

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

АЛГЕБРА

підручник для 8 класу
з поглибленим вивченням математики
закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, перероблене

Харків
«Гімназія»
2021

ЛЮБИ ВОСЬМИКЛАСНИКИ ТА ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

Ви зробили серйозний крок у своєму житті: вирішили продовжувати освіту в класі з поглибленим вивченням математики. Вітаємо вас із цим вибором і сподіваємося, що ви не розчаруетесь у своєму рішенні.

Навчатися в математичному класі не просто. Треба бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку.

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати алгебру. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено жирним шрифтом і курсивом.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв’язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)).

Також у підручнику ви зможете прочитати оповідання про важливі математичні об’єкти, історію їх виникнення та розвитку. Назви цих оповідань надруковано зеленим кольором.

Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає від вас великих зусиль, адже ви формуєте навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка й факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

Умовні позначення

- n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;



ключові задачі, результат яких можна використовувати під час розв'язування інших задач;



закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу;



завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;



рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

§ 1

ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1. Лінійне рівняння з однією змінною. Цілі вирази

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 1–8 на с. 347–349.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(a - 3)x = a - 3$.

Розв'язання. При $a = 3$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку його коренем є будь-яке число.

При $a \neq 3$ маємо: $a - 3 \neq 0$. Тоді $x = \frac{a-3}{a-3}$, тобто $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 3$, то $x = 1$. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $|2x - 3| = 5$.

Розв'язання. Знайдемо числа, модуль яких дорівнює 5. Це лише числа 5 і -5 . Ураховуючи це, маємо:

$$2x - 3 = 5 \quad \text{або} \quad 2x - 3 = -5;$$

$$2x = 8 \quad \text{або} \quad 2x = -2;$$

$$x = 4 \quad \text{або} \quad x = -1.$$

Відповідь: 4; -1 . ▲

ПРИКЛАД 3 Порівняйте значення виразів 127^{23} і 513^{18} .

Розв'язання. Маємо: $127^{23} < 128^{23} = (2^7)^{23} = 2^{161} < 2^{162} = (2^9)^{18} = 512^{18} < 513^{18}$.

Отже, $127^{23} < 513^{18}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть значення виразу

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64}.$$

Розв'язання. Очевидно, що даний вираз дорівнює такому:

$$(2 - 1)(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} = \\ = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) - 2^{64} =$$

$$= (2^4 - 1) (2^4 + 1) (2^8 + 1) (2^{16} + 1) (2^{32} + 1) - 2^{64} = \\ = \dots = 2^{64} - 1 - 2^{64} = -1.$$

Відповідь: -1 . ▲

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Маємо: $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 =$
 $= (n(n+3))(n+1)(n+2)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 =$
 $= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$. ▲

ПРИКЛАД 6 Розкладіть на множники многочлен

$$x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3.$$

Розв'язання. Маємо:

$$x^2 + 2x - 9y^2 + 12y - 3 = x^2 + 2x + 1 - 9y^2 + 12y - 4 = \\ = (x+1)^2 - (9y^2 - 12y + 4) = (x+1)^2 - (3y-2)^2 = \\ = (x+1-3y+2)(x+1+3y-2) = (x-3y+3)(x+3y-1). \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 7 Розкладіть на множники двочлен $n^4 + 4$.

Розв'язання. Маємо: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 =$
 $= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) =$
 $= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. ▲



Задача. Доведіть тотожності:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ці формули називають відповідно **кубом суми** й **кубом різниці** двох виразів.

Розв'язання

Маємо: $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) =$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Формулу куба різниці доведіть самостійно. ▲

ПРИКЛАД 8 Розкладіть на множники многочлен

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Розв'язання. Маємо:

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = \\ = x^3 + (x+1)^3 = (x+x+1)(x^2 - x(x+1) + (x+1)^2) = \\ = (2x+1)(x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1) = \\ = (2x+1)(x^2 + x + 1). \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 9 Розкладіть на множники тричлен $a^5 + a + 1$.*Розв'язання***I спосіб**

$$\begin{aligned}
 \text{Маємо: } a^5 + a + 1 &= a^5 + a^4 - a^4 + a^3 - a^3 + a^2 - a^2 + a + 1 = \\
 &= a^5 + a^4 + a^3 - a^4 - a^3 - a^2 + a^2 + a + 1 = \\
 &= a^3(a^2 + a + 1) - a^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 = \\
 &= (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1).
 \end{aligned}$$

II спосіб**Маємо:**

$$\begin{aligned}
 a^5 + a + 1 &= a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2(a^3 - 1) + (a^2 + a + 1) = \\
 &= a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1). \quad \blacktriangle
 \end{aligned}$$

ВПРАВИ**1.1.°** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{7} + \frac{3x-1}{14} = \frac{x}{3};$

2) $\frac{2x-1}{8} - \frac{x+2}{4} = x.$

1.2.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{2x+3}{5} + \frac{3x-1}{2} = 2x;$

2) $\frac{8x-5}{3} - \frac{4x+3}{4} + \frac{2-9x}{2} = -3.$

1.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(7x - 1)(x + 5) = (3 + 7x)(x + 3);$

2) $(6x - 1)^2 - (3 - 8x)(3 + 8x) = (10x + 1)^2;$

3) $(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 = x^2(x + 1) - 2x.$

1.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x + 1)(2x - 3) = (10x - 9)(x + 2);$

2) $(4x + 1)^2 - (1 - 3x)(1 + 3x) = (5x + 2)^2;$

3) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3x^2 = x^2(x + 3) - 2x.$

1.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(0,6x - 3)(2x + 1) = 0;$

5) $x(x + 2)(5x - 1) = 0;$

2) $x^2 - 16 = 0;$

6) $(3x - 1)^2 - 25x^2 = 0;$

3) $3x^2 + 15x = 0;$

7) $(2x + 1)^2 = (x + 2)^2;$

4) $16x^2 - 8x + 1 = 0;$

8) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 =$

$= 2(1 - x)(x - 2).$

1.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(0,8x - 2)(3x + 1) = 0;$

5) $x(x + 4)(4x - 3) = 0;$

2) $x^2 - 25 = 0;$

6) $(2x + 3)^2 - 64x^2 = 0;$

3) $18x^3 - 9x^2 = 0;$

7) $(3x - 2)^2 = (x - 3)^2;$

4) $1 - 6x + 9x^2 = 0;$

8) $(x + 3)^2 + (4 - x)^2 =$

$= 2(x - 4)(x + 3).$

1.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| = 3$;

2) $|x - 1| = 5$;

3) $|x + 2| + 6 = 5$;

4) $3|x| - 4 = 0$.

1.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x - 1| = 2$;

2) $4|x| + 3 = 0$.

1.9.° Спростіть вираз:

1) $(-a^3b^2)^3 \cdot 7a^5b^4$;

3) $-2\frac{2}{5}c^6d^{11} \cdot \left(-\frac{1}{2}cd^2\right)^2$;

2) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^8n^2\right)$;

4) $-(-3m^4n^2)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}mn^3\right)^6$.

1.10.° Спростіть вираз:

1) $1\frac{11}{25}a^7b^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^2b^7\right)^2$;

3) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (-4a^5b)^2$;

2) $(-0,2x^2y^5z^3)^2 \cdot 10y^4z$;

4) $\left(-\frac{4}{3}xy^2\right)^2 \left(-\frac{3}{2}x^2y\right)^5$.

 **1.11.°** Доведіть тотожність

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac.$$

1.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $ax = 1$;

2) $bx = b$.

1.13.° Розв'яжіть рівняння:

1) $bx = 2$;

2) $(a - 1)x = a - 1$.

1.14.° При яких натуральних значеннях a корінь рівняння є натуральним числом:

1) $(a + 2)x = 5$;

2) $(a + 3)x = 6$?

1.15.° При яких цілих значеннях a коренем рівняння $(a + 1)x = 7$ є ціле число?

1.16.° При яких значеннях b число 3 є коренем рівняння

$$(b + 2)(x - 1) = 2(x + b - 1)?$$

1.17.° Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 72m^7n^{11}$;

2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = -81x^{10}y^{17}z^{13}$;

3) $(*)^2 \cdot (*)^5 = -288a^9b^{11}c^{12}$.

1.18.° Відомо, що $4x^2y = 3$. Знайдіть значення виразу:

1) $6x^2y$;

2) $4x^4y^2$;

3) $-3x^6y^3$.

1.19.° Відомо, що $2a^3b^2 = -3$. Знайдіть значення виразу:

1) $-3a^3b^2$;

2) $-2a^6b^4$;

3) $-8a^9b^6$.

1.20.* Відомо, що $3x^3y = 4$ і $x^2z^3 = -3$. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4x^5yz^3$; 2) $\frac{1}{2}x^8y^2z^3$; 3) $-x^9z^9y$.

1.21.* Відомо, що $2a^4b = 3$ і $5ac^2 = -2$. Знайдіть значення виразу:

- 1) $5a^5bc^2$; 2) $-4a^6bc^4$; 3) $10a^{10}b^2c^4$.

1.22.* Доведіть, що не існує таких значень x і y , при яких многочлени $-5x^2 + 3xy + 4y^2$ і $6x^2 - 3xy - y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

1.23.* Спростіть вираз (n — натуральне число):

- 1) $x^{n+1}(x^{n+6} - 1) - x^{n+2}(x^{n+5} - x^3)$;
2) $x(4x^{n+1} + 2x^{n+4} - 7) - x^{n+2}(4 + 2x^3 - x^n)$.

1.24.* Спростіть вираз (n — натуральне число):

- 1) $x^n(x^{n+4} + 2x) + x(3x^n - x^{2n+3})$;
2) $x^{n+2}(x^2 - 3) - x^n(x^{n+2} - 3x^2 - 1)$.

1.25.* Доведіть, що коли $a - 2b = 3$, то $2ab^2 - a^2b + 3ab = 0$.

1.26.* Доведіть, що коли $a + b = c$, то $a^3b^3c + a^2b^4c - a^2b^3c^2 = 0$.

1.27.* Внесіть за дужки спільний множник (n — натуральне число):

- 1) $x^{n+3} + x^n$; 4) $5^{n+4} + 2 \cdot 5^{n+2} - 3 \cdot 5^{n+1}$;
2) $y^{n+2} - y^{n-2}$, $n > 2$; 5) $49^{n+2} - 7^{n+3}$;
3) $z^{3n} - z^n$; 6) $27^{n+1} + 9^{n+1} - 3^{n+1}$.

1.28.* Розкладіть на множники (n — натуральне число):

- 1) $a^{n+4} - a^{n-5}$, $n > 5$; 3) $3^{n+3} - 5 \cdot 3^{n+2} + 2 \cdot 3^n$;
2) $b^{2n} + b^{3n}$; 4) $64^{n+2} - 32^{n+2} + 16^{n+2}$.

1.29.* Розкладіть на множники (n — натуральне число):

- 1) $x^{n+2} + x^n - x^2 - 1$; 2) $4y^{n+4} + y^{n+2} + 4y^3 + y$.

1.30.* Розкладіть на множники тричлен:

- 1) $x^2 - 5x + 4$; 4) $b^2 + 7b + 12$;
2) $y^2 + 5y + 6$; 5) $2x^2 - x - 1$;
3) $a^2 - a - 2$; 6) $3x^2 + 4x + 1$.

1.31.* Розкладіть на множники тричлен:

- 1) $x^2 + x - 2$; 3) $5y^2 - 6y + 1$;
2) $t^2 - 9t + 18$; 4) $6z^2 - 5z + 1$.

1.32.* Доведіть, що даний вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x ; укажіть, якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x :

- 1) $x^2 - 10x + 27$; 2) $9x^2 + 12x + 7$; 3) $2x^2 - x + 1$.

1.33.* Доведіть, що рівняння не має коренів:

- 1) $x^2 - 8x + 17 = 0$; 2) $x^2 - x + 1 = 0$.

1.34.* Доведіть, що даний вираз набуває від'ємних значень при всіх значеннях x ; укажіть, якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x :

1) $-x^2 + 4x - 6$; 2) $24x - 16x^2 - 25$; 3) $8x - 8x^2 - 3$.

1.35.* Доведіть, що вираз $(a + 2b)(a + 2b + 4) + 4$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

1.36.* Доведіть, що вираз $(6 + 3x - 2y)(3x - 2y) + 9$ набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінних.

1.37.* Подайте у вигляді суми квадратів двох виразів многочлен:

1) $5a^2 - 2a + 1$; 3) $2x^2 + 6xy + 9y^2 - 6x + 9$;

2) $10x^2 + 2xy + y^2$; 4) $2a^2 + 2b^2$.

1.38.* Чи існують такі значення x і y , при яких дорівнює нулю значення многочлена (у разі ствердної відповіді вкажіть ці значення):

1) $x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 2$;

2) $9x^2 + y^2 - 12x + 8y + 21$?

1.39.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$; 2) $x^4 - 7x^2 - 18$; 3) $x^4 + 9x^2 + 18$.

1.40.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9$;

2) $y^8 - y^4 + 4y^2 - 4$;

3) $x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$;

4) $(x + 2y)(x + 2y + 2) - (y - 1)(y + 1)$;

5) $x^4y^2 + 2x^2y - x^2 + 6x - 8$;

6) $8x^2 - 12x + 2xy - y^2 + 4$.

1.41.* Розкладіть на множники:

1) $x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 25$;

2) $a^2 + 6a - b^2 + 4b + 5$;

3) $(a + 3b)(a + 3b - 6) - (b + 3)(b - 3)$;

4) $3x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 4$.

1.42.* Поставте замість зірочок такі одночлени, щобі справджувалася тотожність:

1) $(7k - p)(* + * + *) = 343k^3 - p^3$;

2) $(* + *) (25a^4 - * + 36b^2) = 125a^6 + 216b^3$;

3) $(mn + *) (* - * + k^6) = m^3n^3 + k^9$.

 **1.43.*** Доведіть тотожність

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

1.44.** Відомо, що $a + b = 5$, $ab = 3$. Знайдіть значення виразу $a^2 + b^2$.

1.45.** Відомо, що $a^2 + b^2 = 31$, $ab = 9$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

- 1.46.** Відомо, що $b^2 + \frac{a^2}{4} = 1$, $ab = 3$. Знайдіть значення виразу $a + 2b$.
- 1.47.** Відомо, що $a^2 + b^2 = 37$, $ab = 6$. Знайдіть значення виразу $a - b$.
- 1.48.** Відомо, що $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 x_2 = -1$. Знайдіть значення виразу:
1) $x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$;
2) $x_1^2 + x_2^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.
- 1.49.** Відомо, що $a + b = 6$, $ab = 7$. Знайдіть значення виразу:
1) $a^3 b^2 + a^2 b^3$; 2) $(a - b)^2$; 3) $a^4 + b^4$.
- 1.50.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $x^6 + 3x^2 y^2 + y^6$.
- 1.51.** Відомо, що числа x і y такі, що $x^3 - y^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $x^9 - 6x^3 y^2 - y^6$.
- 1.52.** Відомо, що $a + 2b = 1$. Доведіть, що $a^3 + 8b^3 = 1 - 6ab$.
- 1.53.** Доведіть, що коли $a + 3b = 2$, то $a^3 + 27b^3 = 8 - 18ab$.
- 1.54.** Розкладіть на множники многочлен $x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + 2y^3$.
- 1.55.** Розкладіть на множники многочлен $28a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$.
- 1.56.** Відомо, що $x^3 + y^3 = 9$ і $x^2 y + xy^2 = 6$. Знайдіть значення двочлена $x + y$.
- 1.57.** Відомо, що $a^3 - b^3 = 4$ і $a^2 b - ab^2 = 1$. Знайдіть значення двочлена $a - b$.
- 1.58.** Відомо, що сума $8 + 8 + 8 + \dots + 8$ дорівнює 4^{87} . Знайдіть кількість доданків.
- 1.59.** Подайте число 171 у вигляді дробу, чисельник якого є дев'ятим степенем натурального числа, а знаменник — десятим.
- 1.60.** Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 9^{200} ; 2) 7^{500} ; 3) $2^n \cdot 3^{n+1}$?
- 1.61.** Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 4^{100} ; 2) 3^{300} ; 3) $3^{n+2} \cdot 7^n$?
- 1.62.* Порівняйте значення виразів:
1) 3^{200} і 2^{300} ; 2) 126^{12} і 24^{18} ; 3) 31^{11} і 17^{14} .
- 1.63.* Відомо, що $x^2 + y^2 = 1$. Знайдіть значення виразу $2x^4 + 3x^2 y^2 + y^4 + y^2$.
- 1.64.* Відомо, що $a^2 - b^2 = 2$. Знайдіть значення виразу $a^6 - a^4 b^2 - 2b^4 - 8b^2$.
- 1.65.* Чи існує таке натуральне число n , при якому значення виразу $2^8 + 2^{11} + 2^n$ є квадратом натурального числа?

1.66.* Доведіть, що значення виразу $999 \cdot 1001 \cdot 1003 \cdot 1005 + 16$ є квадратом натурального числа.

1.67.* Доведіть, що значення виразу $1000^2 + 1000^2 \cdot 1001^2 + 1001^2$ є квадратом натурального числа.

1.68.* Відомо, що $a = b + 1$. Спростіть вираз
 $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})(a^{32} + b^{32})$.

1.69.* Доведіть, що

$$(1 - 2 + 2^2)(1 - 2^2 + 2^4)(1 - 2^4 + 2^8)(1 - 2^8 + 2^{16})(1 - 2^{16} + 2^{32}) = \frac{1 + 2^{32} + 2^{64}}{7}.$$

1.70.* Розкладіть на множники:

- 1) $a^3 + 2a^2 - 3$; 3) $x^3 - 7x - 6$; 5) $m^5 + m^4 + 1$.
2) $b^3 + b^2 + 4$; 4) $a^3 - 2ab^2 - b^3$;

1.71.* Розкладіть на множники:

- 1) $x^3 - 3x + 2$; 3) $x^3 + x^2 + 18$; 5) $x^8 + x^7 + 1$.
2) $x^3 - 3x^2 + 2$; 4) $a^3 - 3ab^2 - 2b^3$;

1.72.* Розкладіть на множники:

- 1) $x^4 - 8x^2 + 4$; 2) $4x^4 - 12x^2 + 1$; 3) $a^4 + a^2 + 1$.

1.73.* Розкладіть на множники:

- 1) $x^4 - 7x^2 + 9$; 2) $9x^4 - 3x^2 + 1$; 3) $a^4 + 64$.

1.74.* Доведіть, що значення виразу $2^{10} + 5^{12}$ є складеним числом.

1.75.* Числа a , b і c такі, що $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$. Чому дорівнює значення виразу $a + b - 2c$?

1.76.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і $ax + by + cz = 1$. Доведіть, що $a = x$, $b = y$, $c = z$.

1.77.* Доведіть, що рівняння $x^4 - x + \frac{1}{2} = 0$ коренів не має.

1.78.* Обчисліть значення виразу $a^2 + b^2 + c^2$, якщо $a + b + c = 7$ і $ab + bc + ac = -5$.

1.79.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 30$ і $a - b - c = 4$. Доведіть, що $bc - ab - ac = -7$.

1.80.* Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ і $ab - ac - bc = -11$. Знайдіть значення виразу $a + b - c$.

1.81.* Розкладіть на множники вираз $a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc$.

1.82.* Розкладіть на множники вираз $a^2 + 8b^2 + c^2 - 6ab - 6bc + 2ac$.

1.83.* Доведіть, що коли $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

1.84.* Використовуючи результат задачі 1.83, розкладіть на множники вираз $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

2. Функція. Графік функції. Лінійна функція

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 12–14 на с. 350–352.

ПРИКЛАД 1 Функція f , областю визначення якої є всі числа, має такі властивості:

1) для будь-якого x $f(x)$ — ціле число;

2) для будь-якого x $f(x) \leq x$;

3) для будь-якого x $f(x) > x - 1$.

Знайдіть $f(3,2)$, $f(5)$, $f(-3,2)$. Знайдіть область значень функції f . Побудуйте її графік.

Розв'язання. Із властивостей 1–3 випливає, що функція f — це правило, за яким кожному числу x ставиться у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує x . Звідси, наприклад, $f(3,2) = 3$, $f(-3,2) = -4$. Зрозуміло, що $f(5) = 5$, $f(-2) = -2$, $f(0) = 0$. Узагалі, для будь-якого цілого числа c виконується рівність $f(c) = c$. Із цього випливає, що областю значень функції f є всі цілі числа.

Побудуємо графік функції f .

Нехай $0 \leq x < 1$, тоді $f(x) = 0$.

Нехай $1 \leq x < 2$, тоді $f(x) = 1$.

Нехай $2 \leq x < 3$, тоді $f(x) = 2$.

Нехай $-1 \leq x < 0$, тоді $f(x) = -1$.

Нехай $-2 \leq x < -1$, тоді $f(x) = -2$.

Узагалі, якщо $m \leq x < m+1$, де m — ціле число, то $f(x) = m$.

Графік функції f зображено на рисунку 2.1.

Для цієї функції використовують позначення $f(x) = [x]$. Запис $[x]$ читають: «ціла частина числа x ». ▲

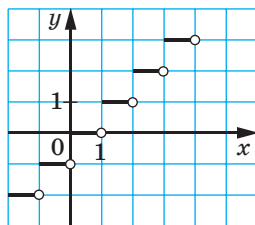


Рис. 2.1

ПРИКЛАД 2 Точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0 - 5; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x + 5)$.

Розв'язання. Оскільки точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то значення цієї функції при $x = x_0$ дорівнює y_0 , тобто $f(x_0) = y_0$.

Знайдемо значення функції $y = f(x + 5)$ при $x = x_0 - 5$. Маємо: $f(x_0 - 5 + 5) = f(x_0) = y_0$.

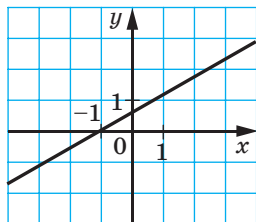


Рис. 2.2

Звідси отримуємо, що точка $B(x_0 - 5; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x + 5)$. ▲

ПРИКЛАД 3 На рисунку 2.2 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $b - a$.

Розв'язання. Маємо:

$f(-1) = a \cdot (-1) + b = b - a$. З рисунка видно, що $f(-1) = 0$. Отже, $b - a = 0$. ▲

ВПРАВИ

2.1.° Учні школи поїхали автобусом на екскурсію та за один день відвідали два старовинних замки. На рисунку 2.3 зображено графік зміни відстані від автобуса до школи залежно від часу (*графік руху автобуса*). Користуючись графіком, визначте:

- 1) яку відстань проїхав автобус за першу годину;
- 2) на якій відстані від школи знаходиться перший замок; другий замок;
- 3) скільки часу тривав огляд першого замку; другого замку;
- 4) на якій відстані від школи були учні через 6 год після виїзду;
- 5) з якою швидкістю рухався автобус протягом останньої півгодини.



Рис. 2.3

2.2.° Кожному числу поставили у відповідність відстань від точки, що зображає це число на координатній прямій, до початку відліку. Поясніть, чому описане правило є функцією. Знайдіть її

область визначення та область значень. Позначивши цю функцію буквою f , знайдіть $f(2)$, $f(-5)$, $f(0)$. Яка з даних формул задає функцію f :

- 1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = |x|$; 4) $y = x^2$?

 **2.3.°** Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу поставлено у відповідність першу цифру його десяткового запису. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть її область значень.

 **2.4.°** Розглянемо правило, за яким кожному натуральному числу поставлено у відповідність суму цифр його десяткового запису (одноцифровому числу відповідає саме це число). Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді вкажіть її область значень.

2.5.° Задайте формулою функцію, якщо значення функції:

- 1) протилежні відповідним значенням аргументу;
- 2) дорівнюють подвоєним відповідним значенням аргументу;
- 3) на 2 менші від квадратів відповідних значень аргументу.

2.6.° Дано функцію $f(x) = x^3$. Задайте формулою функцію, усі значення якої при тих самих значеннях аргументу:

- 1) на 7 більші за значення функції f ;
- 2) дорівнюють кубу значення функції f .

2.7.° Функцію задано формулою $f(x) = 3x - 8$. При якому значенні x значення функції дорівнює значенню аргументу?

2.8.° Функції задано формулами $y = 6x + 25$ і $y = x + 24$. При яких значеннях аргументу ці функції набувають рівних значень?

2.9.* Придумайте яку-небудь функцію f , областю визначення якої є всі натуральні числа, а областю значень — чотири числа: 0, 1, 2, 3. Знайдіть $f(9)$, $f(18)$, $f(39)$, $f(1000)$.

2.10.* Який із наведених на рисунку 2.4 графіків ілюструє залежність змінної y від змінної x , подану нижче:

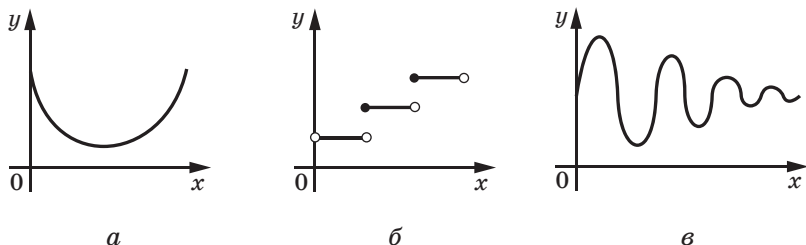


Рис. 2.4

- 1) вартість проїзду в автобусі зростає на 1 грн через кожні 10 км шляху (x — довжина шляху в кілометрах, y — вартість проїзду в гривнях);
 - 2) металеву пружину розтягнули й відпустили (x — час у секундах, y — довжина пружини в сантиметрах);
 - 3) ціна полуниці на ринку протягом травня — червня (x — кількість днів, y — ціна полуниці в гривнях)?
- 2.11.*** Від квадратного листа картону розміром 40×40 см відрізали смужку завширшки x см (рис. 2.5). Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність площі S смуги картону, що залишилася, від x . Знайдіть область визначення цієї функції.

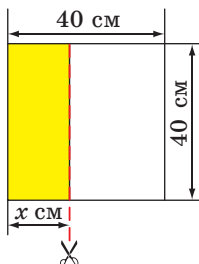


Рис. 2.5

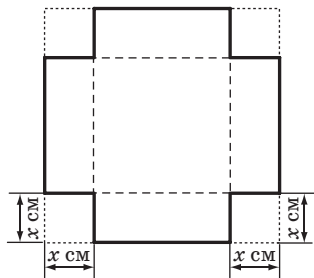


Рис. 2.6

- 2.12.*** Із квадратного листа жерсті розміром 1×1 м у кутах вирізали квадрати зі стороною x см (рис. 2.6) і з отриманої заготовки зігнули коробку, надавши їй форми прямокутного паралелепіпеда. Запишіть формулу, яка задає функціональну залежність об'єму V коробки від x . Знайдіть область визначення цієї функції.
- 2.13.*** Кожній точці графіка функції $f(x) = 3x + 1$ поставлено у відповідність суму координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді задайте цю функцію формулою.
- 2.14.*** Кожній точці графіка функції $f(x) = x^2 + 1$ поставлено у відповідність добуток координат цієї точки. Чи є це правило функцією? У разі ствердної відповіді задайте цю функцію формулою.

2.15.* Дано функцію
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 4, \\ 8, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-2)$; 3) $f(2)$; 4) $f(4)$; 5) $f(3,9)$; 6) $f(8,1)$.

 **2.16.*** Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } -3 \leq x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ x^2 - 2, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Складіть таблицю значень функції для цілих значень аргументу.

2.17.* На якому з рисунків (рис. 2.7) задано функціональну залежність:

- 1) змінної y від змінної x ;
- 2) змінної x від змінної y ;
- 3) змінної y від змінної x і змінної x від змінної y ?

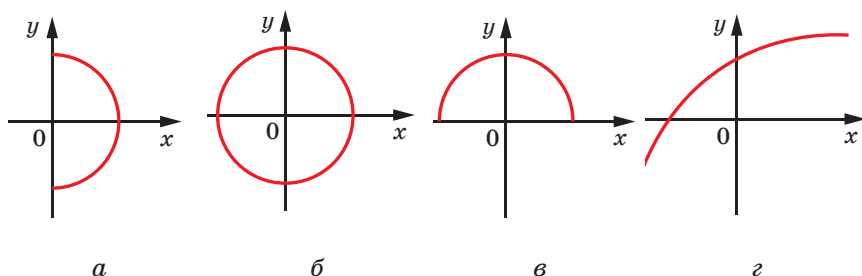


Рис. 2.7

2.18.* На рисунку 2.8 зображено графік функції. Знайдіть:

- 1) область визначення функції;
- 2) область значень функції;
- 3) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

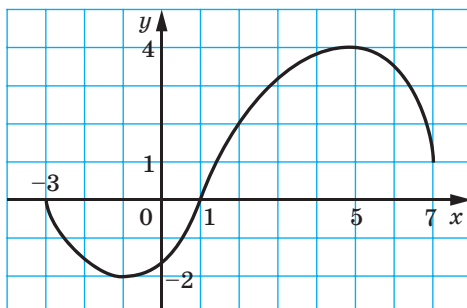


Рис. 2.8

2.19.* Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 7x - x^2$;

3) $y = |x| + 3$;

2) $y = |x| - 3$;

4) $y = x^3$.

2.20.* Задано функцію $y = 2 - x$, областю визначення якої є всі одноцифрові натуральні числа. Побудуйте графік цієї функції.

2.21.* Побудуйте графік функції, областю визначення якої є всі натуральні числа та яка набуває значення -1 при парних значеннях аргументу й значення 1 при непарних значеннях аргументу.

2.22.* Побудуйте графік функції, якщо відомо, що для всіх цілих значень аргументу значення функції дорівнює 1 , а для нецілих дорівнює -1 .

2.23.* Точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0; y_0 - 3)$ належить графіку функції $y = f(x) - 3$.

2.24.* Точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(x_0; 2y_0)$ належить графіку функції $y = 2f(x)$.

2.25.* Точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Доведіть, що точка $B(2x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

2.26.* Задайте формулою функцію, яка є прямою пропорційністю, якщо її графік проходить через точку $M(3; -2)$.

2.27.* Знайдіть значення b , при якому графік функції $y = -\frac{1}{5}x + b$ проходить через точку $A(-15; 3)$.

2.28.* При якому значенні k графік функції $y = kx + 8$ проходить через точку $B(2; -4)$?

2.29.* Графік функції $y = kx + b$ перетинає осі координат у точках $M(2; 0)$ і $N(0; -3)$. Знайдіть значення k і b .

2.30.* Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають однакову ординату, яка дорівнює -5 . Знайдіть значення k і b .

2.31.* Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $A(-4; 3)$. Знайдіть значення k і b .

2.32.* При якому значенні змінної x функції $f(x) = 4x - 3$ і $g(x) = 3x - 2$ набувають рівних значень? Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій f і g . При яких значеннях x :

1) $f(x) > g(x)$;

2) $f(x) < g(x)$?

2.33.* Графіки функцій $y = 2x - 5$, $y = x - 9$ і $y = kx$ перетинаються в одній точці. Знайдіть значення k . Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

2.34.* При якому значенні b графіки функцій $y = 1,5x - 2$, $y = 2,5x + 2$ і $y = 3x + b$ перетинаються в одній точці?

2.35.* Доведіть, що не існує такого значення a , при якому пряма $y = ax - 5$ проходить через початок координат.

2.36.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x - 3, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -2x - 3, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 4x - 2, & \text{якщо } x \leq 2, \\ 3, & \text{якщо } x > 2; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \neq -1, \\ 1, & \text{якщо } x = -1. \end{cases}$$

2.37.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = |x|; \quad 3) y = 2x + |x| - 1.$$

$$2) y = |x| - x;$$

2.38.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = -|x|; \quad 3) y = 3x - |x| + 2.$$

$$2) y = |x| + x;$$

2.39.** На рисунку 2.9 зображено графік функції $f(x) = ax + b$. Знайдіть значення виразу $a + b$.

2.40.* Графіки функцій $y = -(2k + 3)x - 1 - 2k$ і $y = kx + k + 2$, де $k > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою M . Чи можна, стерши осі координат і графіки, відновити систему координат за точками A , B і M ?

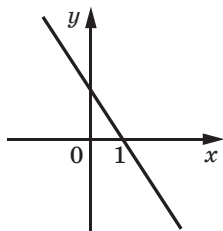


Рис. 2.9

2.41.* Графіки функцій $y = ax + b$ і $y = bx + a$, де $a > 0$ і $b > 0$, перетинають вісь ординат у точках A і B відповідно. Точку перетину цих графіків позначено буквою M . Чи можна, стерши осі координат і графіки, відновити систему координат за точками A , B і M ?

3. Рівняння з двома змінними. Системи лінійних рівнянь із двома змінними

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 9, 10, 15–17 на с. 349, 350, 352, 353.

ПРИКЛАД 1 Яка фігура є графіком рівняння:

1) $|x| + |y - 2| = 0$; 2) $x^2 + y - yx - x = 0$; 3) $x^2 + y = y + x^2$?

Розв'язання

1) Оскільки $|x| \geq 0$ і $|y - 2| \geq 0$, то ліва частина рівняння дорівнюватиме нулю тільки за одночасного виконання умов $x = 0$ і $y - 2 = 0$. Звідси пара чисел $(0; 2)$ — єдиний розв'язок даного рівняння. Отже, шуканим графіком є точка з координатами $(0; 2)$.

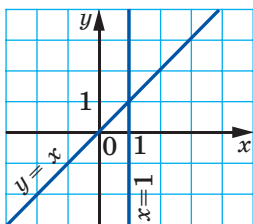


Рис. 3.1

2) Розклавши на множники ліву частину рівняння, отримаємо: $(x - y)(x - 1) = 0$. Звідси $y = x$ або $x = 1$. Отже, графіком даного рівняння є пара прямих (рис. 3.1).

3) Будь-яка пара $(x; y)$ є розв'язком даного рівняння. Отже, його графіком є вся координатна площина. ▲

ПРИКЛАД 2 Графіком рівняння є пряма AB , де $A(1; 3)$, $B(-1; -7)$. Знайдіть ординату точки цієї прямої, абсциса якої дорівнює: 1) 1,2; 2) $-0,6$.

Розв'язання. Оскільки абсциси точок A і B не рівні, то пряма AB не є вертикальною, тому шукатимемо її рівняння у вигляді $y = kx + b$.

