лобачевського—Больяї. Її називають також неевклідовою геометрією, хоча термін «неевклідова геометрія» має ширше розуміння, включаючи й інші теорії, що виникли слідом за геометрією Лобачевського і засновані також на зміні аксіом евклідової геометрії.

Геометрія Лобачевського являє собою теорію, багату на зміст, яку застосовують як у математиці, так і у фізиці. Історичне значення геометрії Лобачевського полягає в тому, що її автор показав можливість існування геометрії, відмінної від евклідової. Це ознаменувало нову епоху в розвитку геометрії та математики взагалі.

Як уже відзначалося, у зв'язку з аксіоматичною побудовою геометрії природно виникають три питання:

1. Чи не суперечлива прийнята нами система аксіом, тобто чи не можуть з неї бути виведені шляхом логічних міркувань два наслідки, які суперечать один одному?
2. Чи повна система аксіом, тобто чи не можна її поповнити новими аксіомами, які не суперечили б уже прийнятим і не впливали б із них?
3. Чи незалежні прийняті аксіоми, тобто чи не впливають деякі аксіоми з інших?

Розв'язання цих питань тісно пов'язане з побудовою реалізацій системи аксіом. Реалізація полягає в указанні об'єктів трьох видів довільної природи, що умовно називаються «точками», «прямими» і «площинами». Відношення між ними умовно називають такими словами, як «належить», «лежить між», «рух», для яких у силу їх конкретного змісту виконуються аксіоми.

Справа в тому, що основні поняття геометрії не означають і все, що нам про них відомо, виражається аксіомами. Тому наші висновки відносяться до об'єктів довільної природи, аби тільки для них і відношень між ними виконувалися аксіоми.

Доведення несуперечності системи аксіом зводиться до доведення існування хоча б однієї її реалізації. Доведення незалежності даної аксіоми зводиться до вказівки такої реалізації, у якій виконуються всі аксіоми, окрім цієї. Нарешті, доведення повноти системи аксіом зводиться

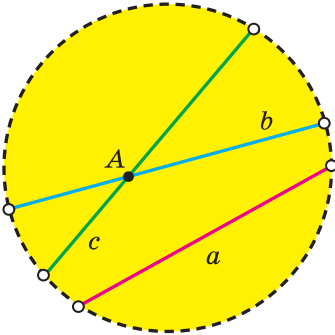


Рис. 5.9

до доведення того, що для всіх реалізацій можна встановити таку взаємно однозначну відповідність між точками, прямими і площинами, при якій відповідні елементи знаходяться в однакових відношеннях.

Наприклад, для геометрії Лобачевського на площині може бути запропонована така реалізація всередині круга на звичайній (евклідовій) площині.

Внутрішню частину якогось круга (тобто круг за винятком кола, що його обмежує) назвемо «площиною». Точкою «площини» буде точка всередині круга (рис. 5.9).

«Прямою» назвемо будь-яку хорду з вилученими кінцями (оскільки коло круга вилучене з «площини»); «рухом» назвемо будь-яке перетворення круга в себе, яке переводить хорди в хорди.

Рівними назвемо відповідно фігури всередині круга, що переводяться одна в іншу такими перетвореннями.

Тоді будь-який геометричний факт, описаний такою мовою, є теоремою або аксіомою геометрії Лобачевського.

Іншими словами, усяке твердження геометрії Лобачевського на площині є не що інше, як твердження евклідової геометрії, що відноситься до фігур усередині круга, лише переформульоване в указаних термінах. Евклідова аксіома про паралельні прямі тут явно не виконується, оскільки через точку  $A$ , яка не лежить на даній хорді  $a$  (тобто на «прямій»  $a$ ), проходить скільки завгодно хорд («прямих»), які її не перетинають.

Аналогічно реалізацією геометрії Лобачевського в просторі може бути геометрія всередині кулі, виражена у відповідних термінах («прямі» — хорди, «площини» — плоскі перерізи внутрішньої частини кулі, «рівні» фігури — такі, які переводяться одна в іншу перетвореннями, що переводять кулю в себе і хорди в хорди).

Таким чином, геометрія Лобачевського має абсолютно реальний сенс і така ж несуперечлива, як і геометрія Евкліда.