Координати точок A і B є розв'язками цього рівняння. Звідси отримуємо систему

$$\begin{cases} 3 = k + b, \\ -7 = -k + b. \end{cases}$$

Цю систему зручно розв'язувати методом додавання. Маємо: $2b = -4$; $b = -2$. Звідси $k = 5$.

Отже, рівняння прямої AB має вигляд $y = 5x - 2$.

При $x = 1,2$ маємо $y = 5 \cdot 1,2 - 2 = 4$.

При $x = -0,6$ маємо $y = 5 \cdot (-0,6) - 2 = -5$. ▲

3.1. Графік рівняння $3x + 2y = 14$ проходить через точку $A(a; 4)$.
Чому дорівнює значення a ?

3.2. Графік рівняння $5x + y = 16$ проходить через точку $B(b; 3b)$.
Чому дорівнює значення b ?

3.3. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:

1) $x + y = 4$; 3) $x^2 + y^2 = 16$;
2) $x^3 - y = 1$; 4) $|x| - y = 6$.

3.4. При якому значенні a пара чисел $(-4; 3)$ є розв'язком рівняння:

1) $3x + 5y = a$; 2) $ax + 5y = 19$?

3.5. При якому значенні a графік рівняння $11x - 13y = a + 6$ проходить через початок координат?

3.6. Чи належать графіку рівняння $y^6 - x^3 = -8$ точки, що мають від'ємну абсцису?

3.7. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 3) $(x - 2)(y - 1) = 0$;
2) $|y| + (x + 2)^2 = 0$; 4) $3x - xy = 0$.

3.8. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$; 3) $|x - 3| + |y - 3| = 0$;
2) $xy = 0$; 4) $xy + y = 0$.

3.9. Знайдіть розв'язок рівняння $5x + 3y = 24$, який є парю різних чисел.

3.10. Знайдіть розв'язок рівняння $-12x + 13y = -100$, який є парю протилежних чисел.

3.11. При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $4x + y = a$ належить осі абсцис?

3.12. При якому значенні b точка перетину прямих $9x + 7y = 35$ і $x + by = -20$ належить осі ординат?

3.13. При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 21$ перетинає осі координат у точках $A(3; 0)$ і $B(0; -7)$?

3.14.* Складіть рівняння прямих, які зображено на рисунку 3.2.

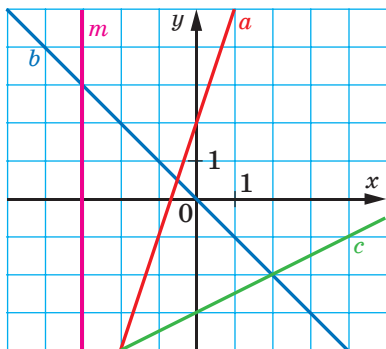


Рис. 3.2

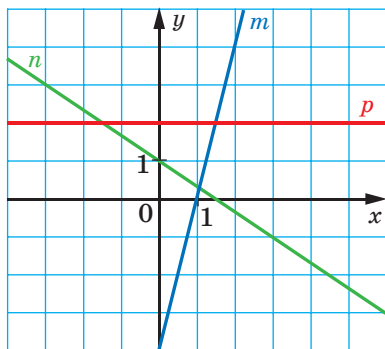


Рис. 3.3

3.15.* Складіть рівняння прямих, які зображено на рисунку 3.3.

3.16.* Знайдіть значення a і b , при яких пара чисел $(6; 4)$ є розв'язком системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} ax + 2y = 26, \\ 4x + by = 14; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + by = 6, \\ ax + by = 0. \end{cases}$$

3.17.* При яких значеннях a і b пара чисел $(-2; 3)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 2y = -12, \\ 7x + by = 1? \end{cases}$

3.18.* До рівняння $3x - 5y = 8$ підберіть друге лінійне рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:

- 1) має єдиний розв'язок;
- 2) має безліч розв'язків;
- 3) не має розв'язків.

3.19.* При яких значеннях a система рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5x - 6y = 17, \\ 5x - 6y = a \end{cases} \text{ не має розв'язків;}$$

$$2) \begin{cases} 8x + ay = 6, \\ 4x - 5y = 3 \end{cases} \text{ має безліч розв'язків?}$$

3.20.* Підберіть такі значення a і b , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$$

- 1) має безліч розв'язків;
- 2) має один розв'язок;
- 3) не має розв'язків.

3.21.* Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} |x| - y = 0, \\ x + 3y = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - |y| = 0, \\ 2x - y = 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

3.22.* Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2, \\ 5x - y = 34; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 6y - 5x = 1, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{3y-x}{4} = -4\frac{3}{4}. \end{cases}$$

3.23.* Розв'яжіть систему рівнянь методом підстановки:

$$1) \begin{cases} 6x + 3 = 5x - 4(5y + 4), \\ 3(2x - 3y) - 6x = 8 - y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 4, \\ \frac{3x+y}{4} - \frac{2x-5y}{3} = 5. \end{cases}$$

3.24.* Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

$$1) \begin{cases} 2(4x - 5) - 3(3 + 4y) = 5, \\ 7(6y - 1) - (4 + 3x) = 21y - 86; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x+2}{6} - \frac{y-3}{15} = 1, \\ \frac{x+2,5}{9} - \frac{y+3}{6} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

3.25.* Розв'яжіть систему рівнянь методом додавання:

$$1) \begin{cases} 0,2x - 0,3(2y + 1) = 1,5, \\ 3(x + 1) + 3y = 2y - 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{15x-3y}{4} + \frac{3x+2y}{6} = 3, \\ \frac{3x+y}{3} - \frac{x-3y}{2} = 6. \end{cases}$$

3.26.* При яких значеннях a і b графік рівняння $ax + by = 8$ проходить через точки $A(1; 3)$ і $B(2; -4)$?

3.27.* Запишіть рівняння прямої $y = kx + b$, яка проходить через точки:

$$1) N(2; 1) \text{ і } D(-3; 3); \quad 2) R(-4; 6) \text{ і } S(4; -2).$$

3.28.* Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{aligned} 1) (x + y)^2 + (x - 3)^2 &= 0; \\ 2) (x + 2y - 3)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 &= 0; \\ 3) |x - 3y - 6| + (9x + 6y - 32)^2 &= 0; \\ 4) x^2 + y^2 + 10x - 12y + 61 &= 0; \\ 5) 25x^2 + 10y^2 - 30xy + 8y + 16 &= 0. \end{aligned}$$

3.29.* Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{aligned} 1) (x - 2y)^2 + (y - 5)^2 &= 0; \\ 2) (4x + 2y - 5)^2 + |4x - 6y + 7| &= 0; \\ 3) 50x^2 + 4y^2 - 28xy + 16x + 64 &= 0. \end{aligned}$$

§ 2

МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

4.

Множина та її елементи

Ми часто говоримо: стадо баранів, букет квітів, колекція марок, косяк риб, зграя птахів, рій бджіл, зібрання картин, набір ручок, компанія друзів.

Якщо в цих парах перемішати перші слова, то може вийти смішно: букет баранів, косяк картин, колекція друзів. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція птахів, колекція картин, колекція ручок тощо є прийнятними. Річ у тім, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є термін, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це термін **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина учнів вашої школи, які є призерами Всеукраїнської олімпіади юних математиків;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x; y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремим найважливішим множинам присвоєно загальноприйнятні назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, які мають задану властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції f** , яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції f** , яку позначають $E(f)$;

- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D і т. д.

Об'єкти, які складають дану множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими літерами латинського алфавіту: a, b, c, d і т. д.

Якщо a — елемент множини A , то пишуть: $a \in A$ (читають: « a належить множині A »). Якщо b не є елементом множини A , то пишуть: $b \notin A$ (читають: « b не належить множині A »).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c , то пишуть: $A = \{a, b, c\}$.

Якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть: $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Задавати множину за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, зручно в тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів. Це зрозуміло. Наприклад, спробуйте перелічити всі елементи множини натуральних дільників числа 6^{1000} .

Означення. Дві множини A і B називають **рівними**, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A .

Якщо множини A і B рівні, то пишуть: $A = B$.

З означення випливає, що **множина однозначно визначається своїми елементами**. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, припускають шість варіантів запису множини, яка складається з трьох елементів a, b, c :

$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$.

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі розглядатимемо множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «космодром» має вид $\{к, о, с, м, д, р\}$.

Зауважимо, що $\{a\} \neq \{\{a\}\}$. Справді, множина $\{a\}$ складається з одного елемента a ; множина $\{\{a\}\}$ складається з одного елемента — множини $\{a\}$.

Множину вважають заданою, якщо можна встановити, чи належить елемент, що розглядається, даній множині.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких указували перелік її елементів. Зрозуміло, що не будь-яку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати неможливо.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яку мають усі елементи даної множини й тільки вони. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо x — довільний елемент множини A , яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть: $A = \{x \mid \dots\}$. Тут після вертикальної риски вказують умову, якій має задовольняти елемент x , щоб належати множині A .

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$. Ця множина дорівнює множині $\{-1, 0, 1\}$, яку, у свою чергу, можна задати за допомогою іншої характеристичної властивості:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}.$$

Маємо: $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$.

- $\{x \mid [x] = 0\}$ ¹ — множина чисел таких, що $0 \leq x < 1$. Тому $\{x \mid [x] = 0\} = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$.
- Нехай $(x; y)$ — координати точки. Тоді множина точок $\{(x; y) \mid y = 2x - 1, x \text{ — будь-яке число}\}$ — пряма, яка є графіком функції $y = 2x - 1$.

Узагалі, для точок координатної площини множина

$\{(x; y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$ — це графік функції f .

У геометрії, задаючи множину точок за допомогою характеристичної властивості, тим самим задають ГМТ.

- Якщо A, B — задані точки площини, X — довільна точка цієї площини, то множина $\{X \mid XA = XB\}$ — серединний перпендикуляр відрізка AB .

¹ Див. приклад 1 п. 2.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жоден об'єкт такої властивості не має. Звернемося до прикладів.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, потрібно передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** та позначають символом $\emptyset$.

Наприклад, $\{x \mid 0x = 2\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\} = \emptyset$.

Зазначимо, що множина $\{\emptyset\}$ не є порожньою. Вона містить один елемент — порожню множину.

ПРИКЛАД Доведіть, що множина A всіх парних натуральних чисел дорівнює множині B чисел, які можна подати у вигляді суми двох непарних натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $x \in A$. Тоді можна записати, що $x = 2m$, де m — натуральне число. Маємо: $x = 2m = (2m - 1) + 1$. Отже, $x \in B$.

Тепер припустимо, що $x \in B$. Тоді $x = (2n - 1) + (2k - 1)$, де n і k — натуральні числа. Маємо: $x = 2n - 1 + 2k - 1 = 2(n + k - 1)$. Отже, $x \in A$.

Маємо: якщо $x \in A$, то $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in B$, то $x \in A$. Звідси $A = B$. ▲



1. Як позначають множину та її елементи?
2. Як позначають множини натуральних, цілих і раціональних чисел?
3. Як записати, що елемент a належить (не належить) множині A ?
4. Які множини називають рівними?
5. Які існують способи задання множин?
6. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

ВПРАВИ

4.1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

4.2.° Як називають множину вовків, що підкорюються одному ватажку?

4.3.° Назвіть яку-небудь множину учнів вашої школи.

4.4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

4.5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 \in \mathbb{N}$; 3) $-5 \in \mathbb{Q}$; 5) $3,14 \in \mathbb{Q}$;

2) $0 \in \mathbb{N}$; 4) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$; 6) $\pi \in \mathbb{Q}$.

4.6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 \in D(f)$; 3) $0 \in E(f)$; 5) $1,01 \in E(f)$.

2) $0 \in D(f)$; 4) $\frac{1}{2} \in E(f)$;

 4.7.° Які з наведених тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$; 3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;

2) $1 \notin \{1\}$; 4) $\{1\} \in \{\{1\}\}$?

4.8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$; 3) $x = 2$;

2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$; 4) $x^2 + 3 = 0$.

4.9.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;

2) правильних дробів, знаменник яких не більший за 4;

3) букв слова «математика»;

4) цифр числа 5555.

4.10.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 = 0\}$;

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$;

3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.11.° Задайте за допомогою переліку елементів множину:

1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x(2|x| - 1) = 0\}$;

2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -3 \leq x < 2\}$.

4.12.° Нехай O — задана точка площини. Що являє собою множина точок M цієї площини:

1) $\{M \mid OM = 3 \text{ см}\}$;

2) $\{M \mid OM > 5 \text{ см}\}$;

3) $\{M \mid OM \leq 5 \text{ см}\}$?

4.13.° Нехай A, B, C — три задані точки площини. Що являє собою множина точок M цієї площини $\{M \mid MA = MB = MC\}$?

 **4.14.*** Чи рівні множини A і B , якщо:

- 1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
- 2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
- 3) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
- 4) $A = \{x \mid x \leq 3, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$;
- 5) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ кратне } 2 \text{ і } 3\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ кратне } 6\}$;
- 6) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 15, x = 19k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 4\}$?

4.15.* Укажіть рівні множини:

- $$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 6n - 3, n \in \mathbb{N}\};$$
- $$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 3n, n \in \mathbb{N}\};$$
- $$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ кратне } 3 \text{ і не кратне } 2\};$$
- $$D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 6n + 3, n \in \mathbb{N}\}.$$

4.16.* Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

- 1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
- 2) $B = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2}x - 2 = 0\right\}$;
- 3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| < 1\}$;
- 4) $D = \{x \mid 3x^4 + 5x^2 + 7 = 0\}$;
- 5) $E = \{x \mid x > |x|\}$?

4.17.* Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:

- 1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181° ;
- 2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
- 3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої її проведено;
- 4) множина функцій, графіками яких є кола?

4.18.** Доведіть, що $\{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}\}$.

4.19.** Доведіть, що $\{x \mid x = 4n - 1, n \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 4m + 3, m \in \mathbb{Z}\}$.

5. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A .

Означення. Множину B називають **підмножиною** множини A , якщо кожний елемент множини B є елементом множини A .

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A » або «множина A містить множину B »).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$;
- множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи;
- множина ссавців є підмножиною множини хребетних;
- множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 5.1).

Для ілюстрації співвідношень між множинами користуються схемами, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 5.2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 5.3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$.



Рис. 5.1

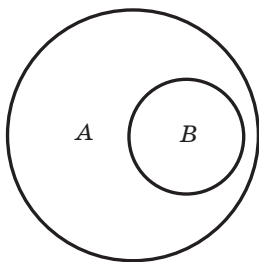


Рис. 5.2

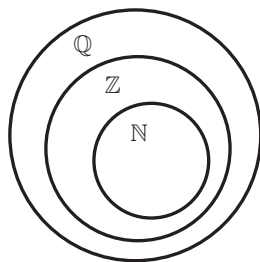


Рис. 5.3

Якщо $B \subset A$, то за допомогою рисунка 5.2 можна зробити такі висновки:

- 1) для того щоб елемент x належав множині A , достатньо, щоб він належав множині B ;
- 2) для того щоб елемент x належав множині B , необхідно, щоб він належав множині A .

Наприклад, якщо A — множина всіх натуральних чисел, кратних 5, а B — множина всіх натуральних чисел, кратних 10, то очевидно, що $B \subset A$. Тому для того, щоб натуральне число n було кратним 5 ($n \in A$), достатньо, щоб воно було кратним 10 ($n \in B$).

Для того щоб натуральне число n було кратним 10 ($n \in B$), необхідно, щоб воно було кратним 5 ($n \in A$).

З означень підмножини та рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A , то множина B є підмножиною множини A . З огляду на ці міркування порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A . Тому для будь-якої множини A справедливо твердження: $\emptyset \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають **власною підмножиною** множини A .

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

ПРИКЛАД 1 Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\emptyset$. Усього отримали 8 підмножин. У 9 класі буде доведено, що кількість підмножин n -елементної множини дорівнює 2^n . ▲

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A , і множині B . У такому разі говорять, що множина C є **перерізом** множин A і B .

Означення. **Перерізом** множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A , і множині B .

Переріз множин A і B позначають так: $A \cap B$.

З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Легко переконатися, що розв'язком системи рівнянь, яка розглядалася, є пара чисел $(4; 1)$. Цей факт можна записати так:

$$\{(x; y) \mid x + y = 5\} \cap \{(x; y) \mid x - y = 3\} = \{(4; 1)\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їхнім перерізом є порожня множина, тобто $A \cap B = \emptyset$. Також зазначимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \cap \emptyset = \emptyset$.

З означення перерізу двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Переріз множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5.4 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

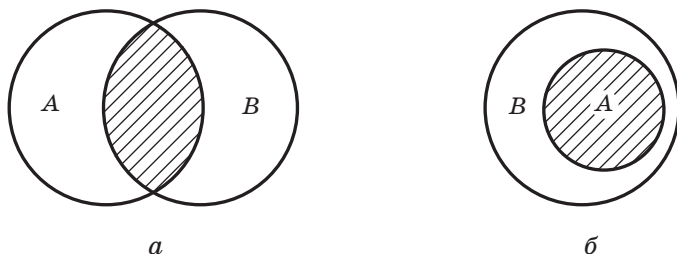


Рис. 5.4

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A , або множині B , є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B .

Означення. **Об'єднанням** множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин: або множині A , або множині B .

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Зауважимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \cup \emptyset = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5.5 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

Часто доводиться розглядати переріз і об'єднання трьох і більше множин.

Переріз множин A , B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A , і множині B , і множині C (рис. 5.6).

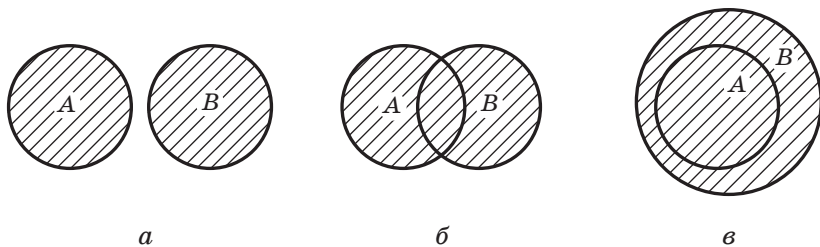


Рис. 5.5

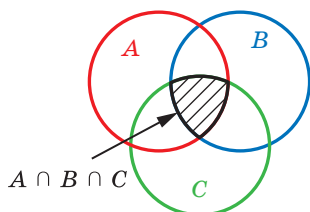


Рис. 5.6

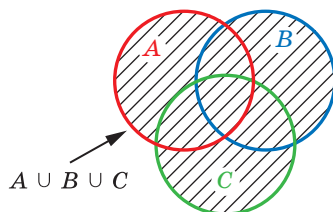


Рис. 5.7

Наприклад, щоб розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 17, \end{cases}$$

треба знайти переріз трьох множин: $\{(x; y) \mid x + y = 5\}$, $\{(x; y) \mid x - y = 3\}$ і $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 = 17\}$.

Об'єднання множин A , B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин: або множині A , або множині B , або множині C (рис. 5.7).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

Якщо з множини $\mathbb{Z}$ виключити множину $\mathbb{N}$, то отримаємо множину цілих недодатних чисел. Вона складається з усіх елементів множини $\mathbb{Z}$, які не належать множині $\mathbb{N}$. Говорять, що множина цілих недодатних чисел є **різницею** множин $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$.

Означення. Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, які належать множині A , але не належать множині B .

Різницю множин A і B позначають так: $A \setminus B$. З означення випливає, що

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

Зазначимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \setminus \emptyset = A$.

З означення різниці двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \setminus B = \emptyset$, зокрема, коли $B = A$, то $A \setminus A = \emptyset$.

Різницю множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5.8 заштрихована фігура зображує множину $A \setminus B$.

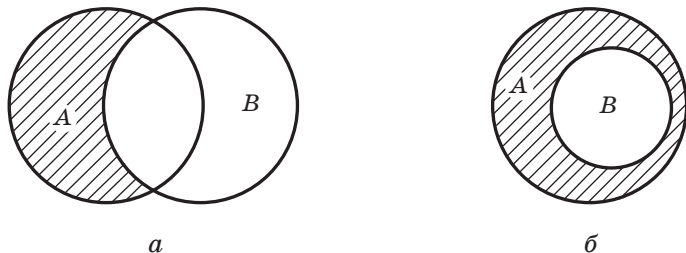


Рис. 5.8

ПРИКЛАД 2 Знайдіть переріз множин A і B , якщо:

- 1) $A = \{x \mid x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$;
- 2) A — множина ромбів, B — множина прямокутників;
- 3) $A = \{x \mid x > 3\}$, $B = \{x \mid x \leq 4\}$;
- 4) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 2m, m \in \mathbb{N}\}$, B — множина простих чисел.

Розв'язання

1) A — множина всіх натуральних чисел, кратних 5.

B — множина всіх натуральних чисел, кратних 3.

Тоді множина $A \cap B$ складається з усіх натуральних чисел, кратних 5 і 3 одночасно, тобто з усіх натуральних чисел, кратних 15. Отже, $A \cap B = \{x \mid x = 15k, k \in \mathbb{N}\}$.

2) Множина $A \cap B$ складається з усіх чотирикутників, які водночас є і ромбами, і прямокутниками. Отже, шукана множина — це множина всіх квадратів.

3) $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 4\}$.

4) A — множина всіх парних натуральних чисел. Оскільки в множині простих чисел є тільки одне парне число (число 2), то $A \cap B = \{2\}$. ▲

ПРИКЛАД 3 Знайдіть об'єднання множин A і B , якщо:

- 1) $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;
- 2) $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX < 3\}$, $B = \{X \mid OX = 3\}$, де O і X — точки площини, O — дана точка.

Розв'язання

1) A — множина всіх непарних натуральних чисел, B — множина всіх парних натуральних чисел. Тоді $A \cup B$ — це множина всіх натуральних чисел, тобто $A \cup B = \mathbb{N}$.

2) A — множина всіх непарних натуральних чисел. Елементами множини B є тільки непарні числа. Отже, $B \subset A$. Тоді

$$A \cup B = A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

3) Очевидно, що $A \cup B = \{X \mid OX \leq 3\}$. Отже, $A \cup B$ — це круг із центром O та радіусом 3. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть різницю множин A і B , якщо:

1) $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$;

2) $A = \{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 1, n \in \mathbb{N}\}$;

3) $A = \{X \mid OX \leq 3\}$, $B = \{X \mid OX < 3\}$, де O і X — точки площини, O — дана точка.

Розв'язання

1) A — множина непарних натуральних чисел, B — множина непарних натуральних чисел, більших за 1. Тоді $A \setminus B = \{1\}$.

2) A — множина непарних натуральних чисел. Тоді можна сказати, що A — множина натуральних чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1 або 3. Елементами множини B є всі натуральні числа, які при діленні на 4 дають в остачі 1. Отже,

$$A \setminus B = \{x \mid x = 4n + 3, n \in \mathbb{N}\}.$$

3) Очевидно, що $A \setminus B = \{X \mid OX = 3\}$. Отже, $A \setminus B$ — це коло із центром O та радіусом 3. ▲



1. Яку множину називають підмножиною даної множини?
2. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
3. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?
4. Яку множину називають власною підмножиною даної множини?
5. Що називають перерізом двох множин?
6. Що називають об'єднанням двох множин?
7. Що називають різницею двох множин?
8. Як за допомогою діаграм Ейлера ілюструють переріз, об'єднання та різницю двох множин?
9. Як знаходять переріз (об'єднання) трьох і більше множин?

ВПРАВИ

5.1.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

5.2.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

5.3.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

5.4.° Нехай A — множина букв слова «координата». Множина букв якого зі слів є підмножиною множини A :

- | | | | |
|-------------|--------------|--------------|---------------|
| 1) нора; | 4) крокодил; | 7) нарада; | 10) дорога; |
| 2) трактор; | 5) нитки; | 8) дарунок; | 11) корона; |
| 3) картина; | 6) корка; | 9) ордината; | 12) кардинал? |

 5.5.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A , якщо:

- | | | |
|-----------------|-----------------|---------------------|
| 1) $x = 98$; | 3) $x = 519$; | 5) $x = 195\ 888$; |
| 2) $x = 9510$; | 4) $x = 5858$; | 6) $x = 91\ 258$? |

5.6.° Нехай $A \neq \emptyset$. Які дві різні підмножини завжди має множина A ?

5.7.* Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

5.8.* Яке з тверджень є правильним:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1) $\{a\} \in \{a, b\}$; | 3) $a \subset \{a, b\}$; |
| 2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; | 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$? |

5.9.* Розташуйте дані множини в такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

- 1) A — множина восьмикласників вашої школи; B — множина восьмикласників вашої школи, які навчаються в математичному класі; C — множина учнів вашої школи, які не молодші від 10 років; D — множина учнів 8-го математичного класу, які є призерами районної математичної олімпіади;
- 2) A — множина прямокутників, B — множина чотирикутників, C — множина квадратів, D — множина паралелограмів;
- 3) A — множина ссавців, B — множина собак, C — множина хребетних, D — множина вовків, E — множина хижих ссавців.

5.10.* Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

- 1) A — множина всіх невід'ємних раціональних чисел;
 $B = \{0\}$;
 $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

A — множина натуральних чисел, кратних 6;

B — множина натуральних чисел, кратних 3.

5.11.* Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:

$$A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\};$$

$$C = \{x \mid x = 10n, n \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{x \mid x = 50n, n \in \mathbb{N}\};$$

$$D = \{x \mid x = 5n, n \in \mathbb{N}\}.$$

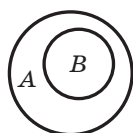
5.12.* Яка з множин A або B є підмножиною другої, якщо:

$$A = \{x \mid x = 4n + 2, n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{x \mid x = 8n + 2, n \in \mathbb{N}\}?$$

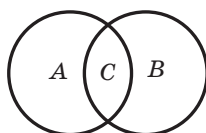
5.13.* Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\emptyset$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A . Запишіть множину A .

5.14.* Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

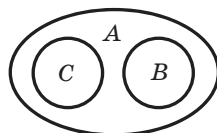
5.15.* Опишіть мовою «необхідно і достатньо» належність елемента x множинам A , B і C (рис. 5.9).



a



б



в

Рис. 5.9

5.16.* Замість крапок поставте слово «необхідно» або «достатньо»:

- 1) для того щоб трикутник був рівностороннім, ..., щоб два його кути були рівні;
- 2) для того щоб чотирикутник був паралелограмом, ..., щоб дві його сторони були паралельними;
- 3) для того щоб число ділилося націло на 3, ..., щоб воно ділилося націло на 9;
- 4) для того щоб остання цифра десяткового запису числа була нулем, ..., щоб число було кратним 5.

5.17.* Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A .

5.18.* Яке з тверджень є правильним:

$$1) \{a, b\} \cap \{a\} = a;$$

$$3) \{a, b\} \cap \{a\} = \{a\};$$

$$2) \{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\};$$

$$4) \{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}?$$

5.19.* Знайдіть переріз множин цифр, які використовують у записі чисел:

$$1) 555\ 288 \text{ і } 82\ 223;$$

$$2) 470\ 713 \text{ і } 400\ 007.$$

5.20.* Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

5.21.* Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

5.22.* Знайдіть переріз множин A і B , якщо:

- 1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
- 2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
- 3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
- 4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

5.23.* Знайдіть переріз множин A і B , якщо:

- 1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 11\}$;
- 2) $A = \{x \mid x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n, n \in \mathbb{N}\}$;
- 3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

5.24.* Накресліть два трикутники так, щоб їхнім перерізом була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

5.25.* Які фігури можуть бути перерізом двох променів, що лежать на одній прямій?

5.26.* Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A .

5.27.* Яке з тверджень є правильним:

- 1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
- 2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
- 3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
- 4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

 **5.28.*** Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовують у записі чисел:

- 1) 27 288 і 56 383;
- 2) 55 555 і 777 777.

5.29.* Знайдіть об'єднання множин A і B , якщо:

- 1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
- 2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
- 3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

5.30.* Знайдіть об'єднання множин A і B :

- 1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
- 2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
- 3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 7\}$.

5.31.* Накресліть два трикутники так, щоб їхнім об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

5.32.* Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

5.33.* Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A .

5.34.* Яке з даних тверджень є правильним:

- 1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = a$; 3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;
 2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$?

5.35.* Знайдіть різницю множин A і B , якщо:

- 1) $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$;
 2) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел;
 3) A — множина рівносторонніх трикутників, B — множина рівнобедрених трикутників.

5.36.* Наведіть приклад такої одноелементної множини, що її елемент є одночасно підмножиною даної множини.

6. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність

Якщо множина містить скінченну кількість елементів, то її називають **скінченною**, а якщо в ній нескінченно багато елементів — то **нескінченною**. Порожню множину вважають скінченною.

Наприклад, множина учнів вашого класу — скінченна множина, а множина натуральних чисел — нескінченна множина.

Якщо A — скінченна множина, то кількість її елементів позначатимемо так: $n(A)$.

Наприклад, якщо A — це множина днів тижня, то $n(A) = 7$; якщо B — це множина двоцифрових чисел, то $n(B) = 90$. Зрозуміло, що $n(\emptyset) = 0$.

Нехай A і B — такі скінченні множини, що $A \cap B = \emptyset$. Тоді очевидно, що

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B). \quad (1)$$

Якщо A і B — скінченні множини, причому $A \cap B \neq \emptyset$ (рис. 6.1), то до суми

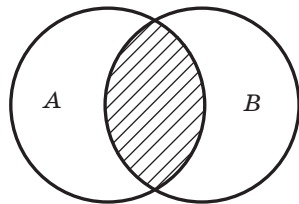


Рис. 6.1

$n(A) + n(B)$ двічі входить кількість елементів їхнього перерізу, тобто двічі враховано число $n(A \cap B)$. Отже, у цьому разі

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (2)$$

Коли $A \cap B = \emptyset$, то $n(A \cap B) = 0$. Тому формула (2) є узагальненням формули (1).

ПРИКЛАД 1 У математичному класі 25 учнів, і всі вони люблять математику. Відомо, що 23 учні люблять алгебру, а 21 — геометрію. Скільки учнів цього класу люблять і алгебру, і геометрію?

Розв'язання. Нехай A — множина учнів, які люблять алгебру, B — множина учнів, які люблять геометрію. Тоді $n(A) = 23$, $n(B) = 21$, $n(A \cup B) = 25$. $A \cap B$ — множина учнів, які люблять і алгебру, і геометрію. Із формули (2) отримуємо:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 21 - 25 = 19. \blacktriangle$$

З'ясуємо, як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$, де A , B і C — скінченні множини.

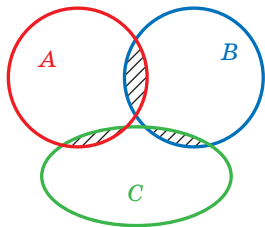


Рис. 6.2

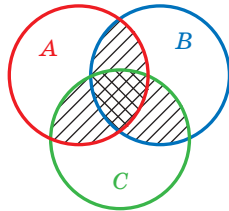


Рис. 6.3

Якщо $A \cap B \cap C = \emptyset$ (рис. 6.2), то зрозуміло, що

$$n(A \cup B \cup C) =$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A). \quad (3)$$

Якщо $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ (рис. 6.3), то в правій частині формули (3) не враховано кількість спільних елементів множин A , B і C . Отже, у цьому випадку формула набуває такого вигляду:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C). \quad (4)$$

Аналогічну формулу можна отримати для будь-якої кількості множин. Її називають «формулою включення-виключення».

ПРИКЛАД 2 У спортивній школі є три секції: акробатики, баскетболу, волейболу. Відомо, що школу відвідують 200 школярів, а кожну із секцій — 80 школярів. Доведіть, що знайдеться 14 школярів, які відвідують одні й ті самі дві секції.

Розв'язання. Позначимо множини школярів, які відвідують секції акробатики, баскетболу й волейболу, буквами A , B і B відповідно. Тоді $n(A \cup B \cup B) = 200$, $n(A) = n(B) = n(B) = 80$. Підставимо ці значення у формулу (4):

$$200 = 80 + 80 + 80 - n(A \cap B) - n(B \cap B) - n(B \cap A) + n(A \cap B \cap B).$$

Звідси $n(A \cap B) + n(B \cap B) + n(B \cap A) = 40 + n(A \cap B \cap B) \geq 40$.

Якщо припустити, що кожне із чисел $n(A \cap B)$, $n(B \cap B)$, $n(B \cap A)$ не перевищує 13, то їхня сума не перевищує 39. Отримали суперечність. ▲

Нам доволі часто доводиться порівнювати скінченні множини за кількістю їхніх елементів.

Як дізнатися, чи вистачить у шкільній бібліотеці підручників з алгебри для восьмикласників? Звичайно, можна порахувати окремо учнів і підручники, а можна видати підручники учням. Якщо, наприклад, усім підручників вистачить, а в бібліотеці не залишиться жодного підручника, то це означатиме, що кількість восьмикласників і підручників з алгебри є однаковою.

Так само, щоб дізнатися, чи вистачить стільців у класі, зовсім не обов'язково їх перераховувати. Достатньо запросити учнів сісти на стільці. Якщо, наприклад, місць вистачить не всім, то це означатиме, що кількість учнів більша, ніж кількість стільців.

У цих прикладах, порівнюючи кількість елементів двох множин, ми кожному елементу однієї множини поставили у відповідність єдиний елемент другої множини. Скористаємося цією ідеєю в наступному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Порівняйте кількість елементів множини A двоцифрових чисел і множини B трицифрових чисел, десятковий запис яких закінчується цифрою 1.

Розв'язання. Поставимо у відповідність кожному двоцифровому числу те трицифрове число, яке отримаємо з нього, приписавши справа одиницю. Дістанемо:

10,	11,	12,	...	98,	99
⇕	⇕	⇕		⇕	⇕
101,	111,	121,	...	981,	991

Зазначимо, що за такої відповідності всі елементи множини B виявляються «задіяними». Справді, якщо в числі виду $\overline{ab1}$ закреслити останню цифру, то отримаємо двоцифрове число $\overline{ab}$.

На основі відповідності між елементами множин A і B можна зробити висновок, що $n(A) = n(B)$. ▲

Означення. Якщо кожному елементу множини A поставлено у відповідність єдиний елемент множини B і при цьому будь-який елемент множини B є відповідним деякому єдиному елементу множини A , то говорять, що між множинами A і B встановлено **взаємно однозначну відповідність**.

У прикладі 3 кожному двоцифровому числу було поставлено у відповідність єдине трицифрове число зазначеного вигляду і, навпаки, кожне таке трицифрове число є відповідним єдиному двоцифровому числу. Отже, між множинами, які ми розглядали, було встановлено взаємно однозначну відповідність.

Зазначимо, що коли в класі всі учні сидять і при цьому є вільні стільці, то між множиною учнів і множиною стільців взаємно однозначної відповідності не встановлено.

Цікаво, що з дитинства кожному з нас неодноразово доводилося встановлювати взаємно однозначні відповідності. Дитина, промовляючи «один», «два», «три» та при цьому послідовно вказуючи на машинку, м'ячик і коника, тим самим встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною своїх іграшок і множиною $\{1, 2, 3\}$. Рахуючи іграшки, дитина ніби прив'язує до кожного з предметів ярлики з написами «1», «2», «3». Зауважимо, що, вказуючи на іграшки в іншому порядку, наприклад «м'ячик», «коник», «машинка», одержуємо іншу взаємно однозначну відповідність між цими множинами.

Якщо між скінченними множинами A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. І навпаки, якщо $n(A) = n(B)$, то між скінченними множинами A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Отже, між скінченними множинами з різною кількістю елементів неможливо встановити взаємно однозначну відповідність. Це дає змогу сформулювати таке правило.

Якщо $C \subset B$ і $C \neq B$, а між множинами A і C встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) < n(B)$.

ПРИКЛАД 4 Яких шестицифрових чисел більше: непарних, сума цифр яких дорівнює 47, або парних, сума цифр яких дорівнює 45?

Розв'язання. Позначимо множини чисел, про які йдеться в умові, буквами A і B відповідно.

Зауважимо, що коли в записі шестицифрового числа є цифра 0, то сума його цифр не більша за $9 \cdot 5 = 45$. Отже, якщо $a \in A$, то в записі числа a немає цифри 0.

Кожному числу $a \in A$ поставимо у відповідність число $b \in B$ за таким правилом: зменшимо на 1 дві останні цифри числа a (це можна зробити, оскільки в десятковому записі числа a немає нулів). Зрозуміло, що за такої відповідності різним числам множини A відповідатимуть різні числа множини B , тобто кожному елементу множини A відповідатиме єдиний елемент множини B .

Тепер розглянемо число 999 990, яке належить множині B . Зрозуміло, що це число не може бути отримано з елемента множини A за допомогою зазначеного правила.

Таким чином, ми встановили взаємно однозначну відповідність між множиною A і власною підмножиною множини B . Отже, $n(B) > n(A)$. ▲



1. Як знайти кількість елементів множини $A \cup B$?
2. Як знайти кількість елементів множини $A \cup B \cup C$?
3. У яких випадках говорять, що між двома множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

ВПРАВИ

- 6.1.° У класі 32 учні. З них 20 вивчають англійську мову та 18 — французьку. Скільки учнів вивчають і англійську, і французьку мови?
- 6.2.° Відомо, що 26 мешканців будинку тримають котів і собак, 16 із них мають котів, а 15 — собак. Скільки мешканців мають і собаку, і кота?
- 6.3.° З опитування, проведеного в класі, з'ясувалося, що з 30 учнів класу 18 мають брата, 14 — сестру, а у 10 є сестра та брат. Чи є в цьому класі учні, у яких немає ні сестри, ні брата?
- 6.4.° У грудні було 10 ясних і затишних днів, 15 днів був вітер і 12 днів ішов сніг. Протягом скількох днів у грудні була хуртовина (сніг і вітер)?

6.5.° Чи встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами A і B (рис. 6.4)? Точками на рисунку зображено елементи множин.

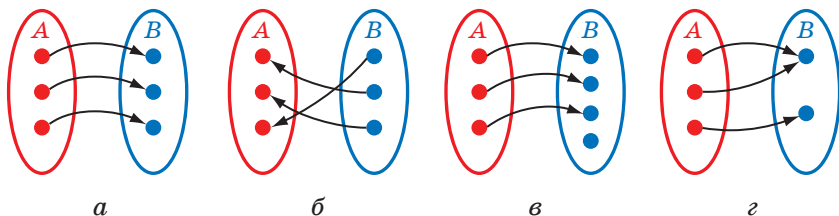


Рис. 6.4

6.6.° Одинадцять гравців футбольної команди отримали футболки з номерами від 1 до 11. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.7.° У результаті жеребкування кожна з 20 пар фігуристів отримала порядковий номер її виступу. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.8.° Кожний глядач, який прийшов до кінотеатру, купив квиток із зазначеними рядом і місцем. Між якими множинами встановлено взаємно однозначну відповідність?

6.9.° Між першими n натуральними числами та правильними дробами зі знаменником 7 встановлено взаємно однозначну відповідність. Знайдіть n .

6.10.* Кожному елементу множини $\{n, n + 1, n + 2\}$, де $n \in \mathbb{N}$, поставили у відповідність остачу при діленні цього елемента на 3. Чи встановлено таким чином взаємно однозначну відповідність між множинами $\{n, n + 1, n + 2\}$ і $\{0, 1, 2\}$?

 **6.11.*** Яких п'ятицифрових чисел більше: усі цифри яких парні чи всі цифри яких непарні?

6.12.* В опуклому n -кутнику ($n \geq 4$) жодні три діагоналі не перетинаються¹ в одній точці. Доведіть, що кількість усіх точок перетину діагоналей дорівнює кількості чотирикутників, усі вершини яких є вершинами даного n -кутника.

 **6.13.*** Розглядають усі прямокутники, довжини сторін яких виражено натуральними числами. Яких прямокутників більше: тих, периметр яких дорівнює 1000, або тих, периметр яких дорівнює 1002?

¹ Вважають, що діагоналі опуклого многокутника перетинаються, якщо вони мають спільну точку, відмінну від вершини многокутника.

- 6.14.*** Множина A містить 101 елемент. Доведіть, що кількість її підмножин, які містять парну кількість елементів, дорівнює кількості підмножин, які містять непарну кількість елементів.
- 6.15.*** В олімпіаді взяли участь 46 учнів. Їм було запропоновано розв'язати 3 задачі. Після підведення підсумків з'ясувалося, що кожний з учасників розв'язав принаймні одну задачу, причому першу та другу задачі розв'язали 11 учасників, другу та третю — 8 учасників, першу та третю — 5 учасників, а всі три задачі розв'язали тільки 2 учасники. Доведіть, що одну із задач розв'язали не менше ніж половина учасників.
-  **6.16.*** Яких трицифрових чисел більше: тих, у яких друга цифра в десятковому записі більша за першу та третю, або тих, у яких друга цифра менша від першої та третьої?
-  **6.17.*** Автобусні квитки мають номери від 000 000 до 999 999. Квиток називають «щасливим», якщо сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі останніх трьох цифр. Доведіть, що:
- 1) кількість усіх «щасливих» квитків парна;
 - 2) сума номерів усіх «щасливих» квитків кратна 999.
-  **6.18.*** Розглядають трикутники, довжини сторін яких виражено натуральними числами. Яких трикутників більше: тих, периметр яких дорівнює 997, або тих, периметр яких дорівнює 1000?
- 6.19.*** На колі позначено 100 точок: $A_1, A_2, \dots, A_{100}$. Яких многокутників з вершинами в позначених точках більше: тих, у яких точка A_1 є вершиною, чи тих, у яких точка A_1 не є вершиною?
-  **6.20.*** Яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких кожна наступна цифра більша за попередню (рахуючи зліва направо), чи тих, у яких кожна наступна цифра не менша від попередньої та кожна цифра не більша за 5?
- 6.21.*** Доведіть, що кількість пар цілих чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = n$ ($n \in \mathbb{N}$), дорівнює кількості пар цілих чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 2n$.
- 6.22.*** Множина A містить 100 елементів. Доведіть, що кількість її підмножин, які містять парну кількість елементів, дорівнює кількості підмножин, які містять непарну кількість елементів.

7. Нескінченні множини. Зліченні множини

У попередньому пункті ми розглядали скінченні множини, між якими встановлено взаємно однозначну відповідність, і з'ясували, що такі множини мають однакову кількість елементів.

Керуючись принципом «частина менша від цілого», доходимо висновку, що коли B — власна підмножина скінченної множини A , то $n(B) < n(A)$. Отже, між скінченною множиною та її власною підмножиною неможливо встановити взаємно однозначну відповідність.

Оскільки $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, то, здавалося б, природно вважати, що цілих чисел більше, ніж натуральних. Проте це не так.

Нескінченні множини в цьому сенсі поведуться незвично.

Розглянемо множину $\mathbb{N}$ і підмножину M парних чисел. Множина M є власною підмножиною множини $\mathbb{N}$. Кожному елементу $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність єдиний елемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots \\
 \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
 2, & 4, & 6, & 8, & \dots, & 2n, & \dots
 \end{array}$$

При цьому кожне парне число відповідатиме єдиному натуральному числу. Тим самим між множинами $\mathbb{N}$ і M встановлено взаємно однозначну відповідність, а тому не можна вважати, що в множині $\mathbb{N}$ міститься більше елементів, ніж у її власній підмножині — множині парних чисел.

Цей приклад показує, що звичні для нас уявлення про скінченні множини не можна переносити на нескінченні множини.

Узагалі, математиками було доведено, що в будь-якій нескінченній множині A можна виокремити власну підмножину A_1 таким чином, що між множинами A і A_1 можна встановити взаємно однозначну відповідність. Це принципова відмінність нескінченних множин від скінченних.

Якщо множини A і B є скінченними та між ними встановлено взаємно однозначну відповідність, то $n(A) = n(B)$. Якщо ж взаємно однозначну відповідність встановлено між нескінченними множинами A і B , то в математиці не прийнято говорити, що ці множини мають однакову кількість елементів, а кажуть, що множини A і B мають однакову **потужність**.

Означення. Дві множини називають **рівнопотужними**, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Для нескінченних множин слово «потужність» означає те саме, що для скінченних множин «кількість елементів».

Доведемо ще один дивовижний факт: множина точок прямої рівнопотужна множині точок **відкритого відрізка** (відрізка, у якого «виколото» кінці), тобто пряма містить стільки ж точок, скільки їх містить відкритий відрізок.

На рисунку 7.1 зображено пряму MN , яка дотикається до півкола із центром O та діаметром AB , паралельним прямій MN . Вилучимо з півкола точки A і B . Таке півколо називають **відкритим**.

Кожній точці X відкритого півкола поставимо у відповідність точку X_1 прямої MN , яка лежить на промені OX . Зрозуміло, що точці X відповідає єдина точка прямої MN і, навпаки, кожна точка прямої MN є відповідною єдиній точці відкритого півкола. Отже, встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої та множиною точок відкритого півкола.

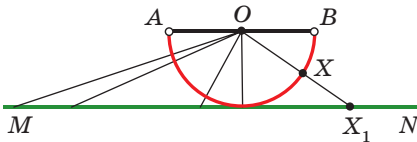


Рис. 7.1

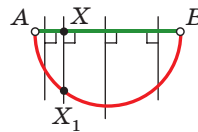


Рис. 7.2

На рисунку 7.2 показано, як установити взаємно однозначну відповідність між множиною точок відкритого відрізка та множиною точок відкритого півкола. Отже, множина точок відкритого відрізка AB рівнопотужна множині точок прямої MN .

У розповіді на с. 51 ви дізнаєтеся ще про один несподіваний факт, у який важко повірити, керуючись лише інтуїцією: множина точок сторони квадрата рівнопотужна множині точок квадрата.

Означення. Множину, рівнопотужну множині натуральних чисел, називають **зліченною множиною**.

Вище ми показали, що множина парних чисел є зліченною. Зрозуміло, що жодна скінченна множина не є зліченною.

Натуральне число n , яке відповідає елементу a зліченної множини A , називають *номером цього елемента*. Якщо елемент a має номер n , то пишуть: a_n . Коли встановлюють взаємно однозначну відповідність між множинами A і $\mathbb{N}$, то кожний елемент множи-

ни A отримує свій номер, і ці елементи можна розмістити послідовно:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Так, якщо елементи множини P простих чисел¹ розмістити в порядку зростання 2, 3, 5, 7, 11, ..., то всі елементи цієї множини можна пронумерувати:

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{array}$$

Тим самим встановлено взаємно однозначну відповідність між множинами P і $\mathbb{N}$.

У такий спосіб можна показати, що будь-яка нескінченна підмножина множини $\mathbb{N}$ є зліченною (зробіть це самостійно).

На перший погляд здається, що елементи множини $\mathbb{Z}$ пронумерувати неможливо: адже множина $\mathbb{N}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Z}$, а отже, чисел для нумерації не вистачить, усі вони будуть «витрачені» на множину $\mathbb{N}$.

Проте якщо елементи множини $\mathbb{Z}$ розмістити у вигляді послідовності 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..., то тим самим можна кожному цілому числу надати свій номер:

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \dots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \dots \end{array}$$

Доведемо, що множина $\mathbb{Q}$ є зліченною.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Назвемо число $h = |m| + |n|$ висотою

цього раціонального числа. Наприклад, $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1} \right\}$ — множина раціональних чисел, висота яких дорівнює 4.

Зрозуміло, що множина раціональних чисел із заданою висотою h є скінченною.

Тепер послідовно пронумеруємо всі нескоротні дроби (тобто раціональні числа), беручи спочатку дроби з висотою $h = 1$, потім дроби з висотою $h = 2$, висотою $h = 3$ тощо:

¹ У п. 12 буде доведено, що множина простих чисел є нескінченною.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{0}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{-1}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1} \right\} \cup \dots$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \end{array}$$

Ми показали, що всі елементи множини $\mathbb{Q}$ можна пронумерувати, а отже, ця множина є зліченною.

Не будь-яка нескінченна множина є зліченною.

Розглянемо множину A , елементами якої є всі нескінченні послідовності, складені з нулів і одиниць. Ось кілька елементів множини A :

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
 0, 1, 1, 1, 0, 0, ...
 0, 0, 1, 0, 1, 1, ...

Покажемо, що множина A є незліченною. Припустимо, що це не так. Тоді елементи цієї множини можна пронумерувати. Розмістимо елементи множини A в стовпчик у порядку зростання номерів. Наприклад:

Перший елемент: 1, 1, 0, 1, 0, ...
 Другий елемент: 0, 0, 0, 1, 1, ...
 Третій елемент: 0, 0, 0, 0, 0, ...
 Четвертий елемент: 1, 1, 1, 1, 1, ...
 П'ятий елемент: 1, 0, 1, 0, 1, ...
 ...

Цей запис має містити всі елементи множини A . Якщо вдасться побудувати послідовність із нулів та одиниць, якої в цьому записі немає, то тим самим спростується припущення про зліченність множини A .

Виділимо числа, які стоять на «діагоналі». Отримаємо послідовність:

1, 0, 0, 1, 1, ...

Замінімо в цій послідовності одиниці на нулі, а нулі — на одиниці:

0, 1, 1, 0, 0, ...

Цієї послідовності в записі немає. Справді, вона відрізняється від першої послідовності числом, яке стоїть на першому місці, від другої послідовності — числом, яке стоїть на другому місці, від третьої — числом, яке стоїть на третьому місці, тощо.



1. Які множини називають рівнопотужними?
2. Яку множину називають зліченною?

ВПРАВИ

- 7.1.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.
- 7.2.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною натуральних чисел і множиною чисел виду $4n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).
- 7.3.° Доведіть, що множини парних і непарних чисел рівнопотужні.
- 7.4.° Доведіть, що множина чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.
- 7.5.° Доведіть, що множина чисел виду $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) зліченна.
- 7.6.° Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною десяткових дробів виду $0,1; 0,01; 0,001; \dots$.
- 7.7.° Покажіть, що множини точок сторони й діагоналі квадрата рівнопотужні.
- 7.8.° Покажіть, що множини точок будь-яких двох концентричних кіл рівнопотужні.
- 7.9.* Укажіть спосіб, за допомогою якого можна **встановити** взаємно однозначну відповідність між множиною чисел виду 2^n ($n \in \mathbb{N}$) і множиною натуральних чисел, у десятковому записі яких використано тільки цифри 1 і 0.
-  7.10.** Доведіть, що будь-яка підмножина зліченної множини є або скінченною, або зліченною.
- 7.11.** Розглянемо множину відрізків, які належать координатній прямій, попарно не перетинаються, а їхні довжини не менші від 1. Доведіть, що ця множина є або скінченною, або зліченною.
- 7.12.** Покажіть, що множина точок прямої та множина точок кола з «виколотою» точкою рівнопотужні.
- 7.13.** На координатній прямій позначили точки $O(0)$, $A(1)$, $B(5)$. Доведіть, що:
- 1) множина точок відрізка OA рівнопотужна множині точок відрізка OB ;
 - 2) множина точок відрізка OA з «виколотою» точкою O рівнопотужна множині точок променя AB .

- 7.14.**** Покажіть, що множини точок будь-яких двох відрізків рівнопотужні.
- 7.15.*** Укажіть спосіб, за допомогою якого можна **встановити взаємно однозначну відповідність** між множиною натуральних чисел і множиною натуральних чисел, у десятковому записі яких використано тільки цифри 1 і 0.
- 7.16.*** Доведіть, що множина точок $(x; y)$ координатної площини таких, що числа x і y — цілі, є зліченною.
- 7.17.*** На площині є деяка множина квадратів, сторона кожного з яких дорівнює 10, причому квадрати не перетинаються. Доведіть, що ця множина скінченна або зліченна.
- 7.18.*** На площині є деяка множина кіл, які не перетинаються та радіуси яких дорівнюють 1. Доведіть, що ця множина скінченна або зліченна.

«Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»

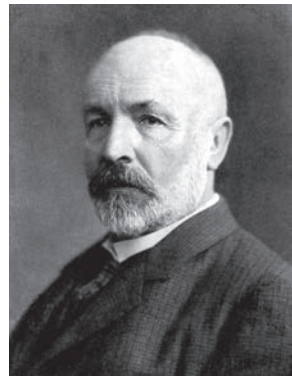


Ці слова належать видатному математику, засновнику теорії множин Георгу Кантору. Вони свідчать про те, що навіть генію часом буває складно примирити свою інтуїцію з формальним результатом.

Мабуть, і ви зазнавали подібного дискомфорту, коли логіка міркувань вимушувала вас погодитися з тим, що на будь-якому, навіть дуже маленькому, відрізку стільки ж точок, скільки їх на всій прямій.

А чи можна повірити в те, що множина точок квадрата рівнопотужна множині точок його сторони? Мабуть, ні. Цьому не вірив і сам великий Кантор.

У 1874 р. в одному зі своїх листів до видатного математика Ріхарда Дедекінда (1831–1916) Кантор писав: «Чи можна зіставити поверхню (наприклад, квадратну площадку, включаючи її межі) з відрізком прямої таким чином, щоб кожній точці поверхні відповідала одна точка на цьому відрізку й навпаки?»



Георг Кантор
(1845–1918)

Кантор думав, що відповідь має бути негативною, і намагався довести це протягом трьох років. Проте в 1877 р. він отримує несподіваний результат: буде взаємно однозначну відповідність між множиною точок квадрата та множиною точок його сторони.

Ознайомимося з ідеєю доведення Кантора.

Розглянемо на координатній площині квадрат з вершинами $A(0; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 1)$, $D(1; 0)$ (рис. 7.3).

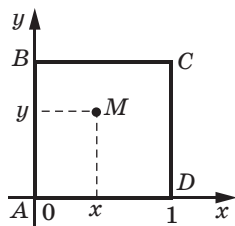


Рис. 7.3

Нехай точка $M(x; y)$ належить квадрату. Координати x і y задовольняють нерівностям $0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq 1$. Тоді числа x і y можна подати у вигляді нескінченних десяткових дробів:

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

$$y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$$

Зауважимо, що коли $x = 1$ або $y = 1$, то координату можна записати у вигляді дробу $0,999\dots^1$.

За допомогою цих записів сконструюємо новий десятковий дріб, «перемішуючи» десяткові знаки в записі чисел x і y через один:

$$z = 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \dots$$

Точці $M(x; y)$ поставимо у відповідність точку $K(z; 0)$. Очевидно, що ця точка належить стороні AD квадрата.

Зрозуміло, що різні точки квадрата мають різні координати. За такої відповідності різним точкам квадрата відповідають різні точки його сторони AD^2 .

Після ознайомлення з викладеним ви, мабуть, уже не дивуватиметесь тому, що, наприклад, множина точок куба рівнопотужна множині точок його ребра.

Множини, рівнопотужні множині точок відрізка, називають множинами потужності **континууму** (від латинського *continuum* — неперервний).

¹ Про можливість такого подання ви дізнаєтеся в курсі алгебри 9 класу.

² Деякі числа можуть мати два десяткових записи. Наприклад, дробам $0,7000\dots$ і $0,6999\dots$ відповідає одне й те саме число. Оскільки ідея доведення Кантора пов'язана з десятковим записом числа, то в строгому доведенні має бути показано, як вирішується проблема неоднозначності запису числа при встановленні взаємно однозначної відповідності.

§ 3

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

8. Подільність націло та її властивості

Із властивостями подільності націло ви ознайомилися в 6 класі. Вивчаючи цей параграф, ви не тільки навчитеся їх доводити, але й ознайомитеся з низкою нових понять і теорем, пов'язаних з подільністю цілих чисел.

Означення. Говорять, що ціле число a **ділиться націло** на ціле число b , $b \neq 0$, якщо існує таке ціле число k , що $a = bk$.

Якщо a ділиться націло на b , то пишуть: $a:b$. Наприклад, $12:-3$, $0:1000$, $-2:-1$.

Якщо $a:b$, то число b називають **дільником** числа a , а число a — **кратним** числа b . Також говорять, що число a кратне числу b .

Наприклад, $\{-4, 4, -2, 2, -1, 1\}$ — множина дільників числа 4; $\{3k | k \in \mathbb{Z}\}$ — множина чисел, кратних числу 3.

Розглянемо основні властивості подільності націло (буквами позначено цілі числа).

1. Якщо $a \neq 0$, то $a:a$.
2. Якщо $a \neq 0$, то $0:a$.
3. Якщо $a:b$, то $ka:b$.
4. Якщо $a:b$ і $b:c$, то $a:c$.
5. Якщо $a:m$ і $b:n$, то $ab:mn$.
6. Якщо $a:c$ і $b:c$, то $(a \pm b):c$.

Ці властивості доводять за допомогою означення ділення націло. Доведемо, наприклад, властивість 6 (решту властивостей доведіть самостійно).

Оскільки $a:c$ і $b:c$, то існують такі цілі числа m і n , що $a = mc$ і $b = nc$.

Маємо: $a \pm b = mc \pm nc = (m \pm n)c$. Оскільки $(m \pm n) \in \mathbb{Z}$, то за означенням ділення націло $(a \pm b) : c$.

ПРИКЛАД 1 Цілі числа a, b і c такі, що $(a+b) : c$, $ab : c$. Доведіть, що $(a^3 - b^3) : c$.

Розв'язання. Маємо: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b) \times ((a + b)^2 - ab)$. Оскільки $(a+b)^2 : c$ і $ab : c$, то за властивістю 6 $((a+b)^2 - ab) : c$. Тоді з властивості 3 випливає справедливості твердження, що доводиться. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$x^2 + xy - x - y = 5.$$

Розв'язання. Розв'язати рівняння з двома змінними в цілих числах означає знайти всі пари цілих чисел, які є розв'язками цього рівняння.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(x + y) - (x + y) = 5; (x + y)(x - 1) = 5.$$

Звідси отримуємо, що значення виразів $x + y$ і $x - 1$ є дільниками числа 5. Тоді можливі чотири випадки:

- 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x-1=1; \end{cases} \begin{cases} y=3, \\ x=2; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x+y=1, \\ x-1=5; \end{cases} \begin{cases} y=-5, \\ x=6; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} x+y=-5, \\ x-1=-1; \end{cases} \begin{cases} y=-5, \\ x=0; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} x+y=-1, \\ x-1=-5; \end{cases} \begin{cases} y=3, \\ x=-4. \end{cases}$

Відповідь: (2; 3); (6; -5); (0; -5); (-4; 3). ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^2 - y^2 = 14$.

Розв'язання. Маємо: $(x + y)(x - y) = 14$. Далі можна скористатися методом, описаним у прикладі 2. Проте набагато зручніше керуватися таким очевидним міркуванням: значення виразів $x + y$ і $x - y$ завжди мають однакову парність (або обидва парні, або обидва непарні), отже, їхній добуток є або числом непарним, або числом, кратним 4.

Тепер зрозуміло, що рівняння, яке розглядається, не має розв'язків у цілих числах. ▲

ПРИКЛАД 4 Цілі числа x і y такі, що $(6x+11y):31$. Доведіть, що $(x+7y):31$.

Розв'язання

Маємо: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Оскільки $31(x + 2y):31$, а з умови та властивості 3 випливає, що $5(6x + 11y):31$, то за властивістю 6 різниця, що розглядається, кратна 31. ▲

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли $P(x)$ — многочлен із цілими коефіцієнтами, то для будь-яких цілих чисел p і q , $p \neq q$, $(P(p) - P(q)):(p - q)$.

Розв'язання. Нехай $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$. Тоді $P(p) - P(q) = a_n(p^n - q^n) + a_{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots + a_1(p - q)$. Із формули розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ випливає, що різницю $P(p) - P(q)$ можна подати у вигляді $(p - q)k$, де $k \in \mathbb{Z}$. ▲



1. Коли говорять, що ціле число a ділиться націло на ціле число b ?
2. Що означає запис $a:b$?
3. Яке число називають дільником числа a ?
4. Яке число називають кратним числа b ?
5. Сформулюйте властивості подільності націло.

ВПРАВИ

8.1.^о Число¹ a кратне 5. Доведіть, що $8a:40$.

8.2.^о Число b кратне 7. Доведіть, що $6b:42$.

8.3.^о Число m кратне 6. Доведіть, що $(m^2 - 4m):12$.

8.4.^о Число n кратне 4. Доведіть, що $(n^2 + 8n):16$.

8.5.^о Числа c і d такі, що $c:4$, $d:6$. Доведіть, що $(6c + 4d):24$.

8.6.^о Числа p і q такі, що $p:5$, $q:8$. Доведіть, що $(8p - 5q):40$.

8.7.^о Доведіть, що коли $a:c$ і $(a+b):c$, то $b:c$.

8.8.^о Числа a і b такі, що кожне із чисел $a + 3$ і $b + 29$ кратне 13. Доведіть, що число $a - b$ також кратне 13.

¹ У цьому пункті буквами позначено цілі числа. Випадки, коли буквою позначено натуральне число, будуть обумовлені окремо.

- 8.9.°** Числа m і n такі, що кожне із чисел $m + 5$ і $39 - n$ кратне 17. Доведіть, що число $m + n$ також кратне 17.
- 8.10.°** Доведіть, що $(\overline{ab} + \overline{ba}) : 11$.
- 8.11.°** Доведіть, що $(\overline{ab} - \overline{ba}) : 9$.
- 8.12.°** Доведіть, що $(\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}) : 111$.
- 8.13.°** Доведіть, що $(\overline{abc} - \overline{cba}) : 99$.
- 8.14.°** Доведіть, що при будь-яких значеннях a і b значення виразу $a^2b - b^2a$ є парним числом.
- 8.15.°** Числа a, b, m такі, що $am : (a+b)$. Доведіть, що $bm : (a+b)$.
- 8.16.°** Числа x, y, z такі, що $xz : (z-y)$. Доведіть, що $xy : (z-y)$.
- 8.17.°** Числа m, n, k такі, що $(m-n) : k$ і $mn : k$. Доведіть, що $(m^3 + n^3) : k$.
- 8.18.°** Числа a, b, m, n такі, що $(ab - mn) : (b - m)$. Доведіть, що $(am - bn) : (b - m)$.
- 8.19.°** Числа a, b, c, d такі, що $(ab + cd) : (a + c)$. Доведіть, що $(ad + bc) : (a + c)$.
- 8.20.°** Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
- | | |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $9x^2 - y^2 = 6$; | 4) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 3$; |
| 2) $x^2 + 2xy = 2x + 9$; | 5) $x^2 + xy - 6y^2 = 6$; |
| 3) $x^2 + 2xy - x - 2y = 4$; | 6) $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = 14$. |
- 8.21.°** Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
- | | |
|---------------------------|--------------------------------|
| 1) $x^2 - 4y^2 = 5$; | 3) $x^2 - 3xy + 3y - x = 10$; |
| 2) $y^2 + 3xy = 15 + y$; | 4) $2y^2 - xy - x^2 = 2$. |
- 8.22.°** Розв'яжіть у цілих числах рівняння:
- | | |
|-------------------|------------------------|
| 1) $xy = x + y$; | 2) $xy - x - 2y = 5$. |
|-------------------|------------------------|
- 8.23.°** Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2xy + 2x - 3y - 4 = 0$.
- 8.24.°** Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях n значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 9^n$:
- | | |
|--------------|------------------|
| 1) кратне 5; | 2) не кратне 10. |
|--------------|------------------|
- 8.25.°** Доведіть, що при будь-яких непарних натуральних значеннях $n > 1$ значення виразу $1^n + 2^n + 3^n + \dots + 99^n$ кратне 100.
- 8.26.°** Чи існує многочлен $P(x)$ із цілими коефіцієнтами такий, що $P(1) = 17$, $P(9) = 53$?
- 8.27.°** Знайдіть усі двоцифрові числа $\overline{ab}$ такі, що значення виразу $\overline{ab} - \overline{ba}$ є квадратом натурального числа.

- 8.28.* Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} - \overline{cba}$ є квадратом натурального числа?
- 8.29.* Чи існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, що значення виразу $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ є квадратом натурального числа?
- 8.30.** Числа x і y такі, що значення виразу $3x + 8y$ кратне 19. Доведіть, що значення виразу $13x + 3y$ кратне 19.
- 8.31.** Числа c і d такі, що значення виразу $2c + 5d$ кратне 17. Доведіть, що значення виразу $11c + 2d$ кратне 17.
- 8.32.** Числа x і y такі, що $(3x+10y):13$. Доведіть, що $(3x+10y)(3y+10x):169$.
- 8.33.** Натуральні числа m і n такі, що $n^2:(m+n)$. Доведіть, що $m^3:(m+n)$.
- 8.34.** Натуральні числа a і b такі, що $a^3:(a^2+b^2)$. Доведіть, що $b^4:(a^2+b^2)$.
- 8.35.** Трицифрове число $\overline{abc}$ кратне числу 37. Доведіть, що сума чисел $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ також кратна числу 37.
- 8.36.** Цифри a і b трицифрового числа $m = \overline{aba}$ такі, що $(a+b):7$. Доведіть, що $m:7$.
- 8.37.** Сума п'яти натуральних чисел дорівнює 200. Чи може остання цифра їхнього добутку дорівнювати 7?
- 8.38.** На який найбільший степінь числа 2 може ділитися націло значення виразу $3^{2n+1} + 1$ при $n \in \mathbb{N}$?
-  8.39.** Доведіть, що кількість дільників квадрата натурального числа — число непарне. Сформулюйте та доведіть обернене твердження.
- 8.40.* П'ятицифрове число $A = \overline{abcde}$ кратне числу 41. Доведіть, що число $B = \overline{bcdea}$ також кратне числу 41.
- 8.41.* Шестицифрове число $A = \overline{abcdef}$ кратне числу 37. Доведіть, що число $B = \overline{bcdefa}$ також кратне числу 37.
- 8.42.* Дано 19-цифрове число, десятковий запис якого не містить нулів. Доведіть, що в записі цього числа можна закреслити кілька цифр так, щоб число, отримане в результаті, було кратним числу 111.
- 8.43.* Дано многочлен $P(x)$ із цілими коефіцієнтами. Різні числа a, b і c такі, що $P(a) = P(b) = P(c) = -1$. Доведіть, що не існує такого $x_0 \in \mathbb{Z}$, що $P(x_0) = 0$.

9. Ділення з остачею. Конгруенції та їхні властивості

Із курсу математики молодших класів ви знаєте, що коли натуральне число a не ділиться націло на натуральне число b і $a > b$, то можна виконати ділення з остачею.

Наприклад, при діленні числа 47 на 5 у частці отримуємо 9, а в остачі 2. Пишуть: $47 : 5 = 9$ (ост. 2) або $47 = 5 \cdot 9 + 2$, і говорять, що число 47 при діленні на 5 дає в остачі число 2.

Розширимо тепер поняття «ділення з остачею» на випадок, коли ділене є цілим числом.

Теорема 9.1. Для будь-якого цілого числа a і натурального числа b існує єдина пара цілих чисел q і r таких, що $a = bq + r$, де $0 \leq r < b$.

Якщо $r \neq 0$, то число q називають **неповною часткою**. Число r називають **остачею**.

Наводимо приклади, що ілюструють цю теорему.

Для чисел $a = 2$, $b = 7$ існує пара $q = 0$ і $r = 2$, тобто $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Для чисел $a = -2$, $b = 5$ існує пара $q = -1$ і $r = 3$, тобто $-2 = 5 \cdot (-1) + 3$.

Для чисел $a = -8$, $b = 4$ існує пара $q = -2$ і $r = 0$, тобто $-8 = 4 \cdot (-2) + 0$.

Тепер доведемо теорему.

Доведення. Якщо $a : b$, то існує єдине ціле число q таке, що $a = bq$. У цьому випадку $r = 0$.

Нехай тепер a не ділиться націло на b . Зобразимо на координатній прямій множину чисел, кратних b (рис. 9.1):

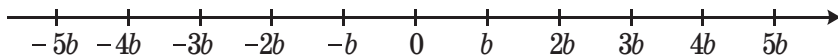


Рис. 9.1

Число a не збігається з жодною з позначених точок і належить одному з проміжків виду $(bq; bq + b)$, тобто $bq < a < bq + b$ (рис. 9.2). Звідси $0 < a - bq < b$.

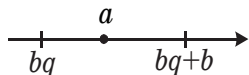


Рис. 9.2

Позначимо різницю $a - bq$ буквою r . Тоді $0 < r < b$.

Маємо: $a - bq = r$, $a = bq + r$.

Оскільки проміжок $(bq; bq + b)$, якому належить число a , визначається однозначно, то однозначно визначається й пара чисел q і r . ▲

З доведеної теореми випливає, наприклад, що будь-яке ціле число при діленні на 2 дає в остачі або 0, або 1. Ми цим часто користуємось, розбиваючи множину цілих чисел на дві підмножини, які не перетинаються: множину парних чисел $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ і множину непарних чисел $\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

При діленні цілого числа на 3 можна отримати тільки такі остачі: 0, 1, 2. Тому множину $\mathbb{Z}$ можна розбити на 3 підмножини, які не перетинаються:

$$\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Узагалі, для заданого натурального числа m , де $m > 1$, множину $\mathbb{Z}$ можна розбити на m підмножин, які не перетинаються, таким чином, що першій підмножині належатимуть усі числа, які при діленні на m дають в остачі 0, другій — числа, які дають в остачі 1, третій — числа, які дають в остачі 2, і т. д., m -й — числа, які дають в остачі $m - 1$:

$$\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{mk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \dots \cup \{mk+m-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Теорема 9.2. Якщо цілі числа a і b при діленні на натуральне число m дають однакові остачі, то $(a-b) : m$.

Доведення. Нехай $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$, де $0 \leq r < m$. Тоді $a - b = m(q_1 - q_2)$. Звідси $(a-b) : m$. ▲

Справедлива й обернена теорема.

Теорема 9.3. Якщо цілі числа a і b такі, що $(a-b) : m$, де $m \in \mathbb{N}$, то числа a і b дають однакові остачі при діленні на m .

Скориставшись методом доведення від супротивного, доведіть цю теорему самостійно.

Означення. Цілі числа a і b називають **конгруентними за модулем m** ($m \in \mathbb{N}$), якщо остачі при діленні їх на число m рівні.

Пишуть: $a \equiv b \pmod{m}$. Такий запис називають **конгруенцією**. Читають: « a конгруентне b за модулем m ».

Наприклад, $5 \equiv 8 \pmod{3}$, $7 \equiv -1 \pmod{4}$, $18 \equiv 0 \pmod{9}$, $25 \equiv 35 \pmod{5}$.



Карл Фрідріх Гаусс

(1777–1855)

Праці Гаусса справили значний вплив на розвиток алгебри, теорії чисел, диференціальної геометрії, теорії електрики та магнетизму, геодезії, теоретичної астрономії.

Поняття конгруентності за модулем упровадив видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс.

Теорема 9.4. Для того щоб цілі числа a і b були конгруентними за модулем m , де $m \in \mathbb{N}$, необхідно і достатньо, щоб різниця $a - b$ ділилася націло на m .

Справедливість цієї теореми випливає з теорем 9.2 і 9.3. Переконайтеся в цьому самостійно.

Розглянемо основні властивості конгруенцій (буквами a, b, c, d позначено цілі числа, m і n — натуральні).

1. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.
3. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$.
4. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$ і $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
6. Якщо $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Доведемо властивість 5.

З умови випливає, що $(a - b) : m$, тобто $a = b + mt_1$, де $t_1 \in \mathbb{Z}$. Також $(c - d) : m$, тобто $c = d + mt_2$, де $t_2 \in \mathbb{Z}$.

Маємо: $ac - bd = (b + mt_1)(d + mt_2) - bd = bmt_2 + dmt_1 + m^2t_1t_2 = m(bt_2 + dt_1 + mt_1t_2)$.

Отже, $(ac - bd) : m$. Тоді $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Доведемо властивість 6.

Маємо: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

З умови випливає, що $(a - b) : m$. Тоді $(a^n - b^n) : m$.

Решту властивостей доведіть самостійно.

Властивості 4 і 5 узагальнюються й для тих випадків, коли конгруенцій більше двох.

Якщо $a_1 \equiv b_1 \pmod{m}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{m}$, ..., $a_n \equiv b_n \pmod{m}$, то

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n \pmod{m}$$

$$\text{і } a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n \equiv b_1 b_2 \cdot \dots \cdot b_n \pmod{m}.$$

ПРИКЛАД 1 Непарне число m ділиться націло на 3. Чому дорівнює остача при діленні числа m на 6?

Розв'язання. При діленні цілого числа на 6 можуть бути отримані остачі 0, 1, 2, 3, 4, 5. Тому будь-яке ціле число можна подати в одному з таких виглядів:

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5, \text{ де } k \in \mathbb{Z}.$$

Із цих чисел кратні 3 тільки числа виду $6k$ і $6k + 3$. Оскільки число m непарне, то воно може бути тільки виду $6k + 3$. Отже, число m при діленні на 6 дає в остачі 3. ▲

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що серед п'яти послідовних цілих чисел є тільки одне, яке кратне 5.

Розв'язання. Розглянемо п'ять послідовних цілих чисел: n , $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$. Оскільки модуль різниці будь-яких двох таких чисел менший від 5 і не дорівнює нулю, то він не ділиться націло на 5. Отже, усі ці п'ять чисел дають різні остачі при діленні на 5. Різних остач при діленні на 5 також 5. Отже, одне із цих чисел при діленні на 5 дає в остачі 0. ▲

Зауваження. Міркуючи аналогічно, можна довести, що серед m послідовних цілих чисел є тільки одне, яке кратне m .

ПРИКЛАД 3 Чому може дорівнювати остача при діленні числа n^4 на 5, де $n \in \mathbb{Z}$?

Розв'язання. Має місце одна з п'яти конгруенцій: $n \equiv 0 \pmod{5}$, $n \equiv 1 \pmod{5}$, $n \equiv 2 \pmod{5}$, $n \equiv 3 \pmod{5}$, $n \equiv 4 \pmod{5}$.

Піднесемо обидві частини кожної із цих конгруенцій до четвертого степеня.

$$n^4 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$n^4 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$n^4 \equiv 16 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5},$$

$$n^4 \equiv 81 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5},$$

$$n^4 \equiv 256 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}.$$

Отже, при діленні числа n^4 на 5 в остачі можуть бути отримані тільки числа 0 і 1. ▲

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Розв'язання. Маємо: $2^{4n+3} + 13 \cdot 3^{2n} = 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n$. Очевидно, що $16 \equiv 9 \pmod{7}$. Застосовуючи послідовно властивості 6, 3, 2 конгруенцій, запишемо:

$$\begin{aligned} 16^n &\equiv 9^n \pmod{7}, \\ 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n &\equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod{7}, \\ 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n &\equiv 8 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n \pmod{7}, \\ 8 \cdot 16^n + 13 \cdot 9^n &\equiv 21 \cdot 9^n \pmod{7}. \end{aligned}$$

Права частина останньої конгруенції при діленні на 7 дає в остачі 0. Отже, така властивість притаманна й лівій частині конгруенції. ▲

ПРИКЛАД 5 Знайдіть остачу від ділення числа 7^{29} на 5.

Розв'язання. Задача зводиться до того, щоб знайти ціле число x , яке задовольняє дві умови: $0 \leq x < 5$ і $7^{29} \equiv x \pmod{5}$. Маємо:

$$\begin{aligned} 7^2 &\equiv -1 \pmod{5}; \\ 7^{28} &\equiv (-1)^{14} \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}; \\ 7^{29} &\equiv 7 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5}. \end{aligned}$$

Отже, шуканою остачею є число 2.

Розв'язання цієї задачі також припускає інші схеми, наприклад:

$$\begin{aligned} 7 &\equiv 2 \pmod{5}; \\ 7^4 &\equiv 2^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}; \\ 7^{28} &\equiv 1^7 \pmod{5}; \\ 7^{29} &\equiv 7 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{5}. \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що з $n + 1$ натуральних чисел завжди можна вибрати два таких, що їхня різниця ділиться націло на n .

Розв'язання. При діленні цілих чисел на n можна отримати n різних остач: $0, 1, \dots, n - 1$. Оскільки заданих чисел $n + 1$, то щонайменше два з них дають однакові остачі при діленні на n . Тоді їхня різниця ділитиметься націло на n . ▲



1. Сформулюйте теорему про ділення з остачею.
2. Яку властивість має різниця цілих чисел a і b , які при діленні на натуральне число m дають однакові остачі?
3. Яку властивість мають остачі при діленні цілих чисел a і b на натуральне число m , якщо $(a - b) : m$?
4. Які числа називають конгруентними за модулем m , де $m \in \mathbb{N}$?
5. Сформулюйте необхідну і достатню умову того, що цілі числа a і b конгруентні за модулем m , де $m \in \mathbb{N}$.
6. Сформулюйте властивості конгруенцій.

ВПРАВИ

9.1.° Знайдіть неповну частку та остачу при діленні числа¹ a на число b , якщо:

1) $a = 253, b = 19$;

3) $a = -26, b = 3$;

2) $a = 8, b = 13$;

4) $a = -1, b = 7$.

9.2.° Знайдіть неповну частку та остачу при діленні числа m на число n , якщо:

1) $m = 9, n = 15$;

2) $m = -31, n = 10$;

3) $m = -6, n = 11$.

9.3.° Які остачі можна отримати при діленні цілого числа на 7?

9.4.° Задайте всі множини, кожна з яких складається з усіх цілих чисел, які мають однакові остачі при діленні на 4.

9.5.° Дано множини A, B, X , які попарно не перетинаються, причому $A \cup B \cup X = \mathbb{Z}$. Знайдіть множину X , якщо $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

9.6.° Яку остачу при діленні на 3 дає число виду $3k - 2$, де $k \in \mathbb{Z}$?

9.7.° Яку остачу при діленні на 6 дає число виду $6n - 1$, де $n \in \mathbb{Z}$?

9.8.° Відомо, що при діленні числа m на 18 остача дорівнює 11. Знайдіть остачу при діленні числа m : 1) на 2; 2) на 3; 3) на 6; 4) на 9.

9.9.° Відомо, що при діленні числа n на 16 остача дорівнює 9. Знайдіть остачу при діленні числа n : 1) на 2; 2) на 4; 3) на 8.

9.10.° Число m кратне 6. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 18?

9.11.° Число n кратне 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа n на 16?

9.12.° Число a при діленні на 6 дає в остачі 3, а при діленні на 4 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа a на 12.

9.13.° Число b при діленні на 5 дає в остачі 2, а при діленні на 3 дає в остачі 1. Знайдіть остачу при діленні числа b на 15.

9.14.° Число m дає рівні остачі при діленні на 3 і на 4. Чому може дорівнювати остача при діленні числа m на 12?

9.15.° Замість зірочки запишіть таке найменше невід'ємне число, щоб отримана конгруенція була правильною:

1) $56 \equiv * \pmod{8}$;

4) $* \equiv 3 \pmod{15}$;

2) $23 \equiv * \pmod{7}$;

5) $* \equiv -2 \pmod{18}$;

3) $-43 \equiv * \pmod{5}$;

6) $* \equiv 6 \pmod{2}$.

¹ Тут і далі буквами позначено цілі числа.

9.32.* Використовуючи конгруенції, доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

- 1) $17^n + 25 \cdot 4^n$ кратне 13; 4) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ кратне 11;
2) $16^n + 4^{2n+1}$ кратне 5; 5) $17 \cdot 21^{2n+1} + 9 \cdot 43^{2n+1}$ кратне 8;
3) $15^n + 2^{3n} - 30$ кратне 7; 6) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ кратне 17.

9.33.* Знайдіть остачу при діленні числа a на число b , якщо:

- 1) $a = 5^{99}$, $b = 3$; 3) $a = 3^{101}$, $b = 7$;
2) $a = 7^{36}$, $b = 4$; 4) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $b = 5$.

9.34.* Знайдіть остачу при діленні числа m на число n , якщо:

- 1) $m = 11^{43}$, $n = 7$; 3) $m = 3^{30}$, $n = 31$.
2) $m = 13^{52}$, $n = 17$;

9.35.* Сума остач при діленні натурального числа n на числа 3, 6 і 9 дорівнює 15. Знайдіть ці остачі.

9.36.** Доведіть, що серед чисел виду $4^n + 4^m$ (m і n — натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

9.37.** Доведіть, що серед чисел виду $5^n + 5^m$ (m і n — натуральні числа) немає жодного квадрата натурального числа.

9.38.** Про числа m, n, p, q, r, s відомо, що $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = s^2$. Доведіть, що хоча б одне із цих чисел парне.

9.39.** Відомо, що p і q — непарні числа. Доведіть, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має раціональних коренів.

9.40.** Числа $x_1, x_2, \dots, x_k$ не діляться націло на 5, а значення виразу $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_k^4$ кратне 5. Доведіть, що $k \div 5$.

9.41.** Доведіть, що при жодному натуральному n значення виразу $1 + n + n^2 + n^3$ не є степенем числа 3.

 **9.42.**** Остача при діленні трицифрового числа $n = \overline{aa5}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число n .

 **9.43.**** Остача при діленні трицифрового числа $m = \overline{2bb}$ на деяке одноцифрове число дорівнює 8. Знайдіть число m .

9.44.* Яку найбільшу кількість натуральних чисел від 1 до 100 можна вибрати так, щоб сума будь-яких двох із цих чисел ділилася націло на 6?

 **9.45.*** При діленні натурального числа n на 9 остача дорівнює неповній частці, і при діленні числа n на 14 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n .

 **9.46.*** При діленні натурального числа n на 26 остача дорівнює неповній частці, і при діленні числа n на 29 остача теж дорівнює неповній частці. Знайдіть усі можливі значення n .

- 9.47.* Доведіть, що існує безліч натуральних чисел, які не можна подати у вигляді:
- 1) суми кубів двох натуральних чисел;
 - 2) суми кубів трьох натуральних чисел.
- 9.48.* Доведіть, що серед натуральних степенів числа 2 існують два таких, що їхня різниця кратна числу 2009.
- 9.49.* Доведіть, що для будь-якого натурального числа n знайдеться натуральне число, кратне n , у десятковому записі якого використовуються тільки цифри 1 і 0.
- 9.50.* Відомо, що $a + b + c = (a - b)(b - c)(c - a)$. Доведіть, що значення виразу $a + b + c$ є парним і кратним 27.

10. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Взаємно прості числа

Якщо кожне із чисел¹ a і b ділиться націло на число d , то число d називають **спільним дільником** чисел a і b .

Зрозуміло, що $d \leq a$ і $d \leq b$. Отже, множина спільних дільників чисел a і b є скінченною. Виберемо в цій множині найбільший елемент. Його називають **найбільшим спільним дільником** чисел a і b і позначають НСД (a ; b).

Наприклад, НСД (18; 12) = 6, НСД (5; 6) = 1, НСД (7; 14) = 7.

Теорема 10.1. Якщо $a > b$, то НСД (a ; b) = НСД ($a - b$; b).

Доведення. Нехай $a : d$ і $b : d$, тоді $(a - b) : d$. Нехай $(a - b) : d_1$ і $b : d_1$, тоді $a : d_1$. Маємо, що будь-який спільний дільник чисел a і b є спільним дільником чисел $a - b$ і b . І навпаки, будь-який спільний дільник чисел $a - b$ і b є спільним дільником чисел a і b . Отже, множина спільних дільників чисел a і b збігається з множиною спільних дільників чисел $a - b$ і b . Звідси НСД (a ; b) = НСД ($a - b$; b). ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть НСД ($6n + 3$; $3n$).

Розв'язання. За теоремою 10.1 можна записати

$$\begin{aligned} \text{НСД}(6n + 3; 3n) &= \text{НСД}(6n + 3 - 3n; 3n) = \text{НСД}(3n + 3; 3n) = \\ &= \text{НСД}(3n + 3 - 3n; 3n) = \text{НСД}(3; 3n) = 3. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

¹ У цьому пункті буквами позначено натуральні числа. Випадки, коли буквою позначено ціле число, будуть обумовлені окремо.

Тепер ми познайомимось з іншим, загальнішим методом знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел.

Якщо $a : b$, то очевидно, що $\text{НСД}(a; b) = b$.

Розглянемо випадок, коли a не ділиться націло на b . Для визначеності вважатимемо, що $a > b$.

Лема¹ 1. Якщо $a = bq + r$, де $0 < r < b$, то $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(b; r)$.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню теореми 10.1. Проведіть його самостійно.

З леми випливає, що знаходження $\text{НСД}(a; b)$ зводиться до знаходження $\text{НСД}(b; r)$.

Позначимо через r_1 остачу від ділення числа b на число r . Тоді за лемою $\text{НСД}(b; r) = \text{НСД}(r; r_1)$. Далі позначимо через r_2 остачу від ділення числа r на число r_1 . Тоді $\text{НСД}(r; r_1) = \text{НСД}(r_1; r_2)$ тощо.

Випишемо відповідні рівності:

$$\begin{aligned} a &= bq + r, & 0 < r < b; \\ b &= rq_1 + r_1, & 0 < r_1 < r; \\ r &= r_1q_2 + r_2, & 0 < r_2 < r_1; \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 < r_3 < r_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

Маємо ланцюжок нерівностей $b > r > r_1 > r_2 > r_3 > \dots \geq 0$. Як бачимо, остачі зменшуються. Отже, на якомусь кроці остача дорівнюватиме нулю. Нехай r_n — остання ненульова остача, тобто

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n; \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1}. \end{aligned}$$

З леми випливає, що $\text{НСД}(a; b) = \text{НСД}(b; r) = \text{НСД}(r; r_1) = \dots = \text{НСД}(r_{n-1}; r_n)$.

Оскільки $r_{n-1} : r_n$, то $\text{НСД}(r_{n-1}; r_n) = r_n$. Отже, $\text{НСД}(a; b) = r_n$.

Описаний метод знаходження $\text{НСД}(a; b)$ називають **алгоритмом Евкліда**.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\text{НСД}(525; 231)$.

Розв'язання. $525 = 231 \cdot 2 + 63$;

$$231 = 63 \cdot 3 + 42;$$

$$63 = 42 \cdot 1 + 21;$$

$$42 = 21 \cdot 2 + 0.$$

Отже, $\text{НСД}(525; 231) = 21$. ▲

¹ Лемою називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.

ПРИКЛАД 3 Один майстер робить на довгій стрічці позначки синім олівцем через кожні 25 см, а другий — червоним через кожні 36 см, починаючи з одного й того самого місця. Чи може яка-небудь синя позначка виявитися на відстані 1 см від якої-небудь червоної?

Розв'язання. Нехай x і y — кількість позначок, зроблених першим і другим майстрами відповідно. Відповідь на запитання задачі буде ствердною, якщо рівняння $25x - 36y = 1$ матиме розв'язок у натуральних числах.

Застосуємо алгоритм Евкліда до чисел 36 і 25:

$$36 = 25 \cdot 1 + 11;$$

$$25 = 11 \cdot 2 + 3;$$

$$11 = 3 \cdot 3 + 2;$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1.$$

Перепишемо ці рівності так:

$$11 = 36 - 25 \cdot 1;$$

$$3 = 25 - 11 \cdot 2;$$

$$2 = 11 - 3 \cdot 3;$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1.$$

Звідси

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 - (11 - 3 \cdot 3) = 4 \cdot 3 - 11 = 4(25 - 11 \cdot 2) - 11 =$$

$$= 4 \cdot 25 - 9 \cdot 11 = 4 \cdot 25 - 9(36 - 25 \cdot 1) = 13 \cdot 25 - 9 \cdot 36.$$

Отже, $13 \cdot 25 - 9 \cdot 36 = 1$, тобто пара $(13; 9)$ є розв'язком рівняння $25x - 36y = 1$. ▲

Виникає природне запитання: «Чому за допомогою алгоритму Евкліда нам удалось знайти цілі розв'язки розглядуваного рівняння?» Річ у тім, що справедливе таке твердження: рівняння $ax + by = \text{НСД}(a; b)$ завжди має розв'язки в цілих числах, причому один із розв'язків $(x_0; y_0)$ можна знайти за допомогою алгоритму Евкліда. Більше того, усі цілі розв'язки цього рівняння задаються формулами $x = x_0 - bt$, $y = y_0 + at$, де $t \in \mathbb{Z}$. Цей факт ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Якщо числа a і b є дільниками числа k , то число k називають **спільним кратним** чисел a і b .

Серед спільних кратних чисел a і b існує найменше. Його називають **найменшим спільним кратним** чисел a і b і позначають $\text{НСК}(a; b)$.

Наприклад, $\text{НСК}(8; 12) = 24$, $\text{НСК}(7; 8) = 56$, $\text{НСК}(64; 16) = 64$.

Теорема 10.2. *НСК (a ; b) є дільником будь-якого спільного кратного чисел a і b .*

Доведення. Нехай $\text{НСК} (a; b) = k$ і k_1 — спільне кратне чисел a і b , $k_1 > k$.

Припустимо, що k_1 не ділиться націло на k . Тоді $k_1 = kq + r$, де $0 < r < k$. Звідси $r = k_1 - kq$. Кожне із чисел k_1 і k кратне і a , і b , отже, $r : a$ і $r : b$, тобто r — спільне кратне чисел a і b . Проте $r < k$. Отримали суперечність. ▲

Теорема 10.3. *Якщо $a : c$ і $b : c$, то $\frac{ab}{c}$ — спільне кратне чисел a і b .*

Доведення. З умови випливає, що існують такі числа m і n , що $a = cm$ і $b = cn$. Тоді $\frac{ab}{c} = \frac{cmcn}{c} = cmn = an = bm$. Отже, число $\frac{ab}{c}$ кратне числам a і b . ▲

Теорема 10.4. *$\text{НСК} (a; b) \cdot \text{НСД} (a; b) = ab$.*

Доведення. Нехай $\text{НСК} (a; b) = k$, $\text{НСД} (a; b) = d$. Очевидно, що число ab є спільним кратним чисел a і b . Тоді за теоремою 10.2 маємо: $ab : k$. Отже, існує таке число c , що

$$ab = ck.$$

Оскільки $k : a$, то існує таке число m , що $k = ma$. Маємо: $ab = cma$. Звідси $b = cm$. Отже, $b : c$.

Аналогічно доводимо, що $a : c$. Таким чином, c — спільний дільник чисел a і b . Тоді $d \geq c$. З рівності $ab = ck$ маємо:

$$k = \frac{ab}{c} \geq \frac{ab}{d}. \quad (1)$$

Крім того, за теоремою 10.3 число $\frac{ab}{d}$ є спільним кратним чисел a і b . Отже,

$$\frac{ab}{d} \geq k. \quad (2)$$

З нерівностей (1) і (2) отримуємо, що $\frac{ab}{d} = k$. ▲

Означення. Якщо $\text{НСД} (a; b) = 1$, то числа a і b називають **взаємно простими**.

Наприклад, 9 і 25, 16 і 1, 28 і 29 — пари взаємно простих чисел.

Теорема 10.5. Якщо $\text{НСД}(a; b) = 1$, то $\text{НСК}(a; b) = ab$.

Справедливість цього твердження випливає з теореми 10.4.

Теорема 10.6. Якщо $\text{НСД}(b; c) = 1$, $a:b$ і $a:c$, то $a:bc$.

Доведення. Оскільки $\text{НСД}(b; c) = 1$, то $\text{НСК}(b; c) = bc$. З умови випливає, що a — спільне кратне чисел b і c . Тоді за теоремою 10.2 $a : \text{НСК}(b; c)$, тобто $a:bc$. ▲

Теорема 10.7. Якщо $\text{НСД}(a; b) = 1$ і $ac:b$, то $c:b$.

Доведення. З умови випливає, що $\text{НСК}(a; b) = ab$. Також зрозуміло, що ac — спільне кратне чисел a і b . Отже, $ac:ab$. Тоді існує таке число k , що $ac = kab$. Звідси $c = kb$. Отже, $c:b$. ▲

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що значення виразу $n^3 - n$ ділиться на ціло на 6 при будь-якому значенні n .

Розв'язання. Маємо: $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$. Оскільки з двох послідовних натуральних чисел одне кратне 2, а з трьох послідовних натуральних чисел одне кратне 3, то за теоремою 10.6 значення даного виразу кратне $2 \cdot 3$, тобто 6. ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$x(y - 1)^2 = 8y.$$

Розв'язання. Очевидно, що $y \neq 1$. Оскільки ліва частина рівняння кратна $y - 1$, то й права частина рівняння кратна $y - 1$. Числа y і $y - 1$ взаємно прості (доведіть це самостійно). Тоді за теоремою 10.7 маємо: що $8:(y - 1)^2$. Звідси $(y - 1)^2 = 1$ або $(y - 1)^2 = 4$. З урахуванням $y \in \mathbb{N}$ отримуємо: $y = 2$ або $y = 3$. Далі отримуємо, що $x = 16$ або $x = 6$.

Відповідь: (16; 2), (6; 3). ▲

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a \equiv b \pmod{m}$, $a:n$, $b:n$,

$\text{НСД}(m; n) = 1$, то $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$.

Розв'язання. З умови випливає, що існують такі числа k_1 і k_2 , що $a = nk_1$ і $b = nk_2$. Маємо: $a - b = n(k_1 - k_2):m$. Оскільки $\text{НСД}(m; n) = 1$, то за теоремою 10.7 $(k_1 - k_2):m$, тобто $k_1 \equiv k_2 \pmod{m}$.

Звідси $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$. ▲

10.13.* Чи існують такі цілі числа a, b, c , що:

- 1) $a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 = 1001$;
- 2) $a^3 + b^3 + c^3 - a - b - c = 1004$?

10.14.* Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ є цілим числом значення виразу:

- 1) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$;
- 2) $\frac{n^5 - n}{30}$;
- 3) $\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$.

10.15.* Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$ є цілим числом значення виразу:

- 1) $\frac{n^3 + 5n}{6}$;
- 2) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$;
- 3) $\frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2n)}{24}$.

10.16.* Знайдіть натуральні числа m і n , якщо:

- 1) $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$, НСД ($m; n$) = 5; 3) НСД ($m; n$) = 3, $mn = 117$;
- 2) $\frac{m}{n} = \frac{4}{11}$, НСК ($m; n$) = 88; 4) НСД ($m; n$) = 7, НСК ($m; n$) = 1001.

10.17.* Знайдіть натуральні числа a і b , якщо:

- 1) $\frac{a}{b} = \frac{13}{5}$, НСД ($a; b$) = 3;
- 2) $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$, НСК ($a; b$) = 224.

 **10.18.**** Від прямокутника розміром 324×141 мм відрізають квадрати зі стороною 141 мм, поки не залишиться прямокутник, у якого довжина однієї сторони менша від 141 мм. Від отриманого прямокутника знову відрізають квадрати, сторона яких дорівнює довжині його меншої сторони, і т. д. Яка довжина сторони останнього квадрата?

10.19.** Зі 100 послідовних натуральних чисел вибрали 51 число. Доведіть, що серед вибраних чисел є такі числа a і b , що НСД ($a; b$) = 1.

10.20.** Найменше спільне кратне деяких двох натуральних чисел у 16 разів більше за їхній найбільший спільний дільник. Доведіть, що одне із цих чисел кратне другому.

10.21.** Найменше спільне кратне деяких двох натуральних чисел у 27 разів більше за їхній найбільший спільний дільник. Доведіть, що одне із цих чисел кратне другому.

10.22.** Розв'яжіть у натуральних числах рівняння $x(y+1)^2 = 243y$.

10.23.* Натуральні числа m і n такі, що НСК ($m; n$) + НСД ($m; n$) = $m + n$. Доведіть, що одне із чисел (m або n) ділиться націло на друге.

10.24.* Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ дріб $\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 6n^2 + 8}$ є нескоротним.

 **10.25.*** Натуральне число n таке, що значення виразу $n(n+1) \times (n+2)(n+3)(n+4)$ кратне 2000. Знайдіть найменше значення n .

10.26.* Знайдіть усі пари натуральних чисел m і n таких, що

$$\text{НСК}(m; n) - \text{НСД}(m; n) = \frac{mn}{3}.$$

10.27.* Три автомати друкують на картках пари цілих чисел. Кожний автомат, прочитавши деяку картку, видає нову картку. Прочитавши картку з парою чисел $(m; n)$, перший автомат видає картку із числами $(m - n; n)$, другий — картку із числами $(m + n; n)$, третій — картку із числами $(n; m)$. Спочатку є картка з парою чисел $(46; 51)$. Чи можна, використовуючи автомати в деякому порядку, отримати картку з парою чисел $(15; 33)$?

11. Ознаки подільності

Ви знаєте, що ознаки подільності дають змогу за властивостями десяткового запису діленого, не виконуючи ділення, визначати, чи є деяке число його дільником.

Вам відомі ознаки подільності на 2, 5, 10, 3 і 9. Тепер за допомогою «мови конгруенцій» узагальнимо ці ознаки та доведемо нові.

Теорема 11.1. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}$.

Доведення. Запишемо очевидні конгруенції:

$$1 \equiv 1 \pmod{9},$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9},$$

$$10^2 \equiv 1 \pmod{9},$$

⋮

$$10^{n-1} \equiv 1 \pmod{9},$$

$$10^n \equiv 1 \pmod{9}.$$

Помножимо обидві частини першої конгруенції на a_0 , другої — на a_1 , третьої — на a_2 і т. д., $(n+1)$ -ї — на a_n . Маємо:

$$a_0 \equiv a_0 \pmod{9},$$

$$10a_1 \equiv a_1 \pmod{9},$$

$$10^2 \cdot a_2 \equiv a_2 \pmod{9},$$

⋮

$$10^{n-1} \cdot a_{n-1} \equiv a_{n-1} \pmod{9},$$

$$10^n \cdot a_n \equiv a_n \pmod{9}.$$

Додавши ці конгруенції, отримаємо:

$$10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9};$$

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}. \blacktriangle$$

Наслідок (ознака подільності на 9). *Натуральне число ділиться націло на 9 тоді й тільки тоді, коли сума цифр його десяткового запису ділиться націло на 9.*

Теорема 11.2. $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}.$

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок (ознака подільності на 3). *Натуральне число ділиться націло на 3 тоді й тільки тоді, коли сума цифр його десяткового запису ділиться націло на 3.*

Теорема 11.3.

$$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}.$$

Доведення. Запишемо очевидні конгруенції:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \pmod{11}, \\ 10 &\equiv -1 \pmod{11}, \\ 10^2 &\equiv 1 \pmod{11}, \\ 10^3 &\equiv -1 \pmod{11}, \\ &\vdots \\ 10^n &\equiv (-1)^n \pmod{11}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv a_0 \pmod{11}, \\ 10a_1 &\equiv -a_1 \pmod{11}, \\ 10^2 \cdot a_2 &\equiv a_2 \pmod{11}, \\ 10^3 \cdot a_3 &\equiv -a_3 \pmod{11}, \\ 10^n \cdot a_n &\equiv (-1)^n a_n \pmod{11}. \end{aligned}$$

Додавши ці конгруенції, отримаємо:

$$\begin{aligned} 10^n \cdot a_n + 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 &\equiv \\ &\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}; \\ \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0} &\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n \pmod{11}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Наслідок (ознака подільності на 11). *Пронумеруємо цифри десяткового запису натурального числа справа наліво числами 0, 1, 2, ..., n. Натуральне число ділиться націло на 11 тоді й тільки тоді, коли різниця між сумою цифр з парними номерами й сумою цифр з непарними номерами ділиться націло на 11.*

Наприклад, для числа 2 387 605 маємо: $(5 + 6 + 8 + 2) - (0 + 7 + 3) = 11$. Отже, це число кратне 11.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що число 1 000 003 000 001 не є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Сума цифр даного числа дорівнює 5. Отже, це число при діленні на 3 дає в остачі 2. Проте квадрат натурального числа при діленні на 3 дає в остачі або 0, або 1 (див. задачу 9.20). ▲

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що різниця числа, яке має непарну кількість цифр, і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 99.

Розв'язання. Нехай одне число дорівнює a , а друге, отримане перестановкою цифр числа a , дорівнює b .

Позначимо¹ через $S(n)$ суму цифр натурального числа n . Очевидно, що $S(a) = S(b)$.

Маємо:

$$a \equiv S(a) \pmod{9};$$

$$b \equiv S(b) \pmod{9};$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{9},$$

тобто $(a-b):9$.

Пронумеруємо цифри числа a справа наліво числами 0, 1, 2, ..., $2n$.

Позначимо через $P(n)$ різницю між сумою цифр з парними номерами й сумою цифр з непарними номерами числа n . Тоді:

$$P(a) = (a_0 + a_2 + \dots + a_{2n-2} + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-3} + a_{2n-1});$$

$$P(b) = (a_{2n} + a_{2n-2} + \dots + a_2 + a_0) - (a_{2n-1} + a_{2n-3} + \dots + a_3 + a_1).$$

Очевидно, що $P(a) = P(b)$.

Маємо:

$$a \equiv P(a) \pmod{11};$$

$$b \equiv P(b) \pmod{11};$$

$$a - b \equiv 0 \pmod{11},$$

тобто $(a-b):11$.

Оскільки НСД $(9; 11) = 1$, то $(a-b):99$. ▲



1. Сформулюйте ознаку подільності на 3.
2. Сформулюйте ознаку подільності на 9.
3. Сформулюйте ознаку подільності на 11.

¹ Таке позначення буде використано й далі в задачах цього пункту.

ВПРАВИ

11.1.° Які із чисел 485 761, 44 253, 1 757 217, 2 223 075 діляться націло: 1) на 3; 2) на 9; 3) на 11?

 11.2.° Доведіть¹, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{4}$.

 11.3.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} \equiv \overline{a_1 a_0} \pmod{25}$.

 11.4.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{8}$.

 11.5.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{125}$.

 11.6.° Доведіть, що
$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \pmod{2^k}.$$

 11.7.° Доведіть, що $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0} \pmod{5^k}$.

11.8.° Запишіть, використовуючи по одному разу кожен із цифр 0, 1, 4, 7, найбільше і найменше чотирицифрові числа, кратні 15.

 11.9.° До числа 15 допишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб утворене число було кратним 15. Скільки розв'язків має задача?

 11.10.° До числа 34 допишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб утворене число було кратним 45. Скільки розв'язків має задача?

 11.11.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число $*74*$ ділилося націло на 18. Знайдіть усі можливі розв'язки.

 11.12.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число $3*4*$ ділилося націло на 9. Знайдіть усі можливі розв'язки.

 11.13.° Замість зірочки поставте таку цифру, щоб семицифрове число $1\ 876\ 74*$ ділилося націло на 33.

 11.14.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб семицифрове число $2\ 83*64*$ ділилося націло на 55.

 11.15.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число $42*4*$ ділилося націло на 72.

 11.16.° Замість зірочок поставте такі цифри, щоб число $6\ 2**427$ ділилося націло на 99.

¹ У задачах 11.2–11.7, якщо перша ліворуч цифра числа, записаного в правій частині конгруенції, дорівнює нулю, то запис цього числа потрібно читати, починаючи з наступної цифри.

-  **11.17.°** Шестицифрове число кратне 8. Яку найбільшу суму цифр воно може мати?
-  **11.18.°** Знайдіть найменше натуральне число, кратне 36, у записі якого зустрічаються всі 10 цифр.
- 11.19.°** Чи існує натуральне число, добуток цифр якого дорівнює 143 341 143?
-  **11.20.°** Доведіть, що натуральне число, у десятковому записі якого використано один раз цифру 1, два рази — цифру 2, три рази — цифру 3 і чотири рази — цифру 4, не є квадратом натурального числа.
- 11.21.°** Чи може натуральне число, у записі якого є тільки цифри 0 і 6, бути квадратом натурального числа?
- 11.22.°** Спочатку обчислили суму цифр числа, яке дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 1000$. Потім обчислили суму цифр отриманого числа. Так робили доти, доки не отримали одноцифрове число. Яке це число?
- 11.23.°** У десятковому записі числа 28^{101} підраховували суму цифр. В отриманому числі знов підраховували суму цифр, і так доти, доки не отримали одноцифрове число. Яке це число?
- 11.24.°** Розв'яжіть рівняння:
1) $n + S(n) = 1000$; 2) $n^2 + (S(n))^2 = 1000$.
- 11.25.°** Розв'яжіть рівняння:
1) $n + S(n) = 1001$; 2) $n + S(n) + S(S(n)) = 2000$.
- 11.26.°** Натуральне число n таке, що $S(n) = S(5n)$. Доведіть, що n кратне 9.
- 11.27.*** Натуральне число n таке, що число $n^2 + 1$ — десятицифрове. Доведіть, що в записі числа $n^2 + 1$ знайдуться дві однакові цифри.
-  **11.28.*** Чи можна, використовуючи кожен із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному разу, записати шестицифрове число, яке ділиться націло на 11?
- 11.29.*** Числа 2000, 2001, ..., 2010 записали одне за одним у деякому порядку. Доведіть, що отримане 44-цифрове число має принаймні чотири різних натуральних дільники.
- 11.30.*** Знайдіть усі $n \in \mathbb{N}$, для яких має місце така властивість: якщо сума цифр натурального числа ділиться націло на n , то й саме число ділиться націло на n .

12. Прості та складені числа

Число 1 має тільки один натуральний дільник, а саме 1. Будь-яке інше натуральне число n має щонайменше два натуральних дільники: 1 і n .

Число 5 має тільки два натуральних дільники: 1 і 5. Таку саму властивість мають, наприклад, числа 2, 7, 11, 13. Такі числа називають простими.

Означення. Натуральне число називають **простим**, якщо воно має тільки два різних натуральних дільники: одиницю та саме це число.

Число 4 має три натуральних дільники: 1, 2, 4.

Число 6 має чотири натуральних дільники: 1, 2, 3, 6.

Означення. Натуральне число, яке має більше ніж два натуральних дільники, називають **складеним**.

Числа 4 і 6 — складені числа.

Оскільки число 1 має тільки один натуральний дільник, то його не вважають ні простим, ні складеним.

Якщо послідовно виписувати натуральні числа, то легко помітити, що прості числа зустрічаються набагато рідше, ніж складені. Так, перша тисяча натуральних чисел містить 168 простих чисел, друга — 135, третя — 127. Більше того, можна вказати проміжки натурального ряду будь-якої довжини, які не містять жодного простого числа.

Наприклад, серед n послідовних натуральних чисел $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$, ..., $(n + 1)! + n + 1$, де $n > 1$, немає жодного простого числа¹. Справді, перше число ділиться націло на 2 і більше за 2, друге число ділиться націло на 3 і більше за 3 тощо.

Може виникнути гіпотеза, що в натуральному ряді, починаючи з деякого місця, узагалі неможливо натрапити на просте число. Але це не так. Давньогрецький учений Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» довів, що існує безліч простих чисел.

Теорема 12.1. Множина простих чисел є нескінченною.

Доведення. Нехай множина простих чисел є скінченною та складається з простих чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$.

¹ Символом $k!$ позначають добуток k перших натуральних чисел (читають: « k факторіал»). Наприклад, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Довелися вважати, що $1! = 1$ і $0! = 1$.

Розглянемо число $p = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$.

Жодне із чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$ не є дільником числа p : число p при діленні на кожне із цих чисел дає в остачі 1.

Нехай m — найменший дільник числа p , відмінний від 1. Якщо число m складене, то існує дільник числа p , відмінний від 1, який менший від m . Отже, число m просте й не міститься серед чисел $p_1, p_2, \dots, p_n$. Отримали суперечність. ▲

Розглянемо деякі властивості простих чисел.

Теорема 12.2. *Якщо просте число p_1 ділиться націло на просте число p_2 , то $p_1 = p_2$.*

Доведення. Число p_1 має тільки два натуральних дільники: 1 і p_1 . Оскільки $p_2 \neq 1$, то $p_2 = p_1$. ▲

Теорема 12.3. *Для будь-якого натурального числа n і даного простого числа p справедливе одне з двох тверджень: $n : p$ або НСД ($n; p$) = 1.*

Доведення. Число p має тільки два натуральних дільники: 1 і p . Отже, НСД ($n; p$) може набувати тільки двох значень: 1 і p . Якщо НСД ($n; p$) = p , то $n : p$. ▲

Теорема 12.4. *Якщо $ab : p$, де $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}, p$ — просте число, то або $a : p$, або $b : p$.*

Доведення. Якщо $a : p$, то теорему доведено. Якщо число a не кратне числу p , то за теоремою 12.3 маємо, що НСД ($a; p$) = 1. Тоді за теоремою 10.7 $b : p$. ▲

Наслідок. *Якщо добуток $a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ натуральних чисел ділиться націло на просте число p , то хоча б один із множників $a_1, a_2, \dots, a_n$ ділиться націло на p .*

Доведіть цю теорему самостійно.

Інтуїтивно зрозуміло, що будь-яке складене число можна подати у вигляді добутку простих чисел (розкласти на прості множники). Цей факт підкреслює особливу роль простих чисел як елементів, з яких будується будь-яке натуральне число.

Тому теорему, яка обґрунтовує існування такого розкладу, називають **основною теоремою арифметики**. Першим довів її К. Ф. Гаусс.

Теорема 12.5 (основна теорема арифметики). *Будь-яке натуральне число, відмінне від 1, або є простим, або може бути подано у вигляді добутку простих чисел. Два розклади натурального числа на прості множники можуть відрізнятися один від одного лише порядком слідування множників.*

Доведення. Розглянемо складене число n . Його можна подати у вигляді добутку натуральних чисел, відмінних від одиниці. Існує таке натуральне число k , що $2^k \geq n$. Тоді кількість множників, на які розкладено число n , є не більшою за k . Справді, кожний із цих множників не менший від 2. Якби їхня кількість була більшою за k , то їхній добуток був би більшим за 2^k , що суперечить нерівності $2^k \geq n$.

Оскільки кількість множників у розкладі числа n є не більшою за k , то розглянемо той із розкладів, який містить найбільшу кількість множників. Це і є розклад числа n на прості множники. Справді, якщо якийсь із множників є складеним, то, розклавши його на множники, отримаємо «довший» розклад числа n на множники.

Доведемо, що такий розклад єдиний. Нехай число n можна подати у вигляді добутку простих чисел двома способами, тобто $n = p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m$ і $n = q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_t$, де $m \geq 2$, $t \geq 2$.

Маємо: $p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_t$.

Ліва частина цієї рівності ділиться націло на p_1 . Тоді й права частина ділиться націло на p_1 . За наслідком з теореми 12.4 один із множників правої частини ділиться націло на p_1 . Оскільки всі множники правої частини рівності є простими числами, то за теоремою 12.2 один із них дорівнює p_1 . Нехай, наприклад, це число q_1 . Поділивши обидві частини рівності на p_1 , отримаємо:

$$p_2 p_3 \cdot \dots \cdot p_m = q_2 q_3 \cdot \dots \cdot q_t.$$

Міркуючи аналогічно, можна отримати рівність $p_3 p_4 \cdot \dots \cdot p_m = q_3 q_4 \cdot \dots \cdot q_t$ і т. д. Зрозуміло, що врешті-решт прийдемо до рівності $1 = 1$.

Таким чином, зазначені множники розбиваються на пари рівних простих чисел, а це доводить, що розклад натурального числа на прості множники — єдиний. ▲

Якщо в розкладі натурального числа деякі прості множники повторюються, то їхній добуток записують у вигляді степеня.

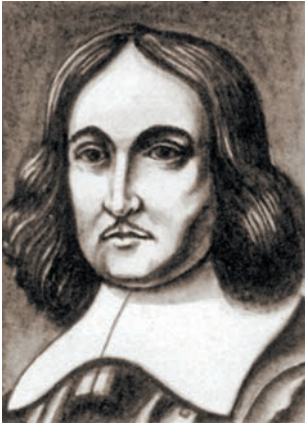
Наприклад, $2940 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Узагалі, розклад числа на прості множники можна записати у вигляді:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — натуральні числа, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — попарно різні прості числа.

Такий запис називають **канонічним розкладом натурального числа**.



П'єр Ферма

(1601–1665)

Французький математик, за фахом юрист. Є одним із фундаторів теорії чисел. Автор низки видатних праць з різних галузей математики, які справили значний вплив на подальший розвиток математики.

Розглянемо ще одну важливу властивість простих чисел.

Теорема 12.6 (мала теорема Ферма). *Якщо натуральне число a не ділиться націло на просте число p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Доведення. Розглянемо $p - 1$ число: $a, 2a, 3a, \dots, (p - 1)a$. Очевидно, що кожне із цих чисел не ділиться націло на p . Нехай $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ — їхні остачі при діленні на p відповідно. Доведемо, що жодні два з розглядуваних чисел не дають однакових остач при діленні на p .

Припустимо, що такі два числа знайдуться. Позначимо їх ma і na , де $1 \leq m \leq p-1$, $1 \leq n \leq p-1$, $m > n$. Тоді $(ma - na) : p$, тобто $(m - n)a : p$. Проте НСД $(a; p) = 1$. Тоді $(m - n) : p$, що неможливо, адже $0 < m - n < p$.

Оскільки при діленні на число p існує $p - 1$ ненульова остача, а числа $a, 2a, 3a, (p - 1)a$ дають різні остачі при діленні на p , то отримуємо:

$$\{r_1, r_2, \dots, r_{p-1}\} = \{1, 2, \dots, p - 1\}. \quad (*)$$

Маємо: $a \equiv r_1 \pmod{p}$,

$$2a \equiv r_2 \pmod{p},$$

$\dots$

$$(p - 1)a \equiv r_{p-1} \pmod{p}.$$

Звідси $a \cdot 2a \cdot 3a \cdot \dots \cdot (p - 1)a \equiv r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_{p-1} \pmod{p}$. Ураховуючи рівність (*), можна записати:

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p - 1) a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p - 1) \pmod{p};$$

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}. \quad \blacktriangle$$

Наслідок. Для будь-якого натурального числа a і простого числа p маємо: $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача. Відомо, що всі дільники числа n , відмінні від 1, більші, ніж $\sqrt{n}$. Доведіть, що число n просте.

Розв'язання. Нехай число n складене. Тоді $n = k_1 \cdot k_2$, де $k_1 > 1$ і $k_2 > 1$. За умовою $k_1 > \sqrt{n}$ і $k_2 > \sqrt{n}$. Звідси $k_1 \cdot k_2 > n$. Отримали суперечність. ▲

Доведена властивість дає змогу скоротити технічну роботу під час визначення того, чи є дане число n простим: досить обмежитися перевіркою подільності числа n на прості числа, які не перевищують $\sqrt{n}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі такі натуральні числа n , що числа $n + 1$, $n + 11$, $n + 27$ є простими.

Розв'язання. Оскільки різниця жодних із двох даних чисел не ділиться націло на 3, то всі вони дають різні остачі при діленні на 3. Отже, одне із цих чисел кратне 3, а оскільки воно є простим, то саме воно дорівнює 3. Зрозуміло, що це може бути тільки число $n + 1$. Звідси $n = 2$. Тоді $n + 11 = 13$, $n + 27 = 29$. ▲

ПРИКЛАД 2 Натуральне число n таке, що $2n = p_1 + p_2$, де p_1 і p_2 — послідовні прості числа, більші за 2. Доведіть, що число n складене.

Розв'язання. Нехай $p_1 < p_2$. Тоді $p_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} < p_2$, тобто $p_1 < n < p_2$. Оскільки p_1 і p_2 — послідовні прості числа, то число n — складене. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть у простих числах рівняння $x^y + 1 = z$.

Розв'язання. Якщо $x \neq 2$, то x — непарне число, і ліва частина рівняння більша за 2 та є парним числом. У цьому випадку число z простим бути не може.

Отже, $x = 2$. Маємо: $2^y + 1 = z$. Якщо y — непарне число, то число $2^y + 1$ можна розкласти на множники, кожний з яких більший за 1. Знов-таки у цьому випадку число z простим числом бути не може. Звідси y — парне просте число, тобто $y = 2$. Тоді $z = 2^2 + 1 = 5$.

Відповідь: $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть остачу при діленні числа 3^{102} на 101.

Розв'язання. Оскільки 101 — просте число, то за малою теоремою Ферма

$$3^{100} \equiv 1 \pmod{101}.$$

Звідси

$$3^{102} \equiv 9 \pmod{101}.$$

Відповідь: 9. ▲

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли натуральне число n не ділиться націло на 17, то або $(n^8 - 1) : 17$, або $(n^8 + 1) : 17$.

Розв'язання. За малою теоремою Ферма

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Звідси

$$(n^{16} - 1) : 17, \\ (n^8 - 1)(n^8 + 1) : 17.$$

Оскільки 17 є простим числом, то твердження задачі випливає з теореми 12.4. ▲



1. Яке число називають простим?
2. Яке число називають складеним?
3. Скінченною чи нескінченною є множина простих чисел?
4. Сформулюйте основну теорему арифметики.
5. Що називають канонічним розкладом натурального числа?
6. Сформулюйте малу теорему Ферма.

ВПРАВИ

- 12.1.°** Чи може добуток двох натуральних чисел бути простим числом?
- 12.2.°** Чи може сума двох простих чисел бути простим числом?
- 12.3.°** Чи може різниця двох простих чисел бути простим числом?
- 12.4.°** Знайдіть усі натуральні значення n , при яких числа n і $n + 1$ є простими.
- 12.5.°** Знайдіть усі натуральні значення n , при яких числа n і $n + 3$ є простими.
- 12.6.°** Відомо, що числа¹ a і b такі, що $ab : q$. Чи є правильним твердження, що $a : q$ або $b : q$, якщо: 1) $q = 13$; 2) $q = 21$?

¹ Тут і далі буквами позначено натуральні числа. Випадки, коли буквою позначено ціле число, будуть обумовлені окремо.

12.7.° Відомо, що числа m і n такі, що $mn \vdots p$. Чи є правильним твердження, що $m \vdots p$ або $n \vdots p$, якщо: 1) $p = 29$; 2) $p = 39$?

12.8.° Доведіть, що остача при діленні простого числа на 30 дорівнює 1 або простому числу.

 **12.9.°** Доведіть, що кожне просте число p ($p > 3$) можна записати у вигляді $6k + 1$ або $6k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

12.10.° Знайдіть усі натуральні n , при яких значення виразу $n^2 + n$ є простим числом.

12.11.° Знайдіть усі натуральні n , при яких значення виразу $n^2 - 1$ є простим числом.

12.12.° Знайдіть усі натуральні n , при яких є простим числом значення виразу:

$$1) n^3 - 1; \quad 2) 4n^2 + 5n - 21; \quad 3) 3^n - 1.$$

12.13.° Знайдіть усі натуральні n , при яких є простим числом значення виразу:

$$1) n^3 + 1; \quad 2) 3n^2 + 4n - 15; \quad 3) 8^n - 1.$$

12.14.° Доведіть, що коли p — просте число й $p > 3$, то $(p^2 - 1) \vdots 24$.

12.15.° Прості числа p і q такі, що $p > 3$, $q > 3$. Доведіть, що $(p^2 - q^2) \vdots 24$.

12.16.° Знайдіть усі прості числа p такі, що числа $p + 26$ і $p + 28$ також є простими.

12.17.° Знайдіть усі прості числа p такі, що числа $2p + 1$ і $4p + 1$ також є простими.

12.18.° Числа a і b такі, що $56a = 65b$. Доведіть, що число $a + b$ є складеним.

12.19.° Числа m і n такі, що $37m = 55n$. Доведіть, що число $m - n$ є складеним.

12.20.° Цілі числа a і b такі, що значення виразу $a^2 + 9ab + b^2$ кратне 11. Доведіть, що значення виразу $a - b$ кратне 11.

12.21.° Цілі числа m і n такі, що значення виразу $m^2 - 15mn + n^2$ кратне 17. Доведіть, що значення виразу $m + n$ кратне 17.

12.22.° Числа p і $8p^2 + 1$ є простими. Знайдіть p .

12.23.° Числа p і $p^{p+1} + 2$ є простими. Знайдіть p .

12.24.° Числа p і $p^2 + 2$ є простими. Доведіть, що число $p^3 + 2$ теж просте.

12.25.° Доведіть, що число $\underbrace{800 \dots 027}_{10 \text{ нулів}}$ є складеним.

12.26.° Доведіть, що число 999 999 973 є складеним.

- 12.27."** Знайдіть усі прості числа p і q , які задовольняють рівняння $p^2 - 2q^2 = 1$.
- 12.28."** Знайдіть усі прості числа p і q , які задовольняють рівняння $q - p^2 = 2$.
- 12.29."** Знайдіть усі прості числа p такі, що число $4p + 1$ є квадратом натурального числа.
- 12.30."** Натуральне число n таке, що числа $2n - 1$ і $n + 12$ діляться націло на просте число p . Знайдіть p .
- 12.31."** Натуральне число n таке, що числа $5n - 1$ і $n - 10$ діляться націло на просте число p . Знайдіть p .
- 12.32."** Знайдіть усі значення n , при яких кожне із чисел $2^n - 1$ і $2^n + 1$ є простим.
- 12.33."** Знайдіть усі натуральні n , при яких значення виразу $n^4 + 4$ є простим числом.
- 12.34."** Знайдіть усі натуральні m , при яких значення виразу $m^4 + m^2 + 1$ є простим числом.
- 12.35."** Натуральні числа m, n, k такі, що числа $p = m + n, q = n + k$ і $r = m + k$ є простими. Доведіть, що одне із чисел p, q, r дорівнює 2.
- 12.36."** Знайдіть усі прості числа, які можна подати як у вигляді суми, так і у вигляді різниці двох простих чисел.
- 12.37."** Натуральні числа a, b, c такі, що $(a + b + c) : 13$. Доведіть, що число $a^{13} + b^{13} + c^{13}$ також кратне 13.
- 12.38."** Використовуючи малу теорему Ферма, знайдіть остачу при діленні числа a на число b , якщо:
1) $a = 5^{52}, b = 53;$ 2) $a = 2^{47}, b = 41$.
- 12.39."** Доведіть, що число $24^{24} - 1$ кратне 35.
- 12.40."** Натуральне число a не ділиться націло на 29. Доведіть, що одне із чисел $a^{14} - 1$ або $a^{14} + 1$ ділиться націло на 29.
- 12.41.*** Знайдіть усі прості числа p такі, що число $p^2 + 11$ має 6 різних натуральних дільників.
- 12.42.*** Розкладіть число $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320$ на прості множники.
- 12.43.*** Доведіть, що значення виразу $42^{47} + 47^{42}$ є складеним числом.
- 12.44.*** Доведіть, що $p^q + q^p \equiv (p + q) \pmod{pq}$, де p і q — різні прості числа.

Про проблеми, пов'язані з простими числами

На уроках інформатики ви можете створити комп'ютерні програми, які дають змогу скласти таблицю, що містить набагато більше простих чисел, ніж та, що розміщена на форзаці підручника.

Таблиці простих чисел складали ще стародавні вчені. Розв'язання такої задачі без сучасної обчислювальної техніки — праця нелегка. Тому пошук простих чисел був нерозривно пов'язаний зі спробами винайти зручну формулу, користуючись якою можна було б знаходити прості числа.

Багато видатних математиків доклали чимало зусиль, щоб знайти «формулу простих чисел». Часто їм здавалося, що мети досягнуто, проте згодом виявлялося, що знайдені формули неправильні.

Так, П'єр Ферма висловив припущення, що всі числа виду

$$F(n) = 2^{2^n} + 1 \quad (1)$$

при цілому невід'ємному n є простими. Справді, $F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65\,537$ — прості числа. Проте в 1732 р. видатний математик Л. Ейлер установив, що число $F(5)$ складене:

$$F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Отже, серед чисел, отриманих за допомогою формули (1), є як прості, так і складені. Проте досі залишається невідомим, скінченною чи нескінченною є множина простих чисел Ферма (так називають прості числа, отримані за допомогою формули (1)).

Із числами Ферма пов'язана ще одна знаменита проблема. Ще вчені Стародавньої Греції помітили, що деякі правильні n -кутники ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$) побудувати за допомогою циркуля та лінійки досить просто, а при деяких інших значеннях n ($n = 7, 9, 11, 13$) це не вдається.

Наприкінці XVIII ст. Карл Фрідріх Гаусс довів, що за допомогою циркуля та лінійки можна побудувати правильний n -кутник тоді й тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \dots \cdot p_s$,



Леонард Ейлер

(1707–1783)

Математик, механік і фізик, член Петербурзької і Берлінської академії наук, автор більш ніж 850 наукових праць, понад 100 з яких стосуються теорії чисел.

де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \dots, p_s$ — різні прості числа Ферма.

У XVIII ст. Леонард Ейлер довів, що не існує многочлена $F(x)$ із цілими коефіцієнтами, значення якого при всіх натуральних значеннях x були б простими числами.

Разом з тим Ейлер указав на такі многочлени:

$$h(n) = n^2 - n + 17;$$

$$f(n) = n^2 - n + 41;$$

$$g(n) = n^2 - 79n + 1601.$$

Цікаво, що значення многочлена $h(n)$ при $n = 0, 1, 2, \dots, 16$ є простими числами. Але $h(17)$ є складеним числом.

Значеннями многочленів $f(n)$ і $g(n)$ є прості числа при $n = 0, 1, 2, \dots, 40$ і $n = 0, 1, 2, \dots, 79$ відповідно.

На жаль, математики досі не знайшли зручної формули, яка давала б змогу отримувати всі прості числа одне за одним.

З проблемою пошуку формули простих чисел нерозривно пов'язана задача знаходження закономірності розподілу простих чисел у натуральному ряді.

Видатний радянський математик, автор цілої низки фундаментальних відкриттів у галузі теорії чисел Ю. В. Матіясевиц писав: «Прості числа розкидані в натуральному ряді дуже примхливим чином».

Справді, досить навіть побіжного погляду на таблицю простих чисел, щоби побачити нерівномірний розподіл їх серед натуральних чисел.

Як визначити проміжки натурального ряду, які містять щонайменше одне просте число? Як визначити кількість простих чисел на заданому проміжку натурального ряду? Зокрема, скільки існує простих чисел, які не перевищують заданого натурального числа n ?

Відповіді на ці запитання є ключем до розв'язання проблеми розподілу простих чисел.

Указати проміжок натурального ряду, який містить щонайменше одне просте число, досить просто. Покажемо, наприклад, що будь-якому проміжку $[n; n! + 1]$, $n \in \mathbb{N}$, належить просте число.

Якщо число $n! + 1$ просте, то твердження очевидне.

Нехай $n! + 1$ є складеним числом і k — його простий дільник. Оскільки жодне із чисел $2, 3, \dots, n$ не є дільником числа $n! + 1$, то $n < k < n! + 1$.

З доведеного твердження випливає, що числа $2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, \dots$ розбивають натуральний ряд на проміжки, кожний з яких містить щонайменше одне просте число. Цей факт можна розглядати як ще одне доведення нескінченності множини простих чисел.

Оскільки жодне із чисел $2, 3, \dots, p-1$ не є дільником числа $(p-1)! + 1$, то якщо $((p-1)! + 1) : p, p > 1$, то p — просте число. Цей факт є частиною відомої теореми Вільсона (критерію перевірки того, чи є задане натуральне число простим).

Для того щоб натуральне число $n > 1$ було простим, необхідно і достатньо, щоб число $(n-1)! + 1$ ділилося націло на n .

Достатню умову ми фактично довели. Необхідну умову ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Зрозуміло, що зі зростанням n довжина відрізка $[n; n! + 1]$ швидко збільшується. Тому було б природним шукати відрізок якомога меншої довжини, який так само містить просте число.

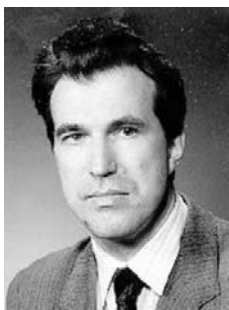
Досліджуючи таблиці простих чисел, французький математик Жозеф Луї Франсуа Бертран висунув припущення, що при $n \geq 3$ між числами n і $2n-2$ міститься хоча б одне просте число. Довести цю гіпотезу він не зміг і користувався нею як постулатом — твердженням, що приймається без доведення. Першим довів постулат Бертрана видатний російський математик П. Л. Чебишев.

Позначимо через $\pi(n)$ кількість простих чисел, які не більші за число n . Для маленьких n легко встановити, що, наприклад, $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(3) = 2, \pi(4) = 2, \pi(10) = 4, \pi(100) = 25$.

Складний розподіл простих чисел не дає змоги знайти просту формулу для знаходження $\pi(n)$. Тому математики зосередили свої зусилля на пошуку наближеної формули.

Відношення $\frac{\pi(n)}{n}$ називають густиною розподілу простих чисел.

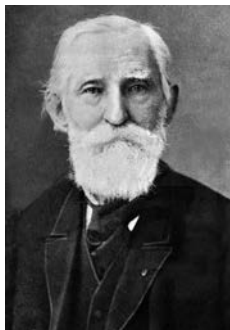
З таблиці видно, що густина зі збільшенням n стає дедалі меншою.



Юрій Володимирович
Матіясевич
(р. н. 1947)



Жозеф Луї Франсуа
Бертран
(1822–1900)



Пафнутій Львович Чебишев
(1821–1894)

Російський математик і механік, засновник петербурзької математичної школи, автор понад 70 наукових праць з теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії функцій та інших галузей математики, фундатор теорії машин і механізмів.

n	$\pi(n)$	$\frac{\pi(n)}{n}$
10	4	0,4
100	25	0,25
1000	168	0,17
10 000	1229	0,12
100 000	9592	0,096
1 000 000	78 498	0,078
10 000 000	664 579	0,066
100 000 000	5 761 455	0,058
1 000 000 000	50 847 478	0,051

Л. Ейлер довів, що зі збільшенням n густина $\frac{\pi(n)}{n}$ прямує до нуля.

П. Л. Чебишеву вдалося знайти точнішу оцінку величини $\frac{\pi(n)}{n}$.

Розглянемо ще одну проблему, пов'язану з простими числами. Стародавні математики приділяли особливу увагу двом числам: 6 і 28. Їх приваблювала дивовижна властивість цих чисел:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 2 + 3, \\ 28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14, \end{aligned}$$

тобто кожне з них дорівнює сумі своїх дільників, відмінних від самого числа. Такі числа називають **досконалими**.

Ще Евклід довів, що будь-яке натуральне число, яке можна подати у вигляді $2^{n-1}(2^n - 1)$, де $2^n - 1$ — просте число, є досконалим.

Переконаємося в цьому й ми. Позначимо $2^n - 1 = p$ і запишемо суму всіх дільників розглядуваного числа.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \dots + 2^{n-1}p &= \\
 &= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = \\
 &= (1 + p)(2 - 1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1) = \\
 &= (1 + p)(2^n - 1) = 2^n(2^n - 1).
 \end{aligned}$$

До записаної суми входить саме число $2^{n-1}(2^n - 1)$. Тоді сума дільників, відмінних від самого числа, дорівнює $2^n(2^n - 1) - 2^{n-1}(2^n - 1) = (2^n - 1)(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1}(2^n - 1)$.

Підставивши у вираз $2^{n-1}(2^n - 1)$ числа $n = 2$ і $n = 3$, отримуємо вже відомі досконалі числа 6 і 28.

Завдяки доведеній властивості Евклід знайшов ще два досконалих числа. При $n = 5$ маємо: $2^5 - 1 = 31$ — просте число, при $n = 7$ маємо $2^7 - 1 = 127$ — просте число. Значення виразів $2^{5-1}(2^5 - 1)$ і $2^{7-1}(2^7 - 1)$ відповідно дорівнюють 496 і 8128. За доведеною вище властивістю ці числа є досконалими.

Майже півтора тисячоліття людям були відомі тільки чотири досконалих числа 6, 28, 496 і 8128. Пошук нових досконалих чисел був нерозривно пов'язаний з пошуком простих чисел виду $2^n - 1$. Прості числа такого виду називають **простими числами Мерсенна** на честь Марена Мерсенна (1588–1648), французького математика, фізика й музиканта, який у 1648 р., не наводячи доведень, проголосив, що при $n = 17, 19, 31, 67, 127, 257$ число $2^n - 1$ є простим.

Л. Ейлер установив, що числа $2^{17} - 1$, $2^{19} - 1$, $2^{31} - 1$ є простими. Пізніше з'ясувалося, що число $2^{127} - 1$ також є простим, а ось числа $2^{67} - 1$ і $2^{257} - 1$ є складеними, причому лише в 1932 р. було отримано висновок про число $2^{257} - 1$.

Л. Ейлер довів, що всі парні досконалі числа мають вигляд, указаний Евклідом. Досі не знайдено жодного непарного досконалого числа. Також залишається відкритим питання, скінченною чи нескінченною є множина простих чисел Мерсенна, а отже, невідомо, скінченною чи нескінченною є множина парних досконалих чисел.

Пошук нових досконалих чисел потребує великого обсягу обчислень. І тут, звісно, незамінну допомогу надає сучасна обчислювальна техніка. За даними на січень 2016 р. відомо 49 простих чисел Мерсенна, а отже, 49 парних досконалих чисел. Також за допомогою сучасних комп'ютерів установлено: якщо існує непарне досконале число, то воно більше за 10^{300} .

У світі простих чисел є багато й інших нерозв'язаних задач. Наприклад, у таблиці простих чисел (див. форзац) червоним кольором виділено прості числа, які відрізняються на 2. Це, зокрема, 3 і 5, 5 і 7, 419 і 421. Такі пари чисел називають **числами-близнюками**. Скінченною чи нескінченною є множина пар чисел-близнюків, поки що невідомо.

§ 4

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

13. Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ і $a^n + b^n$

Вам добре знайомі такі дві формули:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad (1)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \quad (2)$$

Розкладемо на множники двочлен $a^4 - b^4$. Маємо:

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = \\ &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \end{aligned}$$

Отже,

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \quad (3)$$

У структурі формул (1) – (3) можна помітити певну закономірність: якщо степені одночленів у лівій частині формули дорівнюють n , то права частина — добуток двочлена $a - b$ на многочлен, що складається з усіх одночленів степеня $n - 1$, коефіцієнти яких дорівнюють одиниці.

Можна припустити, що формула розкладання двочлена $a^5 - b^5$ має такий вигляд:

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

Щоб довести цю тотожність, достатньо перемножити многочлени, які записано в правій частині:

$$\begin{aligned} &(a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) = \\ &= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 - \\ &\quad - a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4 - b^5 = \\ &= a^5 - b^5. \end{aligned}$$

Розглянуті приклади підказують, що формула для розкладання на множники різниці n -х степенів має такий вигляд:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (4)$$

Переконаємось у справедливості цієї тотожності, перемноживши многочлени, які записані в правій частині:

$$\begin{aligned}(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) &= \\= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + ab^{n-1} - & \\- a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \dots - ab^{n-1} - b^n &= \\= a^n - b^n.\end{aligned}$$

Якщо у формулі (2) замінити b на $-b$, то отримаємо відому формулу для розкладання на множники суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Скористаємось цією ідеєю для розкладання на множники двочлена $a^n + b^n$, де n — непарне натуральне число. Маємо:

$$\begin{aligned}a^n + b^n &= a^n - (-b)^n = \\= (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + a^{n-3}(-b)^2 + \dots + a(-b)^{n-2} + (-b)^{n-1}) &= \\= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).\end{aligned}$$

Отже, якщо n — непарне натуральне число, то справедлива така формула:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n}$ кратне 31.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned}3^{2n} \cdot 7^n - 2^{5n} &= (3^2)^n \cdot 7^n - (2^5)^n = 9^n \cdot 7^n - 32^n = \\= 63^n - 32^n &= (63-32)(63^{n-1} + 63^{n-2} \cdot 32 + \dots + 63 \cdot 32^{n-2} + 32^{n-1}).\end{aligned}$$

Перший множник отриманого добутку дорівнює 31, а другий набуває натуральних значень. Отже, значення даного виразу кратне 31. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$(1+x+\dots+x^7)(1+x+\dots+x^5) = (1+x+\dots+x^6)^2.$$

Розв'язання. Перевіркою встановлюємо, що число 1 не є коренем даного рівняння. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $(1-x)^2$:

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\dots+x^7)(1-x)(1+x+\dots+x^5) &= \\= ((1-x)(1+x+\dots+x^6))^2; & \\(1-x^8)(1-x^6) &= (1-x^7)^2; \\1-x^6-x^8+x^{14} &= 1-2x^7+x^{14}; \\x^8-2x^7+x^6 &= 0; \\x^6(x-1)^2 &= 0; \\x &= 0 \text{ або } x = 1.\end{aligned}$$

На початку розв'язання було встановлено, що число 1 не є коренем даного рівняння.

Відповідь: 0. ▲



1. Запишіть формулу для розкладання на множники різниці n -х степенів двох виразів.
2. Запишіть формулу для розкладання на множники суми непарних n -х степенів двох виразів.

ВПРАВИ

13.1.° Розкладіть на множники:

- 1) $a^7 - b^7$; 3) $x^9 - 1$; 5) $y^5 - 32$; 7) $x^7 y^{14} + 1$;
- 2) $a^7 + b^7$; 4) $x^5 + 1$; 6) $m^{10} + n^5$; 8) $a^5 b^{10} + c^{15}$.

13.2.° Розкладіть на множники:

- 1) $a^5 + b^5$; 2) $a^{11} - 1$; 3) $y^7 - 128$; 4) $m^7 n^{14} k^{21} + 1$.

13.3.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

- 1) $7^n - 1$ кратне 6; 3) $16^n - 11^n$ кратне 5.
- 2) $19^{2n+1} + 1$ кратне 20;

13.4.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

- 1) $17^n - 1$ кратне 16; 3) $13^{2n+1} + 1$ кратне 14.
- 2) $23^{2n+1} + 1$ кратне 24;

13.5.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

- 1) $15^n + 13$ кратне 7; 3) $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n}$ кратне 9;
- 2) $9^n + 5^n - 2$ кратне 4; 4) $21^n + 4^{n+2}$ кратне 17.

13.6.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

- 1) $27^n + 12$ кратне 13; 3) $8^n + 15^n - 2$ кратне 7;
- 2) $17^n + 15$ кратне 16; 4) $3 \cdot 9^n + 7 \cdot 7^{2n}$ кратне 10.

13.7.° Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

- 1) $2^{2n} \cdot 5^n - 3^{2n}$ кратне 11; 2) $7^n \cdot 3^{3n} - 2^{2n}$ кратне 37.

13.8.° Доведіть, що число є складеним:

- 1) $2^{1234} + 1$; 2) $\underbrace{1000 \dots 01}_{16 \text{ нулів}}$.

13.9.° Доведіть тотожність:

- 1) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
- 2) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5 = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)$.

13.10.° Спростіть вираз:

- 1) $3^{99} + 3^{98} \cdot 2 + 3^{97} \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{98} + 2^{99} + 2^{100}$;
- 2) $4^{20} - 4^{19} \cdot 3 + 4^{18} \cdot 3^2 - \dots - 4 \cdot 3^{19} + 3^{20}$.

13.11." Відомо, що n і a — натуральні числа ($n > 1$), а значення виразу $a^n - 1$ є простим числом. Знайдіть a .

13.12." Відомо, що значення виразу $2^n + 1$ є простим числом, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що або $n = 1$, або n — степінь числа 2.

13.13." Розв'яжіть рівняння:

$$1) (1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = (1 + x + x^2 + x^3)^2;$$

$$2) (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \dots + x^7) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^2.$$

13.14." Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

$$1) 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \text{ ділиться націло на } 19;$$

$$2) 7^{n+2} + 8^{2n+1} \text{ ділиться націло на } 57;$$

$$3) 13^{n+2} + 14^{2n+1} \text{ ділиться націло на } 183;$$

$$4) 3^{2n+2} + 2^{6n+1} \text{ ділиться націло на } 11.$$

14. Раціональні дроби

У курсі алгебри 7 класу було розглянуто цілі вирази, тобто вирази, що складені із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число.

Ось приклади цілих виразів:

$$x - y, \frac{a+b}{5}, t^2 + 2t + n^2, \frac{1}{3}x - 4, x^n - y^n, \frac{c}{4} + \frac{d}{7}, x : 5, y, 7.$$

У курсі алгебри 8 класу ми розглянемо **дробові вирази**.

Дробові вирази відрізняються від цілих тим, що вони *містять ділення на вираз зі змінними*.

Наведемо приклади дробових виразів:

$$2x + \frac{a}{b}, (x - y) : (x + y), \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, \frac{5}{x}.$$

Об'єднанням множин цілих і дробових виразів є множина **раціональних виразів**.

Якщо в раціональному виразі замінити змінні числами, то отримаємо числовий вираз. Проте ця заміна можлива лише тоді, коли вона не приводить до ділення на нуль.

Наприклад, вираз $2 + \frac{a+2}{a-1}$ при $a = 1$ не має змісту, тобто числового значення цього виразу при $a = 1$ не існує. При всіх інших значеннях a цей вираз має зміст.

Означення. Областю визначення виразу з однією змінною називають множину значень змінної, при яких цей вираз має зміст. Елементи цієї множини називають **допустимими значеннями змінної**.

Наприклад, областю визначення виразу $2 + \frac{a+2}{a-1}$ є множина $\{a \mid a \neq 1\}$.

Підмножиною множини раціональних виразів є множина **раціональних дробів**. Це дробі, чисельниками та знаменниками яких є многочлени¹. Так, раціональні вирази

$$\frac{x}{7}, \frac{x^2 - 2xy}{x+y}, \frac{12}{a}, \frac{a+b}{5}$$

є прикладами раціональних дробів.

Зазначимо, що раціональний дріб може бути як цілим виразом, так і дробовим.

Знаменник раціонального дробу не може бути нульовим многочленом, тобто многочленом, який тотожно дорівнює нулю.

Рисунок 14.1 ілюструє зв'язок між поняттями, що розглядаються в цьому пункті.



Рис. 14.1

ПРИКЛАД Знайдіть область визначення виразу $\frac{1}{x} + \frac{3}{x-5}$.

¹ Нагадаємо, що числа й одночлени вважають окремими випадками многочленів (див. п. 4 на с. 348).

Розв'язання. Дріб $\frac{1}{x}$ має зміст при всіх значеннях x , крім $x = 0$, а дріб $\frac{3}{x-5}$ має зміст при всіх значеннях x , крім $x = 5$.

Отже, областю визначення виразу є множина $\{x \mid x \neq 0 \text{ і } x \neq 5\}$. ▲



1. Чим відрізняються дробові вирази від цілих?
2. Що називають областю визначення виразу?
3. Опишіть, що являє собою множина раціональних дробів.
4. Яка множина є об'єднанням множин цілих і дробових виразів?
5. Який многочлен не може бути знаменником раціонального дробу?

ВПРАВИ

14.1.° Які з виразів $\frac{3a^2}{4b^3}$, $\frac{5x^2}{4} + \frac{x}{7}$, $\frac{8}{6n+1}$, $3a - \frac{b^2}{c^4}$, $\frac{t^2 - 6t + 15}{2t}$, $\frac{x-2}{x+2}$, $\frac{1}{6}m^3n^5$, $(y-4)^3 + \frac{1}{y}$, $\frac{m^2 - 3mn}{18}$ є:

- 1) цілими виразами; 2) дробовими виразами; 3) раціональними дробами?

14.2.° Чому дорівнює значення дробу $\frac{c^2 - 4c}{2c + 1}$, якщо:

- 1) $c = -3$; 2) $c = 0$?

14.3.° Знайдіть значення виразу $\frac{2m-n}{3m+2n}$, якщо:

- 1) $m = -1$, $n = 1$; 2) $m = 4$, $n = -5$.

14.4.° Чому дорівнює значення виразу:

- 1) $\frac{a^2 - 1}{a - 5}$ при $a = -4$; 2) $\frac{x+3}{y} - \frac{y}{x+2}$ при $x = -5$, $y = 6$?

14.5.° Знайдіть область визначення виразу:

- | | | |
|------------------------|---------------------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{x-5}{9}$; | 4) $\frac{5}{x^2-4}$; | 7) $\frac{x+4}{x(x-6)}$; |
| 2) $\frac{9}{x-5}$; | 5) $\frac{5}{ x -4}$; | 8) $\frac{x}{ x +1}$; |
| 3) $\frac{1}{x^2+4}$; | 6) $\frac{2}{x-2} + \frac{3x}{x+1}$; | 9) $\frac{7}{x^3-25x}$. |

14.6.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{9}{y}$;

3) $\frac{m-1}{m^2-9}$;

5) $\frac{4}{x-8} + \frac{1}{x-1}$;

2) $\frac{x+7}{x+9}$;

4) $\frac{x}{|x|-3}$;

6) $\frac{2x-3}{(x+2)(x-10)}$.

14.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{4 - \frac{4}{x}}$;

3) $y = \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$;

5) $y = \frac{2}{|x| + x}$;

2) $y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$;

4) $y = \frac{9}{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2}}$;

6) $y = \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x}}$.

14.8.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x}{x - \frac{9}{x}}$;

3) $\frac{x+2}{|x|-x} + \frac{1}{x+1}$;

2) $\frac{10}{2 + \frac{6}{x}}$;

4) $\frac{1}{x^2 - \frac{1}{x}}$?

14.9.° Запишіть раціональний дріб, областю визначення якого є множина:

1) $\{x \mid x \neq 7\}$;

3) $\{a \mid a \neq 2 \text{ і } a \neq -2\}$;

2) $\{y \mid y \neq -1\}$;

4) усіх чисел.

14.10.° Запишіть раціональний дріб, областю визначення якого є множина:

1) $\{x \mid x \neq 5\}$;

3) $\{x \mid x \neq 3, x \neq -3 \text{ і } x \neq 6\}$;

2) $\{x \mid x \neq -2 \text{ і } x \neq 0\}$;

4) усіх чисел.

14.11.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{x^2+1}{6x-9-x^2}$ від'ємне;

3) $\frac{1}{2x-x^2-2}$ від'ємне;

2) $\frac{2}{x^2+2x+2}$ додатне;

4) $\frac{x^2+6x+9}{x^2+x+1}$ невід'ємне.

14.12.° Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення дробу:

1) $\frac{-x^2}{x^2+5}$ недодатне;

3) $\frac{x^4+4x^2+4}{x^2-14x+49}$ додатне;

2) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-2x+1}$ невід'ємне;

4) $\frac{1}{x-|x|}$ від'ємне.

14.13.* Відомо, що $5x - 15y = 1$. Знайдіть значення виразу:

1) $x - 3y$;

3) $\frac{18y - 6x}{9}$;

2) $\frac{8}{2x - 6y}$;

4) $\frac{1}{x^2 - 6xy + 9y^2}$.

14.14.* Відомо, що $4a + 8b = 10$. Знайдіть значення виразу:

1) $2b + a$;

2) $\frac{5}{a + 2b}$;

3) $\frac{a^2 + 4ab + 4b^2}{2a + 4b}$.

15. Основна властивість раціонального дробу

Рівність $3a - 1 + 2a + 5 = 5a + 4$ є тотожністю, оскільки вона виконується при будь-яких значеннях a .

Рівність $\frac{3a - 1 + 2a + 5}{a + 1} = \frac{5a + 4}{a + 1}$ також природно вважати тотожністю. Але вона виконується не при будь-яких значеннях a . При $a = -1$ раціональні дроби, які входять у дану рівність, не мають змісту.

Уточнімо означення тотожно рівних виразів та означення тотожності, які ми дали в курсі алгебри 7 класу.

Означення. Вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в них входять, називають **тотожно рівними**.

Означення. Рівність, яка виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних, що в неї входять, називають **тотожністю**.

Наприклад, рівність $\frac{a - 2}{a - 2} = 1$ є тотожністю, оскільки вона виконується при всіх допустимих значеннях a , тобто при всіх a , крім $a = 2$.

У 7 класі ми розглядали тотожні перетворення цілих виразів. Тепер розглянемо тотожні перетворення дробових виразів.

Як ви знаєте, основна властивість відношення виражається такою рівністю:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

де a , b і m — деякі числа, причому $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Раціональні дробі мають властивість, аналогічну основній властивості відношення:

якщо чисельник і знаменник раціонального дробу помножити на один і той самий ненульовий многочлен, то отримаємо дріб, тотожно рівний даному.

Цю властивість називають **основною властивістю раціонального дробу** й записують:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C},$$

де A , B і C — многочлени, причому многочлени B і C ненульові.

Відповідно до цієї властивості вираз $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можна замінити на тотожно рівний йому дріб $\frac{A}{B}$. Таке тотожне перетворення називають **скороченням дробу** на множник C .

ПРИКЛАД 1 Скоротіть дріб: 1) $\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4}$; 2) $\frac{3x+15y}{3x}$; 3) $\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y}$.

Розв'язання

1) Одночлени $6a^3b^2$ і $24a^2b^4$ мають спільний множник $6a^2b^2$. Тоді можна записати:

$$\frac{6a^3b^2}{24a^2b^4} = \frac{a \cdot \cancel{6a^2b^2}}{4b^2 \cdot \cancel{6a^2b^2}} = \frac{a}{4b^2}.$$

2) Розкладемо чисельник даного дробу на множники:

$$\frac{3x+15y}{3x} = \frac{3(x+5y)}{3x}.$$

Отже, чисельник і знаменник даного дробу мають спільний множник 3, скоротивши на який отримуємо:

$$\frac{3(x+5y)}{3x} = \frac{x+5y}{x}.$$

3) Розклавши попередньо чисельник і знаменник даного дробу на множники та скоротивши на спільний множник $y+2$, отримуємо:

$$\frac{y^2+4y+4}{y^2+2y} = \frac{(y+2)^2}{y(y+2)} = \frac{y+2}{y}. \quad \blacktriangle$$

З основної властивості дробу випливає, що

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \quad \text{і} \quad \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Кожен із дробів $\frac{-A}{B}$ і $\frac{A}{-B}$ можна записати у вигляді виразу $-\frac{A}{B}$, тобто $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$.

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}. \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 3 Зведіть до спільного знаменника дробі:

$$1) \frac{2m}{9a^2b^6} \text{ і } \frac{5n^2}{6a^4b^3}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ і } \frac{1}{a-b}; \quad 3) \frac{4a^2}{a^2-36} \text{ і } \frac{6}{a^2+6a}.$$

Розв'язання. 1) Можна взяти за спільний знаменник даних дробів добуток їхніх знаменників, який дорівнює $54a^6b^9$. Проте зручніше за спільний знаменник узяти одночлен $18a^4b^6$, сконструйований таким чином: його коефіцієнт 18 є найменшим спільним кратним коефіцієнтів 9 і 6 знаменників даних дробів, а кожен зі змінних a і b узятий в степені з найбільшим показником степеня, з яким вона входить у знаменники даних дробів.

Оскільки $18a^4b^6 = 9a^2b^6 \cdot 2a^2$, то додатковим множником до дробу $\frac{2m}{9a^2b^6}$ є одночлен $2a^2$. Ураховуючи, що $18a^4b^6 = 6a^4b^3 \cdot 3a^3$, отримуюмо, що додатковим множником до дробу $\frac{5n^2}{6a^4b^3}$ є одночлен $3b^3$.

Отже, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{2m}{9a^2b^6} &= \frac{2m \cdot 2a^2}{9a^2b^6 \cdot 2a^2} = \frac{4a^2m}{18a^4b^6}; \\ \frac{5n^2}{6a^4b^3} &= \frac{5n^2 \cdot 3b^3}{6a^4b^3 \cdot 3b^3} = \frac{15b^3n^2}{18a^4b^6}. \end{aligned}$$

2) Тут спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} = \frac{a-b}{a^2-b^2}; \\ \frac{1}{a-b} &= \frac{a+b}{(a-b)(a+b)} = \frac{a+b}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

3) Щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, буває корисним попередньо розкласти їхні знаменники на множники:

$$a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6), \quad a^2 + 6a = a(a + 6).$$

Отже, спільним знаменником даних дробів може слугувати вираз $a(a+6)(a-6)$.

Тоді

$$\frac{4a^2}{a^2-36} = \frac{a/4a^2}{(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a(a+6)(a-6)} = \frac{4a^3}{a^3-36a};$$

$$\frac{6}{a^2+6a} = \frac{a^{-6}/6}{a(a+6)} = \frac{6(a-6)}{a(a+6)(a-6)} = \frac{6a-36}{a^3-36a}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 4 Відомо, що $\frac{3a+4b}{2a-b} = 2$. Знайдіть значення дробу $\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b}$.

Розв'язання. Якщо $b = 0$, то $\frac{3a+4b}{2a-b} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$, що суперечить умові. Отже, $b \neq 0$. Тоді поділимо чисельник і знаменник дробу, значення якого ми шукаємо, на b^3 :

$$\frac{a^3-6a^2b-ab^2+12b^3}{18b^3+a^3-6a^2b} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 12}{18 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6\left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

З умови $\frac{3a+4b}{2a-b} = 2$ випливає, що $3a + 4b = 4a - 2b$; $a = 6b$; $\frac{a}{b} = 6$.

Тоді шукане значення дорівнює $\frac{6^3-6 \cdot 6^2-6+12}{18+6^3-6 \cdot 6^2} = \frac{1}{3}$. $\blacktriangle$

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина $D(y) = \{x \mid x \neq 1\}$. Маємо:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1,$$

тобто $y = x + 1$, де $x \neq 1$.

Отже, шуканим графіком є всі точки прямої $y = x + 1$, за винятком однієї точки, абсциса якої дорівнює 1 (рис. 15.1). $\blacktriangle$

ПРИКЛАД 6 Для кожного значення a розв'яжіть рівняння $(a^2-9)x = a+3$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $(a+3)(a-3)x = a+3$ і розглянемо три випадки.

1) $a = 3$.

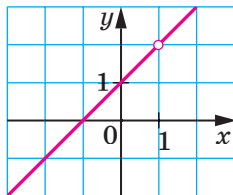


Рис. 15.1

Тоді отримуємо рівняння $0x = 6$, яке не має коренів.

2) $a = -3$.

У цьому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$, коренем якого є будь-яке число.

3) $a \neq 3$ і $a \neq -3$.

$$\text{Тоді } x = \frac{a+3}{(a+3)(a-3)} = \frac{1}{a-3}.$$

Відповідь: якщо $a = 3$, то рівняння не має коренів; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -3$, то $x = \frac{1}{a-3}$. ▲



1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Сформулюйте основну властивість раціонального дробу.

ВПРАВИ

15.1.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{14a^3}{21a}$;

3) $\frac{4abc}{16ab^4}$;

5) $\frac{-10n^{10}}{5n^4}$;

2) $\frac{24x^2y^2}{32xy}$;

4) $\frac{56m^5n^7}{42m^5n^{10}}$;

6) $\frac{3p^4q^6}{-9p^8q^7}$.

15.2.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{3x}{21y}$;

3) $\frac{5c^4}{10c^5}$;

5) $\frac{12a^8}{-42a^2}$;

2) $\frac{5x^2}{6x}$;

4) $\frac{63x^5y^4}{42x^4y^5}$;

6) $\frac{-13a^5b^5}{26a^4b^3}$.

15.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{-a}{-b}$;

2) $-\frac{-a}{b}$;

3) $-\frac{a}{-b}$;

4) $-\frac{-a}{-b}$.

15.4.° Відновіть рівності:

1) $\frac{a}{3} = \frac{\quad}{6a} = \frac{\quad}{9a^3} = \frac{\quad}{5b} = \frac{4a^2c^3}{\quad}$;

2) $\frac{m}{n} = \frac{4m}{2n^2} = \frac{\quad}{mnp} = \frac{3m^4n^3}{\quad}$.

15.5.° Зведіть дріб:

1) $\frac{a}{b^3}$; до знаменника b^5 ;

2) $\frac{m}{9n}$ до знаменника $27n^4$;

- 3) $\frac{6}{7x^2y}$ до знаменника $35x^3y^2$; 4) $\frac{5k}{6p^5}$ до знаменника $24p^9c$.

15.6.° Зведіть дріб:

- 1) $\frac{x}{y^2}$ до знаменника y^8 ; 3) $\frac{9}{4m^2n}$ до знаменника $12m^3n^2$;
2) $\frac{a}{3b}$ до знаменника $6b^3$; 4) $\frac{11c}{15d^6}$ до знаменника $30bd^7$.

15.7.° Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{2a+2b}{7(a+b)}$; 4) $\frac{7x-21y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a^2+4a+4}{9a+18}$;
2) $\frac{4(a-6)^2}{(a-6)^3}$; 5) $\frac{a-5b}{a^2-5ab}$; 8) $\frac{c^2-6c+9}{c^2-9}$;
3) $\frac{12a+18b}{12a}$; 6) $\frac{y^2-25}{10+2y}$; 9) $\frac{m^3+1}{m^2-m+1}$.

15.8.° Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a-b}{2(b-a)}$; 3) $\frac{m^2-5mn}{15n-3m}$; 5) $\frac{x^2-25}{5x^2-x^3}$;
2) $\frac{3x-6y}{4y-2x}$; 4) $\frac{7a^4-a^3b}{b^4-7ab^3}$; 6) $\frac{y^2-12y+36}{36-y^2}$.

15.9.° Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{3m-3n}{7m-7n}$; 4) $\frac{x^2-49}{6x+42}$; 7) $\frac{b^5-b^4}{b^5-b^6}$;
2) $\frac{5a+25b}{2a^2+10ab}$; 5) $\frac{12a^2-6a}{3-6a}$; 8) $\frac{7m^2+7m+7}{m^3-1}$;
3) $\frac{4x-16y}{16y}$; 6) $\frac{9b^2-1}{9b^2+6b+1}$; 9) $\frac{64-x^2}{3x^2-24x}$.

15.10.° Зведіть дріб:

- 1) $\frac{a}{a+2}$ до знаменника $4a+8$;
2) $\frac{m}{m-3n}$ до знаменника m^2-9n^2 ;
3) $\frac{x}{2x-y}$ до знаменника $7y-14x$;
4) $\frac{5b}{2a+3b}$ до знаменника $4a^2+12ab+9b^2$;
5) $\frac{x+1}{x^2+x+1}$ до знаменника x^3-1 .

15.11.° Подайте вираз $x - 5y$ у вигляді дробу зі знаменником:

- 1) 2; 2) x ; 3) $4y^3$; 4) $x^2 - 25y^2$.

15.12.° Зведіть дріб $\frac{6}{b-4}$ до знаменника:

- 1) $5b - 20$; 2) $12 - 3b$; 3) $b^2 - 4b$; 4) $b^2 - 16$.

15.13.° Подайте дані дробу у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{1}{8ab} \text{ і } \frac{1}{2a^3}$; | 5) $\frac{x}{2x+1} \text{ і } \frac{x}{3x-2}$; |
| 2) $\frac{3x}{7m^3n^3} \text{ і } \frac{4y}{3m^2n^4}$; | 6) $\frac{a-b}{3a+3b} \text{ і } \frac{a}{a^2-b^2}$; |
| 3) $\frac{a+b}{a-b} \text{ і } \frac{2}{a^2-b^2}$; | 7) $\frac{3a}{4a-4} \text{ і } \frac{2a}{5-5a}$; |
| 4) $\frac{3d}{m-n} \text{ і } \frac{8p}{(m-n)^2}$; | 8) $\frac{7a}{b-3} \text{ і } \frac{c}{9-b^2}$. |

15.14.° Зведіть до спільного знаменника дробу:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{4}{15x^2y^2} \text{ і } \frac{1}{10x^3y}$; | 5) $\frac{x+1}{x^2-xy} \text{ і } \frac{y-1}{xy-y^2}$; |
| 2) $\frac{c}{6a^4b^5} \text{ і } \frac{d}{9ab^2}$; | 6) $\frac{6a}{a-2b} \text{ і } \frac{3a}{a+b}$; |
| 3) $\frac{x}{y-5} \text{ і } \frac{z}{y^2-25}$; | 7) $\frac{1+c^2}{c^2-16} \text{ і } \frac{c}{4-c}$; |
| 4) $\frac{m+n}{m^2-mn} \text{ і } \frac{2m-3n}{m^2-n^2}$; | 8) $\frac{2m+9}{m^2+5m+25} \text{ і } \frac{m}{m-5}$. |

15.15.° Скоротіть дріб:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\frac{(3a+3b)^2}{a+b}$; | 3) $\frac{xy+x-5y-5}{4y+4}$; |
| 2) $\frac{(6x-18y)^2}{x^2-9y^2}$; | 4) $\frac{a^2-ab+2b-2a}{a^2-4a+4}$. |

15.16.° Скоротіть дріб:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|--|
| 1) $\frac{2m^2-72n^2}{(4m+24n)^2}$; | 2) $\frac{a^3-8}{ab-a-2b+2}$; | 3) $\frac{a^3+2a^2b+ab^2}{a^3-ab^2}$. |
|--------------------------------------|--------------------------------|--|

15.17.° Скоротіть дріб (n — натуральне число):

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\frac{100^n}{2^{2n+3} \cdot 5^{2n+1}}$; | 2) $\frac{2^{2n+1} \cdot 7^{n+1}}{6 \cdot 28^n}$; | 3) $\frac{5^{n+1}-5^n}{2 \cdot 5^n}$. |
|--|--|--|

15.18.* Скоротіть дріб (n — натуральне число):

$$1) \frac{18^n}{3^{2n+2} \cdot 2^{n+1}};$$

$$2) \frac{41 \cdot 9^n}{9^{n+2} + 9^n}.$$

15.19.* Зведіть до спільного знаменника дробі:

$$1) \frac{2p}{5p-15} \text{ і } \frac{1}{p^3-27};$$

$$4) \frac{2x}{x^2-1}, \frac{3x}{x^2-2x+1} \text{ і } \frac{4}{x^2+2x+1};$$

$$2) \frac{3a+1}{9a^2-6a+1} \text{ і } \frac{a-2}{9a^2-1};$$

$$5) \frac{a^2}{a^2-ab-ac+bc}, \frac{b}{2a-2b} \text{ і } \frac{ab}{4a-4c}.$$

$$3) \frac{a}{a^2-7a} \text{ і } \frac{a+3}{a^2-14a+49};$$

15.20.* Запишіть у вигляді дробів з однаковими знаменниками:

$$1) \frac{3a}{3a-2}, \frac{a}{9a+6} \text{ і } \frac{a^2}{9a^2b-4b}; \quad 2) \frac{1}{a-5b}, \frac{1}{a^2+7ac} \text{ і } \frac{1}{a^2+7ac-5ab-35bc}.$$

15.21.* Знайдіть значення виразу $\frac{2xy-y^2}{3xy+x^2}$, якщо $\frac{x}{y} = 2$.

15.22.* Знайдіть значення виразу $\frac{4a^2-ab}{ab+14b^2}$, якщо $\frac{a}{b} = 5$.

15.23.* Відомо, що $2a - 6b = 1$. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{8}{a-3b};$$

$$2) \frac{a^2-9b^2}{0,5a+1,5b}.$$

15.24.* Знайдіть значення виразу $\frac{2m-1,5n}{32m^2-18n^2}$, якщо $4m+3n=8$.

15.25.* Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{a^2-3ab-b^2}{a^2-b^2}, \text{ якщо } \frac{3a+2b}{4a-b} = 1; \quad 2) \frac{m^3+2m^2n}{n^3-mn^2}, \text{ якщо } \frac{5m-n}{3m+2n} = 2.$$

15.26.* Яка фігура є графіком функції $y = \frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+4}$?

 **15.27.*** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2-4}{x+2};$$

$$3) y = \frac{x^2-10x+25}{x-5} - \frac{2x^2-4x}{x};$$

$$2) y = \frac{x-3}{3-x};$$

$$4) y = \frac{2}{x+4} - \frac{2}{x+4}.$$

 **15.28.*** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x^2-8x+16}{x-4}; \quad 2) y = x - \frac{x}{x}; \quad 3) y = \frac{x^2-3x}{x} - \frac{2x^2-2}{x^2-1}.$$

 **15.29.*** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{|x|}{x};$$

$$2) y = \frac{x^2-1}{|x|-1}.$$

15.30.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+1}{x+1} = 1;$$

$$2) \frac{x^2-25}{x-5} = 10;$$

$$3) \frac{x+6}{|x|-6} = 0.$$

15.31.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2-16}{x+4} = -8;$$

$$2) \frac{|x|-7}{x-7} = 0.$$

15.32.** Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

$$1) ax = 1;$$

$$3) (a-6)x = a^2 - 12a + 36;$$

$$2) ax = a;$$

$$4) (a^2-4)x = a-2.$$

15.33.** Для кожного значення a розв'яжіть рівняння:

$$1) (a+3)x = 3;$$

$$2) (a^2-9a)x = a^2 - 18a + 81.$$

15.34.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення дробу:

$$1) \frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + a + 1} \text{ невід'ємне};$$

$$3) \frac{(x-1)^3}{x^3 - x^2 + 4x - 4} \text{ невід'ємне};$$

$$2) \frac{2x-4}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \text{ додатне};$$

$$4) \frac{x^2-4}{12+x^2-x^4} \text{ від'ємне}.$$

15.35.** Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення дробу:

$$1) \frac{x-1}{x^3 - x^2 + 2x - 2} \text{ додатне};$$

$$3) \frac{x^2-1}{4-3x^2-x^4} \text{ від'ємне}.$$

$$2) \frac{(x-2)^3}{x^3 - 2x^2 + x - 2} \text{ невід'ємне};$$

 15.36.** Відомо, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$. Доведіть, що коли

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \neq 0, \text{ то } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = k.$$

15.37.** Скоротіть дріб:

$$1) \frac{2x+4}{x^2+x-2};$$

$$6) \frac{n^4 + 4n^3 + 8n^2}{n^4 + 64};$$

$$2) \frac{a^2 - 4a + 3}{a^2 + 2a - 3};$$

$$7) \frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 - y + 1};$$

$$3) \frac{2b^3 + 3b^2 + 3b + 1}{2b + 1};$$

$$8) \frac{m^2 + m + 3}{m^4 + 5m^2 + 9};$$

$$4) \frac{x+3}{x^3 + 6x^2 + 12x + 9};$$

$$9) \frac{b^{47} + b^{46} + \dots + b + 1}{b^{23} + b^{22} + \dots + b + 1};$$

$$5) \frac{a^4 + 4}{a^2 + 2a + 2};$$

$$10) \frac{a^{38} - a^{37} + a^{36} - \dots - a + 1}{a^{12} - a^{11} + a^{10} - \dots - a + 1}.$$

15.38.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3y+9}{y^2+y-6}$;

2) $\frac{x^2+6x+5}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{2x^3-9x^2+27x-27}{4x^2-9}$;

4) $\frac{z^4+7z^2+16}{z^2+z+4}$;

5) $\frac{y^{55}+y^{54}+\dots+y+1}{y^{27}+y^{26}+\dots+y+1}$;

6) $\frac{a^{59}-a^{58}+a^{57}-\dots+a-1}{a^{19}-a^{18}+a^{17}-\dots+a-1}$.

15.39.* Відомо, що $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_4}$. Доведіть, що $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3+x_4}\right)^3 = \frac{x_1}{x_4}$.15.40.* Відомо, що $a^3 + 7a - 9 = 0$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{2a^3+3a}{11a-18}$;

2) $\frac{2a^4+14a^2-17a+3}{2a+6}$.

15.41.* Скоротіть дріб $\frac{x^5+x+1}{x^2+x+1}$.15.42.* Розкладіть на множники многочлен $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1$.

16. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками

Ви знаєте правила додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

За такими самими правилами додають і віднімають раціональні дробі з однаковими знаменниками.

Щоб додати раціональні дробі з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб відняти раціональні дробі з однаковими знаменниками, треба від чисельника першого дробу відняти чисельник другого дробу, а знаменник залишити той самий.

ПРИКЛАД 1 Виконайте віднімання:

1) $\frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25}$;

2) $\frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}$.

Розв'язання

$$1) \frac{y^2+2y}{y^2-25} - \frac{12y-25}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-(12y-25)}{y^2-25} = \frac{y^2+2y-12y+25}{y^2-25} =$$

$$= \frac{y^2-10y+25}{y^2-25} = \frac{(y-5)^2}{(y+5)(y-5)} = \frac{y-5}{y+5}.$$

$$2) \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} = \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Відомо, що $\frac{m}{n} = -3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2m+n}{m}$.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді суми цілого та дробового виразів:

$$\frac{2m+n}{m} = \frac{2m}{m} + \frac{n}{m} = 2 + \frac{n}{m}.$$

Якщо $\frac{m}{n} = -3$, то $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$. Отже, $\frac{2m+n}{m} = 2 + \frac{n}{m} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$. $\blacktriangle$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі натуральні значення n , при яких значення виразу $\frac{2n^2+3n-15}{n}$ є цілим числом.

Розв'язання. Подамо даний дріб у вигляді різниці цілого та дробового виразів:

$$\frac{2n^2+3n-15}{n} = \frac{2n^2}{n} + \frac{3n}{n} - \frac{15}{n} = 2n + 3 - \frac{15}{n}.$$

Вираз $2n + 3$ набуває натуральних значень при будь-якому натуральному n . Тому вираз $2n + 3 - \frac{15}{n}$ набуває цілих значень, якщо

значення виразу $\frac{15}{n}$ є цілими числами. Це можливо лише при таких натуральних значеннях n : 1, 3, 5, 15.

Відповідь: {1, 3, 5, 15}. $\blacktriangle$

ПРИКЛАД 4 При яких цілих значеннях n значення дробу $\frac{3n^2+5n-13}{n+2}$ є цілим числом?

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{3n^2+5n-13}{n+2} = \frac{3n^2+6n-n-2-11}{n+2} = \frac{3n(n+2)-(n+2)-11}{n+2} =$$

$$= \frac{3n(n+2)}{n+2} - 1 - \frac{11}{n+2} = 3n - 1 - \frac{11}{n+2}.$$

Дріб $\frac{11}{n+2}$ набуває цілих значень тільки тоді, коли його знаменник набуває одного із чотирьох значень: $-1, 1, -11, 11$. Звідси n набуває таких значень: $-3, -1, -13, 9$.

Відповідь: $\{-3, -1, -13, 9\}$. ▲

Виконані в прикладах 2–4 перетворення раціонального дробу називають **виділенням цілої частини з дробу**.



1. Як додати раціональні дробі з однаковими знаменниками?
2. Як відняти раціональні дробі з однаковими знаменниками?

ВПРАВИ

16.1.° Виконайте дії:

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{6}$;

4) $\frac{m+n}{6} - \frac{m-2n}{6}$;

2) $\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$;

5) $\frac{2a-3b}{6ab} + \frac{9b-2a}{6ab}$;

3) $\frac{m}{n} + \frac{4m}{n}$;

6) $\frac{8m+3}{10m^2} - \frac{2m+3}{10m^2}$.

16.2.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{a-b}{2b} - \frac{a}{2b}$;

3) $\frac{10a+6b}{11a^3} - \frac{6b-a}{11a^3}$;

2) $-\frac{a-12b}{27a} + \frac{a+15b}{27a}$;

4) $\frac{x^2-xy}{x^2y} + \frac{2xy-3x^2}{x^2y}$.

16.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{a+3} - \frac{9}{a+3}$;

3) $\frac{m^2}{(m-5)^2} - \frac{25}{(m-5)^2}$;

2) $\frac{t}{t^2-16} - \frac{4}{t^2-16}$;

4) $\frac{b^2}{b+10} + \frac{20b+100}{b+10}$.

16.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{c^2}{c-9} - \frac{81}{c-9}$;

3) $\frac{3x+5}{x^2-4} - \frac{2x+7}{x^2-4}$;

2) $\frac{a^2}{(a-6)^2} - \frac{36}{(a-6)^2}$;

4) $\frac{y^2}{y-2} - \frac{4y-4}{y-2}$.

16.5.° Виконайте дії:

$$1) \frac{a+b}{c-7} + \frac{a}{7-c};$$

$$3) \frac{81b^2}{9b-a} + \frac{a^2}{a-9b};$$

$$2) \frac{2x-4y}{x-3y} - \frac{4x-14y}{3y-x};$$

$$4) \frac{y^2}{y-1} - \frac{1-2y}{1-y}.$$

16.6.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{3c}{c-d} + \frac{3d}{d-c};$$

$$2) \frac{b^2}{2b-14} + \frac{49}{14-2b}.$$

 16.7.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{a^2-48}{a-8} - \frac{16}{a-8} \text{ при } a = 32;$$

$$2) \frac{c^2+3c+7}{c^3-8} + \frac{c+3}{8-c^3} \text{ при } c = -3.$$

 16.8.° Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{5x+3}{x^2-16} + \frac{6x-1}{16-x^2} \text{ при } x = -4, 1; \quad 2) \frac{a^2+a}{a^2-9} - \frac{7a-9}{a^2-9} \text{ при } a = 7.$$

16.9.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{5n-1}{20n} - \frac{7n-8}{20n} - \frac{8n+7}{20n};$$

$$3) \frac{3k}{k^3-1} + \frac{4k+1}{1-k^3} + \frac{k^2}{1-k^3}.$$

$$2) \frac{9m+2}{m^2-4} - \frac{m-9}{4-m^2} + \frac{1-7m}{m^2-4};$$

16.10.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{6a-1}{16a-8} + \frac{4a-7}{16a-8} + \frac{-2a-2}{8-16a};$$

$$2) \frac{2a^2+12a}{a^2-25} + \frac{8a-9}{25-a^2} - \frac{a^2+14a-16}{a^2-25}.$$

16.11.° Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{15-8a}{(a-1)^2} - \frac{14-7a}{(1-a)^2};$$

$$3) \frac{m^2-8n}{(m-2)(n-5)} - \frac{2m-8n}{(2-m)(5-n)};$$

$$2) \frac{3b^2+12}{(b-2)^3} + \frac{12b}{(2-b)^3};$$

$$4) \frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{6x-9}{(3-x)^2}.$$

16.12.° Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{x^2-16x}{(x-7)^4} + \frac{2x+49}{(7-x)^4};$$

$$3) \frac{y^2+y}{(y-6)(y+2)} + \frac{y+36}{(6-y)(2+y)}.$$

$$2) \frac{a^3}{(a-2b)^3} + \frac{8b^3}{(2b-a)^3};$$

16.13.° Доведіть тотожність:

$$1) \frac{(a+b)^2}{4ab} - \frac{(a-b)^2}{4ab} = 1;$$

$$2) \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$$

16.14.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної x значення виразу $\frac{12x-25}{20x-15} + \frac{8x+10}{20x-15}$ не залежить від значення x .

16.15.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної y значення виразу $\frac{17y+5}{21y-3} - \frac{9-11y}{21y-3}$ не залежить від значення y .

16.16.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{a^2-6}{(a-2)^4} - \frac{7a-4}{(a-2)^4} + \frac{3a+6}{(a-2)^4}$ набуває додатних значень.

16.17.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{2-b^2}{(b-5)^6} - \frac{7-3b}{(b-5)^6} + \frac{7b-20}{(b-5)^6}$ набуває від'ємних значень.

16.18.* Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{x+3}{x}$;

2) $\frac{a^2-2a-5}{a-2}$.

16.19.* Подайте даний дріб у вигляді суми або різниці цілого та дробового виразів:

1) $\frac{4a-b}{a}$;

2) $\frac{b^2+7b+3}{b+7}$.

16.20.* Відомо, що $\frac{x}{y} = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$;

2) $\frac{2x-3y}{y}$;

3) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

16.21.* Відомо, що $\frac{a}{b} = -2$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a-b}{a}$;

2) $\frac{4a+5b}{b}$;

3) $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}$.

16.22.* Знайдіть усі натуральні значення n , при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{n+6}{n}$;

2) $\frac{3n^2-4n-14}{n}$;

3) $\frac{4n+7}{2n-3}$.

16.23.* Знайдіть усі натуральні значення n , при яких значення виразу є цілим числом:

1) $\frac{8n-9}{n}$;

2) $\frac{n^2+2n-8}{n}$;

3) $\frac{9n-4}{3n-5}$.

16.24.** Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення дробу не є цілим числом:

$$1) \frac{n^2 + n + 1}{n + 1}; \quad 2) \frac{n^3 - 2n^2 + n - 1}{n^2 + 1}.$$

16.25.** При яких цілих значеннях n є цілим числом значення дробу:

$$1) \frac{2n^2 + 7n - 4}{n + 3}; \quad 2) \frac{4n^2 - 11n + 23}{n - 2}?$$

16.26.* Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n є цілим числом значення дробу:

$$1) \frac{n^3 - 2n + 1}{n^2 + n - 1}; \quad 2) \frac{n^3 - 4n - 3}{n^2 - n - 3}.$$

16.27.* Числа a, b і c такі, що значення виразів $a + b + c$ і $\frac{ab + bc + ac}{a + b + c}$ є цілими числами. Доведіть, що значення виразу $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ також є цілим числом.

17. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками

Застосовуючи основну властивість раціонального дробу, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками можна звести до додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Нехай треба додати два раціональних дроби $\frac{A}{B}$ і $\frac{C}{D}$.

Можна записати: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D}; \quad \frac{C}{D} = \frac{C \cdot B}{D \cdot B}.$

Тоді $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} + \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D + C \cdot B}{B \cdot D}.$

Тут за **спільний знаменник** вибрано вираз, який дорівнює добутку знаменників даних дробів.

Зазначимо, що добуток знаменників даних дробів не завжди є найзручнішим спільним знаменником.

Нагадаємо, щоб знайти спільний знаменник звичайних дробів, ми знаходили найменше спільне кратне знаменників, розкладаючи їх на прості множники. Аналогічно, щоб знайти спільний знаменник раціональних дробів, може виявитися зручним попередньо розкласти знаменники на множники.

Сума й різниця двох раціональних дробів є раціональними дробами.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

- 1) $\frac{b+1}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$; 4) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$;
 2) $\frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n}$; 5) $\frac{x}{x-4} - \frac{x+2}{x-2}$.
 3) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$;

Розв'язання. 1) Спільним знаменником даних дробів є одночлен a^2bc . Отже,

$$\frac{a/b+1}{abc} + \frac{b/1-a}{a^2c} = \frac{ab+a+b-ab}{a^2bc} = \frac{a+b}{a^2bc}.$$

2) Розклавши попередньо знаменники даних дробів на множники, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{m}{7m+7n} - \frac{n}{7m-7n} &= \frac{m-n/n}{7(m+n)} - \frac{m+n/n}{7(m-n)} = \\ &= \frac{m(m-n)-n(m+n)}{7(m+n)(m-n)} = \frac{m^2-mn-mn-n^2}{7(m^2-n^2)} = \frac{m^2-2mn-n^2}{7(m^2-n^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3) Маємо: } \frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} &= \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} + \frac{n+7/6}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} = \\ &= \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} = \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4) } \frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} &= \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} = \\ &= \frac{3/2a}{(a-5)^2} - \frac{a-5/1}{3(a-5)} = \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}. \end{aligned}$$

5) У цьому випадку спільний знаменник даних дробів дорівнює добутку їхніх знаменників. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{x-2/x}{x-4} - \frac{x-4/x+2}{x-2} &= \frac{x(x-2)-(x+2)(x-4)}{(x-4)(x-2)} = \\ &= \frac{x^2-2x-x^2+4x-2x+8}{(x-4)(x-2)} = \frac{8}{(x-4)(x-2)}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{21c^2}{7c-2} - 3c$.

Розв'язання. Подавши вираз $3c$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$\frac{21c^2}{7c-2} - 3c = \frac{21c^2}{7c-2} - \frac{7c-2/3c}{1} = \frac{21c^2-21c^2+6c}{7c-2} = \frac{6c}{7c-2}. \quad \blacktriangle$$



1. Як виконати додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками?
2. Що є сумою та різницею двох раціональних дробів?

ВПРАВИ

17.1.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{2b-7c}{6} - \frac{3b+2c}{15};$$

$$5) \frac{k+4}{k} - \frac{3k-4}{k^2};$$

$$2) \frac{3x-2}{x} - \frac{3y-1}{y};$$

$$6) \frac{x-y}{x^3} - \frac{y-x^2}{x^2y};$$

$$3) \frac{5m-n}{14m} - \frac{m-6n}{7m};$$

$$7) \frac{2m-3n}{m^2n} + \frac{7m-2n}{mn^2};$$

$$4) \frac{a+b}{ab} + \frac{a-c}{ac};$$

$$8) \frac{c+d}{cd^4} - \frac{c^2-8d}{c^3d^3}.$$

17.2.° Виконайте віднімання дробів:

$$1) \frac{4d+7}{7d} - \frac{d-6}{6d};$$

$$3) \frac{6a+2}{ab} - \frac{2a+4}{a^2b};$$

$$5) \frac{1}{x^3} - \frac{1+x^2}{x^5};$$

$$2) \frac{m-n}{mn} - \frac{p-n}{np};$$

$$4) \frac{c^2-16}{c^6} - \frac{c-9}{c^5};$$

$$6) \frac{1-ab}{abc} - \frac{1-ad}{acd}.$$

17.3.° Виконайте дії:

$$1) \frac{m}{n} - \frac{m}{m+n};$$

$$2) \frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3};$$

$$3) \frac{c}{3c-1} - \frac{c}{3c+1};$$

$$4) \frac{x}{2y+1} - \frac{x}{3y-2}.$$

17.4.° Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \frac{a}{a-b} + \frac{a}{b};$$

$$2) \frac{4}{x} - \frac{5x+4}{x+2};$$

$$3) \frac{b}{b-2} - \frac{2}{b+2}.$$

17.5.° Виконайте додавання або віднімання дробів:

$$1) \frac{18}{b^2+3b} - \frac{6}{b};$$

$$4) \frac{m-2n}{6m+6n} - \frac{m-3n}{4m+4n};$$

$$2) \frac{2}{c+1} - \frac{c-1}{c^2+c};$$

$$5) \frac{a^2+2}{a^2+2a} - \frac{a+4}{2a+4};$$

$$3) \frac{m+1}{3m-15} + \frac{1-m}{2m-10};$$

$$6) \frac{3x-4y}{x^2-2xy} + \frac{x-3y}{xy-2y^2}.$$

17.6.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{m} - \frac{16}{m^2 + 8m};$

3) $\frac{a^2 + b^2}{2a^2 + 2ab} + \frac{b}{a + b};$

2) $\frac{a-2}{2a-6} - \frac{a-1}{3a-9};$

4) $\frac{b+4}{ab-b^2} - \frac{a+4}{a^2-ab}.$

17.7.° Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x+3} + \frac{x+4}{x^2-9};$

4) $\frac{3a+b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b};$

2) $\frac{a^2}{a^2-64} - \frac{a}{a-8};$

5) $\frac{m}{m+5} - \frac{m^2}{m^2+10m+25};$

3) $\frac{6b}{9b^2-4} - \frac{1}{3b-2};$

6) $\frac{b}{a+b} - \frac{b^2}{a^2+b^2+2ab}.$

17.8.° Спростіть вираз:

1) $\frac{4x-y}{x^2-y^2} + \frac{1}{x-y};$

3) $\frac{10a}{25a^2-9} - \frac{1}{5a+3};$

2) $\frac{y^2}{y^2-81} - \frac{y}{y+9};$

4) $\frac{n}{n-7} - \frac{n^2}{n^2-14n+49}.$

17.9.° Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{x}{y} - x;$

3) $\frac{9}{p^2} - \frac{4}{p} + 3;$

5) $6m - \frac{12m^2+1}{2m};$

2) $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2;$

4) $\frac{3b+4}{b-2} - 3;$

6) $\frac{20b^2+5}{2b-1} - 10b.$

17.10.° Виконайте дії:

1) $a - \frac{4}{a};$

3) $\frac{m}{n^3} - \frac{1}{n} + m;$

5) $3n - \frac{9n^2-2}{3n};$

2) $\frac{1}{x} + x - 2;$

4) $\frac{2k^2}{k-5} - k;$

6) $5 - \frac{4y-12}{y-2}.$

17.11.* Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2+1}{a^2-2a+1} + \frac{a+1}{a-1};$

5) $\frac{a}{a^2-4a+4} - \frac{a+4}{a^2-4};$

2) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a-b}{a+b};$

6) $\frac{2p}{p-5} - \frac{5}{p+5} + \frac{2p^2}{25-p^2};$

3) $\frac{c+7}{c-7} + \frac{28c}{49-c^2};$

7) $\frac{1}{y} - \frac{y+8}{16-y^2} - \frac{2}{y-4};$

4) $\frac{5a+3}{2a^2+6a} + \frac{6-3a}{a^2-9};$

8) $\frac{2b-1}{4b+2} + \frac{4b}{4b^2-1} + \frac{2b+1}{3-6b}.$

17.12.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{m+n}{m-n} - \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$4) \frac{b-2}{b^2+6b+9} - \frac{b}{b^2-9};$$

$$2) \frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2}{2xy+x^2+y^2};$$

$$5) \frac{x-6}{x^2+3x} + \frac{x}{x+3} - \frac{x-3}{x};$$

$$3) \frac{2a}{4a^2-1} - \frac{a+4}{2a^2+a};$$

$$6) \frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

17.13.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення даного виразу не залежить від значення змінної:

$$1) \frac{2x+1}{2x-4} + \frac{2x-1}{6-3x} - \frac{x+7}{6x-12};$$

$$2) \frac{24-2a}{a^2-16} - \frac{a}{2a-8} + \frac{4}{a+4}.$$

17.14.* Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) 1-a + \frac{a^2-2}{a+2};$$

$$3) \frac{c^2+9}{c-3} - c-3;$$

$$2) \frac{a^2-b^2}{3a+b} + 3a-b;$$

$$4) \frac{8m^2}{4m-3} - 2m-1.$$

17.15.* Спростіть вираз:

$$1) b+7 - \frac{14b}{b+7};$$

$$2) 5c - \frac{10-29c+10c^2}{2c-5} + 2.$$

17.16.* Спростіть вираз і знайдіть його значення:

$$1) \frac{7}{2a-4} - \frac{12}{a^2-4} - \frac{3}{a+2}, \text{ якщо } a = 5;$$

$$2) \frac{2c+3}{2c^2-3c} + \frac{2c-3}{2c^2+3c} - \frac{16c}{4c^2-9}, \text{ якщо } c = -0,8;$$

$$3) \frac{m^2+16n^2}{m^2-16n^2} - \frac{m+4n}{2m-8n}, \text{ якщо } m = 3, n = 0,5.$$

17.17.* Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{6}{5x-20} - \frac{x-5}{x^2-8x+16}, \text{ якщо } x = 5;$$

$$2) \frac{2y-1}{2y} - \frac{2y}{2y-1} - \frac{1}{2y-4y^2}, \text{ якщо } y = -2\frac{3}{7}.$$

17.18.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab} = 0;$$

$$2) \frac{a+3}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} + \frac{6}{a^2-1} = \frac{2}{a^2-1}.$$

17.19.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{1}{6a-4b} - \frac{1}{6a+4b} - \frac{3a}{4b^2-9a^2} = \frac{1}{3a-2b};$$

$$2) \frac{c+2}{c^2+3c} - \frac{1}{3c+9} - \frac{2}{3c} = 0.$$

17.20.* Знайдіть різницю дробів:

$$1) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1}; \quad 2) \frac{1}{b+3} - \frac{b^2-6b}{b^3+27}.$$

17.21.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{9m^2-3mn+n^2}{3m-n} - \frac{9m^2+3mn+n^2}{3m+n}; \quad 2) 1 - \frac{2b-1}{4b^2-2b+1} - \frac{2b}{2b+1}.$$

17.22.* Доведіть тотожність: $\frac{3a^2+24}{a^3+8} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{1}{a+2} = \frac{2}{a+2}.$

17.23.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{4b}{a^2-b^2} + \frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{b^2-ab};$$

$$2) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{x^2+4}{8x-2x^3};$$

$$3) \frac{1}{(a-5b)^2} - \frac{2}{a^2-25b^2} + \frac{1}{(a+5b)^2};$$

$$4) \frac{x^2+9x+18}{xy+3y-2x-6} - \frac{x+5}{y-2}.$$

17.24.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{a+3}{a^2-3a} + \frac{a-3}{3a+9} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{a-3}{3a};$$

$$2) \frac{b-4}{2a-1} - \frac{b^2-2b-24}{2ab-4-b+8a} = \frac{2}{2a-1};$$

$$3) \frac{1}{a^2+12a+36} + \frac{2}{36-a^2} + \frac{1}{a^2-12a+36} = \frac{144}{(a^2-36)^2}.$$

17.25.** Доведіть тотожність:

$$1) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0;$$

$$2) \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

17.26.** Доведіть тотожність:

$$1) \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1;$$

$$2) \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

17.27." Доведіть, що при будь-якому натуральному n справджується рівність $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. Скориставшись цією рівністю, знайдіть значення суми:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \frac{9}{4^2 \cdot 5^2} + \frac{11}{5^2 \cdot 6^2}.$$

17.28." Доведіть, що при будь-якому натуральному n справджується рівність:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

17.29." Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{(a-1)(a-2)} + \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-4)};$$

$$2) \frac{1}{a(a+3)} + \frac{1}{(a+3)(a+6)} + \frac{1}{(a+6)(a+9)} + \frac{1}{(a+9)(a+12)}.$$

17.30." Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{(a-1)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-5)} + \frac{1}{(a-5)(a-7)};$$

$$2) \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

17.31." Доведіть тотожність

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x^2-1} + \frac{4}{x^2-4} + \frac{6}{x^2-9} + \frac{8}{x^2-16} = \\ & = 5 \left(\frac{1}{(x-1)(x+4)} + \frac{1}{(x-2)(x+3)} + \frac{1}{(x-3)(x+2)} + \frac{1}{(x-4)(x+1)} \right). \end{aligned}$$

17.32." Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}} = \frac{32}{1-a^{32}}.$$

17.33." Доведіть тотожність

$$\frac{3}{1-a^2} + \frac{3}{1+a^2} + \frac{6}{1+a^4} + \frac{12}{1+a^8} + \frac{24}{1+a^{16}} = \frac{48}{1-a^{32}}.$$

17.34." Доведіть, що коли $\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{a+c} + \frac{c-b}{a+b} = 1$, то $\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+c} + \frac{a+c}{a+b} = 4$.

17.35." Доведіть, що коли $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{a-b+c}{a-b-c}$, то $b = 0$ або $c = 0$.

17.36.* Для додатних чисел a, b і c виконується рівність $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Знайдіть значення виразу $\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(a+c)^2}{b^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2}$.

17.37.* Для додатних чисел a, b і c виконується рівність $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{a+c+d} = \frac{c}{a+b+d}$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{a+b+c}{d} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{b+c+d}{a}.$$

17.38.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Доведіть, що

$$\frac{1}{a^3+b^3+c^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}.$$

17.39.* Знайдіть значення виразу $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{2}{xy+1}$, якщо

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \text{ і } x \neq y.$$

17.40.* Числа a, b і c такі, що $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = 0$. Доведіть, що один із доданків у лівій частині рівності дорівнює 0.

17.41.* Числа a, b і c такі, що $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = -\frac{1}{30}$. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}; \quad 2) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

17.42.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{3}{2}$. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$.

17.43.* Числа a, b і c такі, що $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Доведіть, що $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = 3$.

17.44.* Числа a, b і c такі, що $\frac{b+c-a}{a} = \frac{a+c-b}{b} = \frac{b+a-c}{c}$. Яких значень може набувати вираз $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

17.45.* Знайдіть значення виразу $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$, якщо $xyz = 1$.

18. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня

Ви знаєте правила множення і ділення звичайних дробів. Їх можна виразити такими рівностями:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

За аналогічними правилами виконують множення і ділення раціональних дробів.

Добутком двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників даних дробів, а знаменник — добутку їхніх знаменників.

Часткою двох раціональних дробів є раціональний дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельника діленого та знаменника дільника, а знаменник — добутку знаменника діленого та чисельника дільника.

ПРИКЛАД 1 Виконайте дії:

$$1) (2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36}; \quad 2) \frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27}; \quad 3) \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7).$$

Розв'язання. 1) Подавши многочлен $2x - 12$ у вигляді дробу зі знаменником 1, отримуємо:

$$(2x - 12) \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2x - 12}{1} \cdot \frac{4x}{x^2 - 12x + 36} = \frac{2(x - 6) \cdot 4x}{(x - 6)^2} = \frac{8x}{x - 6}.$$

$$2) \frac{a^2 + 2ab}{a + 9} : \frac{a^2 - 4b^2}{3a + 27} = \frac{a(a + 2b)}{a + 9} \cdot \frac{3(a + 9)}{(a - 2b)(a + 2b)} = \frac{3a}{a - 2b}.$$

$$3) \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : (c - 7) = \frac{5c^2 - 35c}{c + 2} : \frac{c - 7}{1} = \frac{5c(c - 7)}{c + 2} \cdot \frac{1}{c - 7} = \frac{5c}{c + 2}. \quad \blacktriangle$$

Правило множення двох дробів можна узагальнити для випадку, коли треба знайти добуток трьох або більше раціональних дробів. Наприклад, для трьох дробів маємо:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{A \cdot C \cdot P}{B \cdot D \cdot Q}.$$

ПРИКЛАД 2 Спростіть вираз $\frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} : \frac{4a^2}{9bc^3} &= \frac{2a^5}{15b^3} \cdot \frac{10b^2}{7c^4} \cdot \frac{9bc^3}{4a^2} = \frac{2a^5 \cdot 10b^2 \cdot 9bc^3}{15b^3 \cdot 7c^4 \cdot 4a^2} = \\ &= \frac{2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot a^5 b^3 c^3}{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot a^2 b^3 c^4} = \frac{3a^3}{7c}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Застосовуючи правило множення дробів, можна отримати правило піднесення раціональних дробів до степеня. Для натурального n , $n > 1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots \cdot \frac{A}{B}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot \dots \cdot B}_{n \text{ множників}}} = \frac{A^n}{B^n}.$$

Для $n = 1$ домовилися, що $\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}$.

Отже,

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},$$

де n — натуральне число.

Щоб піднести раціональний дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник. Перший результат записати як чисельник, а другий — як знаменник дробу.

ПРИКЛАД 3 Подайте у вигляді дробу вираз $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3$.

Розв'язання. $\left(-\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\left(\frac{3a^2}{2bc^4}\right)^3 = -\frac{(3a^2)^3}{(2bc^4)^3} = -\frac{27a^6}{8b^3c^{12}}. \quad \blacktriangle$



1. Що є добутком двох раціональних дробів?
2. Що є часткою двох раціональних дробів?
3. Як піднести раціональний дріб до степеня?

ВПРАВИ

18.1.° Виконайте множення:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{8a}$; | 3) $14m^9 \cdot \frac{n^2}{7m^3}$; | 5) $\frac{21c^3}{13p^2} \cdot \frac{39p}{28c^2}$; |
| 2) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y^4}{5x}$; | 4) $\frac{15a^4}{b^{12}} \cdot \frac{b^6}{10a^2}$; | 6) $\frac{25a^2c}{64b^4} \cdot \frac{77b^6}{10ac^3}$. |

18.2.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{4m^2}{k^5} \cdot \frac{mk^5}{12};$$

$$3) 15x^{12} \cdot \frac{y^2}{5x^4};$$

$$2) \frac{a}{2b} \cdot 2a;$$

$$4) \frac{7k^8}{9mp} \cdot \frac{27m^3}{56k^6 p^2}.$$

18.3.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{2mn+n^2}{6m} \cdot \frac{2m}{n};$$

$$4) (a+4) \cdot \frac{a}{2a+8};$$

$$2) \frac{7a+7b}{b^6} \cdot \frac{b^3}{a+b};$$

$$5) \frac{4a^2-4a+1}{3a+3} \cdot \frac{a+1}{2a-1};$$

$$3) \frac{m-2}{m^2-49} \cdot \frac{m+7}{m-2};$$

$$6) \frac{a^2-25}{4a} \cdot \frac{4a^2}{a^2-5a}.$$

18.4.° Виконайте множення:

$$1) \frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{4a}{b^4};$$

$$3) \frac{6}{m^2-9n^2} \cdot (m-3n);$$

$$2) \frac{5x-5y}{x^6} \cdot \frac{x^3}{x-y};$$

$$4) \frac{3c-9}{9c^2+6c+1} \cdot \frac{3c+1}{c-3}.$$

18.5.° Виконайте ділення:

$$1) \frac{3b}{8} : b;$$

$$3) -\frac{9a}{b^5} : \frac{18a^4}{b^3};$$

$$5) \frac{36a}{c^3} : (4a^2c);$$

$$2) \frac{6a}{5b} : \frac{3a^2}{20b^2};$$

$$4) a^2 : \frac{a}{b^2c};$$

$$6) \frac{16x^3y^8}{33z^5} : \left(-\frac{12x^2}{55z^6}\right).$$

18.6.° Знайдіть частку:

$$1) \frac{b^9}{8} : \frac{b^3}{48};$$

$$2) \frac{27}{m^6} : \frac{36}{m^7 n^2};$$

$$3) \frac{6x^{10}}{y^8} : (30x^5y^2).$$

18.7.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^2-y^2}{x^2} : \frac{6x+6y}{x^5};$$

$$4) \frac{a^2-4a+4}{a+2} : (a-2);$$

$$2) \frac{c-5}{c^2-4c} : \frac{c-5}{5c-20};$$

$$5) (p^2-16k^2) : \frac{p+4k}{p};$$

$$3) \frac{x-y}{xy} : \frac{x^2-y^2}{3xy};$$

$$6) \frac{a^2-ab}{a^2} : \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}.$$

18.8.° Виконайте ділення:

$$1) \frac{p+3}{p^2-2p} : \frac{p+3}{4p-8};$$

$$3) \frac{y-9}{y-8} : \frac{y^2-81}{y^2-16y+64};$$

$$2) \frac{a^2-16}{a-3} : \frac{a+4}{a-3};$$

$$4) (x^2-49y^2) : \frac{x-7y}{x}.$$

18.9.° Виконайте піднесення до степеня:

$$1) \left(\frac{c}{2d}\right)^5; \quad 2) \left(\frac{5a^6}{b^5}\right)^2; \quad 3) \left(-\frac{3m^4}{2n^3}\right)^3; \quad 4) \left(-\frac{6a^6}{b^7}\right)^2.$$

18.10.° Подайте у вигляді дробу вираз:

$$1) \left(\frac{a^6}{b^3}\right)^{10}; \quad 2) \left(-\frac{4m}{9n^3}\right)^2; \quad 3) \left(-\frac{10c^7}{3d^5}\right)^3; \quad 4) \left(\frac{2m^3n^2}{kp^8}\right)^6.$$

18.11.° Виразіть змінну x через змінні a і b , якщо:

$$1) \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = b; \quad 2) \frac{a}{b} + \frac{x}{4} = \frac{b}{a}.$$

18.12.° Виразіть змінну x через змінні m і n , якщо:

$$1) 2x - \frac{m}{n} = 2; \quad 2) \frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}.$$

18.13.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{33m^8}{34n^8} : \frac{88m^4}{51n^4} : \frac{21m^6}{16n^2}; \quad 3) \left(\frac{2a^5}{y^6}\right)^4 : \left(\frac{4a^6}{y^8}\right)^3;$$

$$2) \frac{36x^6}{49y^5} : \frac{24x^9}{25y^4} \cdot \frac{7x^2}{30y}; \quad 4) \left(-\frac{27x^3}{16y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{8y^3}{9x^2}\right)^3.$$

18.14.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{3a^4b^3}{10c^5} \cdot \frac{4b^4c^2}{27a^7} : \frac{5b^7}{9a^3c^3}; \quad 3) \left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^4 \cdot \frac{b^{18}}{50a^{16}};$$

$$2) \frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^8}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^{12}}; \quad 4) \left(\frac{3x^7}{y^{10}}\right)^4 : \left(\frac{3x^6}{y^8}\right)^3.$$

18.15.* Замініть змінну x таким виразом, щоб утворилася тотожність:

$$1) \left(\frac{4a^2}{b^3}\right)^2 \cdot x = \frac{6a}{b^2}; \quad 2) \left(\frac{2b^4}{3c}\right)^3 : x = \frac{b^6}{12}.$$

18.16.* Виконайте множення і ділення дробів:

$$1) \frac{4c-d}{c^2+cd} \cdot \frac{2c^2-2d^2}{4c^2-cd}; \quad 5) \frac{m+2n}{2-3m} : \frac{m^2+4mn+4n^2}{3m^2-2m};$$

$$2) \frac{b^2-6b+9}{b^2-3b+9} \cdot \frac{b^3+27}{5b-15}; \quad 6) \frac{a^3+8}{16-a^4} : \frac{a^2-2a+4}{a^2+4};$$

$$3) \frac{a^3-16a}{3a^2b} \cdot \frac{12ab^2}{4a+16}; \quad 7) \frac{x^2-12x+36}{3x+21} \cdot \frac{x^2-49}{4x-24};$$

$$4) \frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} \cdot \frac{7a-7b}{a^2-ab+b^2}; \quad 8) \frac{3a+15b}{a^2-81b^2} : \frac{4a+20b}{a^2-18ab+81b^2}.$$

18.17.* Спростіть вираз:

- $$\begin{array}{ll}
 1) \frac{a^4-1}{a^3-a} \cdot \frac{a}{1+a^2}; & 4) \frac{mn^2-36m}{m^3-8} : \frac{2n+12}{6m-12}; \\
 2) \frac{a^2-8ab}{12b} : \frac{8b^2-ab}{24a}; & 5) \frac{a^4-1}{a^2-a+1} : \frac{a-1}{a^3+1}; \\
 3) \frac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2} : \frac{15n-15m}{4m^2+4n^2}; & 6) \frac{4x^2-100}{6x} : (2x^2-20x+50).
 \end{array}$$

 **18.18.*** Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- $$\begin{array}{l}
 1) \frac{x}{4x^2-4y^2} : \frac{1}{6x+6y}, \text{ якщо } x=4,2, y=-2,8; \\
 2) (3a^2-18a+27) : \frac{3a-9}{4a}, \text{ якщо } a=0,5; \\
 3) \frac{a^6+a^5}{(3a-3)^2} : \frac{a^5+a^4}{9a^2-9a}, \text{ якщо } a=0,8.
 \end{array}$$

 **18.19.*** Знайдіть значення виразу:

- $$\begin{array}{l}
 1) \frac{1}{a^2-ab} : \frac{b}{b^2-a^2}, \text{ якщо } a=2\frac{1}{3}, b=-\frac{3}{7}. \\
 2) \frac{a^2+4ab+4b^2}{a^2-9b^2} : \frac{3a+6b}{2a-6b}, \text{ якщо } a=4, b=-5.
 \end{array}$$

18.20.* Спростіть вираз (n — натуральне число):

- $$1) \frac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}} : \frac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}}; \quad 2) \frac{(a^n+b^n)^2-4a^nb^n}{a^{3n}+b^{3n}} : \frac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^n-b^n)^2+4a^nb^n}.$$

18.21.* Спростіть вираз (n — натуральне число):

- $$1) \frac{x^{n+3}y^{4n-1}}{z^{n+4}} \cdot \frac{z^{2n+5}}{x^{n+1}y^{3n-2}}; \quad 2) \frac{(x^n-2y^n)^2+8x^ny^n}{x^{3n}-8y^{3n}} : \frac{x^{2n}-4y^{2n}}{(x^n+2y^n)^2-8x^ny^n}.$$

18.22.* Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

18.23.* Відомо, що $3x + \frac{1}{x} = -4$. Знайдіть значення виразу $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

18.24.* Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 41$. Знайдіть значення виразу $x + \frac{4}{x}$.

18.25.* Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 6$. Знайдіть значення виразу $x - \frac{1}{x}$.

18.26.* Спростіть вираз:

- $$1) \frac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b} : \frac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}; \quad 2) \frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b} : \frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}.$$

18.27.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{25-5a+5b-ab}{25+5a-5b-ab} \cdot \frac{ab-5a-5b+25}{ab+5a+5b+25};$$

$$2) \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab-4a+4b} : \frac{a^2-ab+4a-4b}{a^2-16}.$$

18.28.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{8a^2}{a-3b} : \frac{6a^3}{a^2-9b^2} \cdot \frac{3a}{4a+12b} = 1;$$

$$2) \frac{a^4-1000ab^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b-100b^3} : \frac{a^3+10a^2b+100ab^2}{ab+10b^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

18.29.* Доведіть тотожність $\frac{a^2+a}{2a-12} \cdot \frac{6a+6}{2a+12} : \frac{9a^3+18a^2+9a}{a^2-36} = \frac{1}{6}.$

18.30.** Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^2+2ab+b^2-2a-2b+1}{a^2-2ab+b^2+2a-2b+1} : \frac{a+b-1}{a-b+1};$$

$$2) \frac{x^2-4x-21}{x^2+4x-21} : \frac{x^2-14x+49}{x^2+14x+49}.$$

18.31.** Спростіть вираз:

$$1) \frac{n^2-9}{n^2-1} : \frac{n^2+4n+3}{n^2-4n+3};$$

$$2) \frac{a^5+1}{a^3+a^2+a+1} : \frac{a^4-a^3+a^2-a+1}{a^4-1}.$$

19. Тотожні перетворення раціональних виразів

Правила дій з раціональними дробами дають змогу будь-який раціональний вираз перетворити в раціональний дріб.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\left(\frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} \right) : \frac{a-4}{a^2-4} - \frac{2a^2+8a}{a-2}.$

Розв'язання. Даний вираз можна спростити аналогічно до того, як ми робили це, коли знаходили значення числового виразу, що містить кілька арифметичних дій. Виконуємо дії відповідно до порядку виконання арифметичних дій: спочатку — віднімання виразів, які стоять у дужках, потім — ділення і наприкінці — віднімання:

$$1) \frac{3a}{a-2} - \frac{6a}{a^2-4a+4} = \frac{a-2/3a}{a-2} - \frac{6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2} = \frac{3a^2-12a}{(a-2)^2};$$

$$2) \frac{3a^2 - 12a}{(a-2)^2} : \frac{a-4}{a^2-4} = \frac{3a^2 - 12a}{(a-2)^2} \cdot \frac{a^2-4}{a-4} = \frac{3a(a-4)}{(a-2)^2} \cdot \frac{(a-2)(a+2)}{a-4} =$$

$$= \frac{3a(a+2)}{a-2} = \frac{3a^2+6a}{a-2};$$

$$3) \frac{3a^2+6a}{a-2} - \frac{2a^2+8a}{a-2} = \frac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a.$$

Відповідь: a . ▲

Перетворення раціонального виразу можна виконувати не окремими діями, а «ланцюжком». Проілюструємо цей прийом на прикладі.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2}$ не залежить від значення a .

Розв'язання. Спростимо даний вираз:

$$\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} = \frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} =$$

$$= \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} = \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.$$

Отже, при всіх допустимих значеннях a значення даного виразу дорівнює 3. ▲

ПРИКЛАД 3 Доведіть тотожність $\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1} \right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{4}{a+1}$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівності, що доводиться. Тут доцільно розкрити дужки, застосовуючи розподільну властивість множення:

$$\left(\frac{a-7}{3a-1} + \frac{a-7}{a+1} \right) \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} = \frac{a-7}{3a-1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} + \frac{a-7}{a+1} \cdot \frac{3a-1}{a^2-7a} =$$

$$= \frac{a+1}{a} + \frac{3a-1}{a(a+1)} = \frac{a+1+3a-1}{a(a+1)} = \frac{4a}{a(a+1)} = \frac{4}{a+1}.$$

Тотожність доведено. ▲

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}}$.

Розв'язання. Записавши даний вираз у вигляді частки від ділення чисельника на знаменник, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) : \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) = \\ &= \frac{bc+ac+ab}{abc} : \frac{c+a+b}{abc} = \frac{bc+ac+ab}{abc} \cdot \frac{abc}{c+a+b} = \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}. \end{aligned}$$

Даний вираз можна спростити іншим способом, використовуючи основну властивість дробу, а саме: помножити його чисельник і знаменник на одночлен abc :

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) abc}{\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right) abc} = \frac{\frac{1}{a} \cdot abc + \frac{1}{b} \cdot abc + \frac{1}{c} \cdot abc}{\frac{1}{ab} \cdot abc + \frac{1}{bc} \cdot abc + \frac{1}{ac} \cdot abc} = \frac{bc+ac+ab}{c+a+b}.$$

Відповідь: $\frac{bc+ac+ab}{c+a+b}$. ▲

ВПРАВИ

19.1.* Виконайте дії:

- 1) $\frac{a+2}{a^2-2a+1} : \frac{a^2-4}{3a-3} - \frac{3}{a-2}$;
- 2) $\frac{b^2+3b}{b^3+9b} \cdot \left(\frac{b-3}{b+3} + \frac{b+3}{b-3} \right)$;
- 3) $\left(\frac{1}{a^2-4ab+4b^2} - \frac{1}{4b^2-a^2} \right) : \frac{2a}{a^2-4b^2}$;
- 4) $\left(\frac{a-8}{a^2-10a+25} - \frac{a}{a^2-25} \right) : \frac{a-20}{(a-5)^2}$;
- 5) $\left(\frac{2x+1}{x^2+6x+9} - \frac{x-2}{x^2+3x} \right) : \frac{x^2+6}{x^3-9x}$.

19.2.* Виконайте дії:

- 1) $\frac{b+4}{b^2-6b+9} : \frac{b^2-16}{2b-6} - \frac{2}{b-4}$;
- 2) $\frac{2x}{x^2-y^2} : \left(\frac{1}{x^2+2xy+y^2} - \frac{1}{y^2-x^2} \right)$;
- 3) $\left(\frac{2a-3}{a^2-4a+4} - \frac{a-1}{a^2-2a} \right) : \frac{a^2-2}{a^3-4a}$.

19.3.* Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{15}{x-7} - x - 7\right) \cdot \frac{7-x}{x^2-16x+64};$
- 2) $\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{a}{b^2}\right) \cdot \frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{2}{b-a};$
- 3) $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1} - \frac{a^2+1}{1-a^2}\right) : \frac{a^2+a}{(a-1)^2};$
- 4) $\left(\frac{x+2y}{x-2y} - \frac{x-2y}{x+2y} - \frac{16y^2}{x^2-4y^2}\right) : \frac{4y}{x+2y};$
- 5) $\left(\frac{3a-8}{a^2-2a+4} + \frac{1}{a+2} - \frac{4a-28}{a^3+8}\right) \cdot \frac{a^2-4}{4}.$

19.4.* Спростіть вираз:

- 1) $\frac{x^2+14x+49}{x+6} : \left(\frac{13}{x+6} - x + 6\right);$
- 2) $\left(c - \frac{2c-9}{c+8}\right) : \frac{c^2+3c}{c^2-64} + \frac{24}{c};$
- 3) $\left(\frac{36}{x^2-9} - \frac{x-3}{x+3} - \frac{3+x}{3-x}\right) : \frac{6}{3-x};$
- 4) $\left(\frac{2y-1}{y^2+2y+4} + \frac{9y+6}{y^3-8} + \frac{1}{y-2}\right) \cdot \frac{y^2-4}{18}.$

19.5.* Доведіть тотожність:

- 1) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{2b-2a}\right) : \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{4};$
- 2) $\left(\frac{8a}{4-a^2} - \frac{a-2}{a+2}\right) : \frac{a+2}{a} + \frac{2}{a-2} = -1;$
- 3) $\left(\frac{3}{36-c^2} + \frac{1}{c^2-12c+36}\right) \cdot \frac{(c-6)^2}{2} + \frac{3c}{c+6} = 2.$

19.6.* Доведіть тотожність:

- 1) $\left(\frac{b}{a^2-ab} - \frac{2}{a-b} - \frac{a}{b^2-ab}\right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{4}{a+b};$
- 2) $\frac{(a-b)^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2-a^2}\right) + \frac{3a+b}{a+b} = 3.$

19.7.* Чи залежить значення виразу від значення змінної, яка входить до нього:

- 1) $\left(\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a}\right) : \frac{3a+3}{a^2-a};$
- 2) $\left(\frac{a}{a^2-49} - \frac{1}{a+7}\right) : \frac{7a}{a^2+14a+49} - \frac{2}{a-7}?$

19.8.* Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, яка входить до нього:

$$1) \frac{3x^2 - 27}{4x^2 + 2} \cdot \left(\frac{6x+1}{x-3} + \frac{6x-1}{x+3} \right);$$

$$2) \frac{3}{2a-3} - \frac{8a^3 - 18a}{4a^2 + 9} \cdot \left(\frac{2a}{4a^2 - 12a + 9} - \frac{3}{4a^2 - 9} \right).$$

19.9.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{a - \frac{a^2}{a+1}}{a - \frac{a}{a+1}};$$

$$3) 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}};$$

$$2) \frac{a - \frac{6a-9}{a}}{1 - \frac{3}{a}};$$

$$4) \frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a+b}{b} - 1} + \frac{3 - \frac{b}{a}}{\frac{3a}{b} - 1}.$$

19.10.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{\frac{a-b}{a} + \frac{b}{a-b}}{\frac{a+b}{a} - \frac{a-b}{a}};$$

$$2) \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{a+1}}}.$$

19.11.* Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{a^2}{b^3 - ab^2} + \frac{a-b}{b^2} - \frac{1}{b} \right) : \left(\frac{a+b}{b-a} - \frac{b-a}{a+b} + \frac{6a^2}{a^2 - b^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{a+2}{4a^3 - 4a^2 + a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2 + 2a + 1}{2a^2 + a} \right) : \left(\frac{1}{1-2a} \right)^2 - \frac{8a-1}{2a^2 + a};$$

$$3) (a^2 - b^2) \cdot \left(\frac{2a^2b + 2ab^2}{7a^3 + a^2b + 7ab^2 + b^3} \cdot \frac{7a+b}{a^2 - b^2} + \frac{a-b}{a^2 + b^2} \right).$$

19.12.* Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{18y^2 + 3y}{27y^3 - 1} - \frac{3y+1}{9y^2 + 3y+1} \right) : \left(1 - \frac{3y-1}{y} - \frac{5-6y}{3y-1} \right);$$

$$2) \left(3 + \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \right) : \left(3 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}.$$

19.13.* Доведіть тотожність:

$$1) \frac{16}{(a-2)^4} : \left(\frac{1}{(a-2)^2} - \frac{2}{a^2 - 4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) - \frac{8a}{(a-2)^2} = 1;$$

$$2) \frac{a+11}{a+9} - \left(\frac{a+5}{a^2-81} + \frac{a+7}{a^2-18a+81} \right) : \left(\frac{a+3}{a-9} \right)^2 = 1;$$

$$3) \left(a^2 - b^2 - \frac{4a^2b - 4ab^2}{a+b} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \right) = (a-b)^2.$$

19.14.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної вираз $\frac{b^2+9}{3b^2-b^3} + \left(\frac{b+3}{b-3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{b-3} + \frac{6}{9-b^2} - \frac{3}{b^2+3b} \right)$ набуває додатних значень.

19.15.* Підставте замість x даний вираз і спростіть отриманий вираз:

$$1) \frac{x-a}{x-b}, \text{ якщо } x = \frac{ab}{a+b}; \quad 3) \frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}, \text{ якщо } x = \frac{ab}{a-b}.$$

$$2) \frac{a-bx}{b+ax}, \text{ якщо } x = \frac{a-b}{a+b};$$

19.16.** Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{2-a} + \frac{6a-4-a^2}{a^3-8} - \frac{2-a}{a^2+2a+4} \right) \cdot \frac{a^3+4a^2+8a+8}{4-4a+a^2-a^3};$$

$$2) \left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2} \right) : \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3};$$

$$3) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b-c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-c}} \cdot \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) : \frac{b-a-c}{abc}.$$

19.17.** Доведіть, що значення виразу є додатним при всіх допустимих значеннях змінних:

$$1) \frac{2}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{a^2+b^2+2ab} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{a^2}{4b^3} + \frac{2}{a} \right) : \left(\frac{a}{2b^2} - \frac{1}{b} + \frac{2}{a} \right) : \frac{(a-2b)^2 + 8ab}{4 + \frac{2a}{b}}.$$

19.18.** Спростіть вираз

$$\left(\frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right) : \left(\frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right).$$

19.19.** Доведіть тотожність
$$\frac{\left(\frac{a^3}{(b-1)^3} + 1 \right) \left(\frac{a}{b-1} - 1 \right)}{\left(\frac{a^2}{(b-1)^2} - 1 \right) \left(\frac{a^2}{(b-1)^2} - \frac{a}{b-1} + 1 \right)} = 1.$$

19.20.** Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

19.21.** Спростіть вираз

$$\frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right) + \frac{2}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3} \right) + \frac{2}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right).$$

19.22.* Числа a , b і c такі, що $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$.

Знайдіть значення виразу $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

19.23.* Числа a , b і c такі, що $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Доведіть, що

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

19.24.* Знайдіть суму
$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n}}}}}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n}}}}}.$$

20. Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Раціональні рівняння

Нехай задано дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та поставлено задачу знайти множину значень аргументу x , при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку говорять, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x , при яких мають зміст обидві частини рівняння.

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина всіх чисел;

- областю визначення рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ є множина $\{x \mid x \neq -2\}$;
- областю визначення рівняння $\frac{x+3}{|x|-x}=0$ є множина $\{x \mid x < 0\}$.

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина всіх чисел.

Для того щоб значення змінної x було коренем рівняння $f(x) = g(x)$, необхідно виконання умови $x \in D(f) \cap D(g)$. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 20.1). Наприклад, ви поки що не вмієте розв'язувати рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$. Проте ви сміливо можете стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2 .

Говорять, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні**.

Означення. Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають **рівносильними**, якщо множини їхніх коренів рівні.

З означення випливає, що коли потрібно довести рівносильність двох рівнянь, то достатньо довести, що кожний корінь першого рівняння є коренем другого рівняння і, навпаки, кожний корінь другого рівняння є коренем першого рівняння.

Наведемо ще приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \quad \text{і} \quad 2x = 0;$$

$$2x = 4 \quad \text{і} \quad 4x - 8 = 0;$$

$$x^2 = 1 \quad \text{і} \quad (x-1)(x+1) = 0;$$

$$x-1 = 0 \quad \text{і} \quad (x^2+1)(x-1) = 0;$$

$$(x-1)^{100} = 0 \quad \text{і} \quad (x-1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 20.1. Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.



Рис. 20.1

Доведення. Доведемо, що рівняння

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

і

$$f(x) + c = g(x) + c \quad (c \text{ — деяке число}) \quad (2)$$

рівносильні.

Нехай деяке число a є коренем рівняння (1). Тоді справджується числова рівність $f(a) = g(a)$. Отже, правильною буде й така числова рівність: $f(a) + c = g(a) + c$. Це означає, що число a є коренем рівняння (2). Таким чином, кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2).

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння (1) і (2) рівносильні. ▲

Теорема 20.2. *Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в другу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Теорема 20.3. *Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.*

Доведення теорем 20.2 і 20.3 аналогічні доведенню теореми 20.1. Проведіть доведення самостійно.

Із теореми 20.1 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $\frac{1}{x-5} + x^2 = 25 + \frac{1}{x-5}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2 = 25$, яке не рівносильне заданому.

Означення. Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають **наслідком** рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння

$$\frac{1}{x-5} + x^2 = 25 + \frac{1}{x-5}.$$

На рисунку 20.2 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями заданого рівняння, називають **сторонніми коренями** для заданого рівняння.

Наприклад, рівняння

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = 0$$

є наслідком рівняння $2x - 1 = 0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а задане рівняння має один корінь $x = \frac{1}{2}$.

У цьому випадку корінь $x = -2$ є стороннім коренем для заданого рівняння $2x - 1 = 0$.

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то наслідком рівняння, яке не має коренів, є будь-яке рівняння з тією самою змінною. Наприклад, наслідком рівняння $x^2 = -5$ є рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком другого.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному й корені якого легко знайти. Наприклад, так ви робили, розв'язуючи рівняння з вправ 1.1–1.6.

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильності не було дотримано й перейдено до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$. Прирівнявши чисельник дробу

до нуля, отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, коренями якого є числа -2 і 2 . Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє задане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2 - 4 = 0$, корені якого було перевірено.

Під час розв'язування рівняння важливо розуміти, на якому етапі перетворень було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$

було розширено область визначення даного рівняння. Таким чином, зняття обмеження $x \neq -2$ якраз і призвело до появи стороннього кореня $x = -2$.

Зазначимо, що розширення області визначення рівняння не завжди приводить до появи сторонніх коренів. Наприклад, перехід від рівняння $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ до рівняння $x^2-4=0$ є рівносильним, хоча при цьому розширюється область визначення даного рівняння.

Розглянуті рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ і $\frac{x^2-4}{x+1}=0$ є рівняннями виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

Ви знаєте, що *дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля*. Тому розв'язування рівняння вказаного виду зводиться до розв'язування рівняння $f(x)=0$ і перевірки умови $g(x) \neq 0$. Іншими словами, множина коренів рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ дорівнює перетину множин $\{x \mid f(x)=0\}$ і $\{x \mid g(x) \neq 0\}$. У таких випадках говорять, що рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Наприклад, рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ рівносильне системі $\begin{cases} x^2-4=0, \\ x+2 \neq 0. \end{cases}$

Легко встановити, що розв'язком цієї системи є число 2. Оскільки ця система рівносильна рівнянню, то, не виконуючи перевірки, можна стверджувати, що число 2 — єдиний корінь даного рівняння.

Означення. Рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами, називають **раціональним**.

Як відомо, будь-який раціональний вираз можна подати у вигляді дробу. Тому будь-яке раціональне рівняння можна звести до рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0;$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 4x-2=0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$

Перепишемо цю систему так:
$$\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} x = 0,5, \\ x \neq 0,5, \\ x \neq -0,5. \end{cases}$$

Отже, дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2 - 4x - 16}{x - 4} - x = 0$.

Розв'язання. Подано ліву частину рівняння у вигляді дробу:

$$\frac{2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 4x}{x - 4} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 16 = 0, \\ x - 4 \neq 0, \end{cases}$$

звідси отримуємо:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ або } x = -4, \\ x \neq 4; \\ x = -4. \end{cases}$$

Відповідь: -4 . ▲

Розглянемо задачу, у якій раціональне рівняння є математичною моделлю реальної ситуації.

ПРИКЛАД 3 Турист проплив на човні 3 км за течією річки та 2 км проти течії за 30 хв. Знайдіть швидкість човна в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання. Нехай швидкість човна в стоячій воді дорівнює x км/год. Тоді його швидкість за течією річки становить $(x + 2)$ км/год, а проти течії — $(x - 2)$ км/год. Турист проплив 3 км за течією за $\frac{3}{x+2}$ год, а 2 км проти течії — за $\frac{2}{x-2}$ год. Оскільки

весь шлях було пройдено за 30 хв $= \frac{1}{2}$ год, то $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} &= \frac{1}{2}; \\ \frac{3x-6+2x+4}{x^2-4} - \frac{1}{2} &= 0; \\ \frac{10x-4-x^2+4}{2(x^2-4)} &= 0; \\ \frac{10x-x^2}{2(x^2-4)} &= 0; \\ \begin{cases} 10x-x^2=0, \\ 2(x^2-4) \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x(10-x)=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}\end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ або } x = 10.$$

Корінь $x = 0$ не задовольняє змісту задачі. Отже, швидкість човна в стоячій воді дорівнює 10 км/год.

Відповідь: 10 км/год. ▲



1. Що називають областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$?
2. Які два рівняння називають рівносильними?
3. За допомогою яких перетворень даного рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
4. Яке рівняння називають наслідком даного?
5. Які корені називають сторонніми коренями даного рівняння?
6. Опишіть, як розв'язують рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.
7. Яке рівняння називають раціональним?

ВПРАВИ

20.1.° Чи є рівносильними рівняння:

1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;

2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;

3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;

- 4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$;
7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;
8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;
9) $\frac{x}{x} = 1$ і $x = x$;
10) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;
11) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;
12) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0$ і $x - 1 = 0$;
13) $\frac{x^2 - 9}{x + 2} = 0$ і $x^2 - 9 = 0$?

20.2.° Чи є рівносильними рівняння:

- 1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$; 6) $\frac{x-2}{x-2} = 0$ і $2x^2 + 3 = 0$;
2) $x^2 = x$ і $x = 1$; 7) $x^2 + 4x + 4 = 0$ і $\frac{x+2}{x-1} = 0$;
3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x+1) = 0$ і $4x^2 - 1 = 0$; 8) $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$ і $x + 3 = 0$;
4) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1} = 0$; 9) $\frac{x+1}{x+1} = 0$ і $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0$?
5) $\frac{x+1}{x+1} = 1$ і $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$;

20.3.° Складіть рівняння, рівносильне даному:

- 1) $2x - 3 = 4$; 3) $x + 6 = x - 2$; 5) $\frac{x-1}{x-1} = 1$.
2) $|x| = 1$; 4) $\frac{x-1}{x-1} = 0$;

20.4.° Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

- 1) $4x - 8 = x + 3$ і $4x - x = 8 + 3$;
2) $x^2 - 1 = 3$ і $x^2 + 5 = 9$;
3) $\frac{3x-5}{2} - \frac{x}{6} = 1$ і $9x - 15 - x = 6$;
4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ і $2x + 1 = 3$.

20.5.° Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному, якщо:

- 1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки та звести подібні доданки;
- 2) у рівнянні $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ різницю $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;
- 3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ скоротити дріб;
- 4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x ;
- 5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;
- 6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x} = 2$ помножити на x ;
- 7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

20.6.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

- 1) $x^2 = x$ і $x = 1$;
- 2) $\frac{x}{x} = 1$ і $0x = 0$;
- 3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;
- 4) $|x| = 1$ і $x^3 = 1$;
- 5) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;
- 6) $x^2 = 4$ і $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;
- 7) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$; і $x^2 - 1 = 0$?

20.7.° Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

- 1) $\frac{x^2}{x} = 1$ і $x^2 = x$;
- 2) $x^2 + 1 = 1$ і $x(x - 1) = 0$;
- 3) $\frac{x^2}{x+8} = \frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;
- 4) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$?

20.8.° Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

- 1) має один корінь;
- 2) має два корені;
- 3) має безліч коренів;
- 4) не має коренів.

20.9.* Як може змінитися (розширитися чи звужитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

- 1) рівняння $(|x| + 3)f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;
- 2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;
- 3) рівняння $(x + 1)f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;

5) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння
 $(x+1)f(x) = (x+1)g(x)$?

20.10.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{5}{x^2-4} + \frac{2x}{x+2} = 2;$$

$$5) \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{4}{1-4x^2};$$

$$2) \frac{2}{6x+1} + \frac{3}{6x-1} = \frac{30x+9}{36x^2-1};$$

$$6) \frac{7}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x+2)^2};$$

$$3) \frac{6x+14}{x^2-9} + \frac{7}{x^2+3x} = \frac{6}{x-3};$$

$$7) \frac{2x-1}{x+4} - \frac{3x-1}{4-x} = \frac{6x+64}{x^2-16} + 4;$$

$$4) \frac{2y^2+5}{1-y^2} + \frac{y+1}{y-1} = \frac{4}{y+1};$$

$$8) \frac{2x-6}{x^2-36} - \frac{x-3}{x^2-6x} - \frac{x-1}{x^2+6x} = 0.$$

20.11.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x} = \frac{x^2+27}{x^2-1};$$

$$4) \frac{2x^2-2x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = \frac{x+2}{x-2};$$

$$2) \frac{3x+1}{3x-1} - \frac{3x-1}{3x+1} = \frac{6}{1-9x^2};$$

$$5) \frac{7}{x^2+2x} + \frac{x+1}{x^2-2x} = \frac{x+4}{x^2-4};$$

$$3) \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{5}{x-2};$$

$$6) \frac{x^2-9x+50}{x^2-5x} = \frac{x+1}{x-5} + \frac{x-5}{x}.$$

20.12.* Моторний човен проплив 8 км за течією річки й повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 18 км/год.

20.13.* Теплохід пройшов 28 км проти течії річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 4 хв менше. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки дорівнює 1 км/год.

20.14.* Щоб наповнити басейн водою через одну трубу, треба в 1,5 раза більше часу, ніж через другу. Якщо ж відкрити водночас обидві труби, то басейн наповниться за 6 год. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу окремо?

20.15.* Два екскаватори викопали котлован за 8 год. Перший екскаватор може викопати такий самий котлован у 4 рази швидше, ніж другий. За скільки годин може викопати такий котлован кожний екскаватор, працюючи самостійно?

20.16.* Човен проплив 6 км проти течії річки та 12 км за течією, витративши на весь шлях 2 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 3 км/год.

20.17." Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50};$$

$$2) \frac{2}{x^2-9} - \frac{1}{2x^2-12x+18} = \frac{3}{2x^2+6x};$$

$$3) \frac{9x+12}{x^3-64} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x^2+4x+16}.$$

20.18." Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{4y+24}{5y^2-45} + \frac{y+3}{5y^2-15y} = \frac{y-3}{y^2+3y};$$

$$2) \frac{y+2}{8y^3+1} - \frac{1}{4y+2} = \frac{y+3}{8y^2-4y+2}.$$

21. Раціональні рівняння з параметрами

Розглянемо лінійне рівняння $ax = 1$.

Якщо $a = 0$, то дане рівняння коренів не має. Якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{1}{a}$.

Розв'язуючи це рівняння, буквам a і x надавали різного змісту: буква x відігравала роль невідомого числа, а буква a — роль відомого числа. У таких випадках говорять, що a є **параметром**, а саме рівняння називають **рівнянням з параметром**.

Підкреслимо подвійну природу параметра: з одного боку, ми вважаємо параметр фіксованим числом, з другого — **це число невідоме**. Саме це не дозволяє, розв'язуючи рівняння $ax = 1$, просто записати у відповідь $x = \frac{1}{a}$. Ми змушені розглядати дві можливості:

$a = 0$ і $a \neq 0$.

Хоча термін «параметр» для вас новий, із ситуаціями, у яких фіксоване число позначалося буквою, ви вже стикалися. Наприклад, лінійним рівнянням називають рівняння виду $ax = b$. Тут a і b — параметри. Лінійну функцію задають формулою $y = kx + b$, де k і b — параметри.

Вам не раз доводилося розв'язувати рівняння з параметрами (задачі 1.12, 1.13, 15.32, 15.33). Процес розв'язування полягав у побудові алгоритму, який давав змогу для будь-якого значення параметра знаходити відповідну множину коренів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 + ax - 2}{x + 2} = x - a$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{x^2 + ax - 2 - (x + 2)(x - a)}{x + 2} = 0$;

$$\frac{x^2 + ax - 2 - x^2 + ax - 2x + 2a}{x + 2} = 0; \quad \frac{2ax - 2x + 2a - 2}{x + 2} = 0.$$

Отримане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 2ax - 2x + 2a - 2 = 0, \\ x \neq -2. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x(a - 1) = 1 - a, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Якщо $a = 1$, то маємо: $0x = 0$, тобто коренем рівняння системи є будь-яке число. Оскільки $x \neq -2$, то при $a = 1$ множиною коренів заданого рівняння є $\{x \mid x \neq -2\}$.

Якщо $a \neq 1$, то отримуємо:

$$\begin{cases} x = \frac{1-a}{a-1}, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси $x = -1$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то коренем рівняння є будь-яке число, крім -2 ; якщо $a \neq 1$, то $x = -1$. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{b(x+1)}{x} + \frac{b+1}{x-1} = b$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{b(x+1)(x-1) + x(b+1) - bx(x-1)}{x(x-1)} = 0$;

$$\frac{bx^2 - b + bx + x - bx^2 + bx}{x(x-1)} = 0; \quad \frac{x(2b+1) - b}{x(x-1)} = 0.$$

Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x(2b+1) = b, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Якщо $b = -\frac{1}{2}$, то рівняння системи, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} x = \frac{b}{2b+1}, \\ x(x-1) \neq 0. \end{cases}$$

Знайдемо ті значення параметра b , при яких значення виразу $\frac{b}{2b+1}$ дорівнює 0 або 1.

Рівність $\frac{b}{2b+1} = 0$ виконується тільки при $b = 0$, а рівність $\frac{b}{2b+1} = 1$ виконується тільки при $b = -1$.

Отже, при $b = 0$ або $b = -1$ число $\frac{b}{2b+1}$ не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: якщо $b = -\frac{1}{2}$, або $b = 0$, або $b = -1$, то рівняння коренів не має; якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, $b \neq 0$ і $b \neq -1$, то $x = \frac{b}{2b+1}$.

Цю відповідь можна записати ще й так: якщо $b \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то коренів немає; якщо $b \notin \left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\}$, то $x = \frac{b}{2b+1}$. ▲

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x-a)(x+2)}{x-1} = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Треба знайти всі значення параметра a , при яких множина коренів даного рівняння є одноелементною.

Переходимо до рівносильної системи:

$$\begin{cases} (x-a)(x+2) = 0, \\ x-1 \neq 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x = a \text{ або } x = -2, \\ x \neq 1. \end{cases}$

При будь-якому значенні параметра a задане рівняння має корінь $x = -2$. Для того щоб цей корінь залишався єдиним, потрібно, щоб корінь рівняння $x = a$:

- або дорівнював тому самому кореню, який уже знайдено;
- або не задовольняв умову $x \neq 1$.

Звідси $a = -2$ або $a = 1$.

Відповідь: $a = -2$ або $a = 1$. ▲

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра t рівняння $t(x-1) = 0$ і $x + t^2 + t = 1$ є рівносильними?

Розв'язання. При будь-якому значенні параметра t число 1 є коренем першого рівняння. Для рівносильності рівнянь необхід-

но, щоб число 1 було коренем і другого рівняння. Підставимо це значення змінної до другого рівняння:

$$1 + m + m^2 = 1;$$

$$m(m + 1) = 0;$$

$$m = 0 \text{ або } m = -1.$$

Тепер можна зробити висновок: якщо шукані значення параметра m існують, то їх треба шукати серед елементів множини $\{-1, 0\}$.

Якщо $m = -1$, то задані рівняння набувають вигляду $(-1)(x - 1) = 0$ і $x + 1 - 1 = 1$. Ці рівняння є рівносильними.

При $m = 0$ маємо: $0(x - 1) = 0$ і $x = 1$. Очевидно, що ці рівняння не рівносильні.

Відповідь: $m = -1$. ▲



1. У чому полягає подвійна природа параметра?
2. Під час опановування яких понять ви стикалися з параметрами?
3. У чому полягає процес розв'язування рівняння з параметрами?

ВПРАВИ

21.1.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-a}{x-1} = 0;$

3) $\frac{a(x-1)}{x-1} = 0;$

5) $\frac{x-2a}{x+a} = 0;$

2) $\frac{x+2}{x-a} = 0;$

4) $\frac{a(x-a)}{x-3} = 0;$

6) $\frac{a(x-4)}{x-a} = 0.$

21.2.* Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+b}{x-5} = 0;$

3) $\frac{x-3b}{x+b+2} = 0;$

2) $\frac{x+4}{x-2b} = 0;$

4) $\frac{(b-1)x}{x+b} = 0.$

21.3.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-1}{x-a} = 0;$

4) $\frac{(x-4)(x+2)}{x-a} = 0;$

7) $\frac{x+a}{(x-3a)(x+5)} = 0;$

2) $\frac{x(x-a)}{x+2} = 0;$

5) $\frac{x-a}{(x-1)(x+3)} = 0;$

8) $\frac{(x-a)(x-2)}{x-2a} = 0.$

3) $\frac{(x-a)(x-6)}{x-7} = 0;$

6) $\frac{x^2-a^2}{x+4} = 0;$

21.4.* Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{(x-2)(x-3)}{x+b} = 0; \quad 3) \frac{x+2b}{(x-b+1)x} = 0;$$

$$2) \frac{x+b}{(x+1)(x-4)} = 0; \quad 4) \frac{(x+2b)(x-3)}{x-b} = 0.$$

21.5.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x-2}{x-a} = a-1; \quad 4) \frac{3x+1}{(x-1)(x+a)} + \frac{1}{x+a} = \frac{3}{x-1};$$

$$2) \frac{ax-2}{x-1} = a + \frac{1}{x}; \quad 5) \frac{a}{x+3} + \frac{3}{x+2} = \frac{a^2+2a}{(x+2)(x+3)};$$

$$3) \frac{ax^2-3}{x^2-1} = a + \frac{2}{x-1}; \quad 6) \frac{a^2-1}{x-2} - \frac{a^3-x+10}{(x+a)(x-2)} = \frac{4}{x+a}.$$

21.6.** Для кожного значення параметра b розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{bx+3}{x+2} = b - \frac{1}{x-1}; \quad 3) \frac{1}{x+1} + \frac{2b-b^2}{(x+1)(x-2b)} = \frac{b}{2b-x};$$

$$2) \frac{bx^2-2}{x^2-4} = b+1 + \frac{1-x}{x+2}; \quad 4) \frac{b^2}{x+4} - \frac{3b^2+b+39}{(x+4)(3-x)} = \frac{9}{x-3}.$$

21.7.** При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

$$1) \frac{x-1}{x-a} = 0; \quad 4) \frac{(x-2)(x-a)}{x-2a} = 0;$$

$$2) \frac{(x+1)(x-5)}{x-a} = 0; \quad 5) \frac{(x-1)(x+3)}{(x-a)(x+3a)} = 0;$$

$$3) \frac{(x-a)(x+3a)}{x-3} = 0; \quad 6) \frac{x^2-a^2}{(x+1)(x+2)} = 0?$$

21.8.** При яких значеннях параметра b рівняння має єдиний розв'язок:

$$1) \frac{(x+3)(x-8)}{x+b} = 0; \quad 3) \frac{(x-2)(x+1)}{(x+b)(x-2b)} = 0;$$

$$2) \frac{(x+2b)(x-4b)}{x-2} = 0; \quad 4) \frac{(x+b)(x-5b)}{(x-3)(x+5)} = 0?$$

21.9.** При яких значеннях параметра a дані рівняння є рівносильними:

$$1) \frac{x-1}{x-a} = 0 \quad \text{і} \quad x-1 = 0;$$

$$2) \frac{x(x-a)}{x-2} = 0 \quad \text{і} \quad x = 0;$$

У довідковій літературі ви можете знайти таку інформацію: «Маса Венери дорівнює $4,9 \cdot 10^{24}$ кг. Маса Марса дорівнює $6,423 \cdot 10^{23}$ кг. Площа поверхні Місяця складає $3,8 \cdot 10^7$ км²». Числа, що виражають ці величини, записано в так званому **стандартному вигляді**.

Означення. **Стандартним виглядом числа** називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і $n \in \mathbb{Z}$.

Число n називають **порядком числа**, записаного в стандартному вигляді. Наприклад, порядок числа, яке виражає масу Сонця в кілограмах, дорівнює 30, а порядок числа, що виражає масу атома Гідрогену в кілограмах, дорівнює -27.

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Наприклад, $171,25 = 1,7125 \cdot 10^2$; $0,00958 = 9,58 \cdot 10^{-3}$. Проте на практиці стандартний вигляд числа зазвичай використовують для запису великих і малих значень величин. При цьому порядок числа дає уявлення про величину. Наприклад, якщо порядок числа m дорівнює 3, тобто $m = a \cdot 10^3$, то з урахуванням того, що $1 \leq a < 10$, отримуємо: $10^3 \leq m < 10^4$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}$; 2) $1,2^{-2}$; 3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0$.

Розв'язання. 1) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{4}{7}} = \frac{7}{4}$.

І взагалі, якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2) $1,2^{-2} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

3) $3^{-3} \cdot 15 + 6^{-2} \cdot 8 - 4,3^0 = \frac{1}{3^3} \cdot 15 + \frac{1}{6^2} \cdot 8 - 1 =$
 $= \frac{1}{27} \cdot 15 + \frac{1}{36} \cdot 8 - 1 = \frac{5}{9} + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{2}{9}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Подайте вираз $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ у вигляді раціонального дробу.

Розв'язання. $(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2}) = \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) =$
 $= \frac{1}{(a-b)^2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{(b-a)^2} \cdot \frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} = \frac{b+a}{a^2 b^2 (b-a)} = \frac{b+a}{a^2 b^3 - a^3 b^2}$. ▲

ПРИКЛАД 3 Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 564 000 000; 2) 0,0036.

Розв'язання. 1) $564\,000\,000 = 5,64 \cdot 100\,000\,000 = 5,64 \cdot 10^8$.

2) $0,0036 = 3,6 \cdot 0,001 = 3,6 \cdot \frac{1}{1000} = 3,6 \cdot \frac{1}{10^3} = 3,6 \cdot 10^{-3}$. ▲



- Чому дорівнює a^{-n} , якщо a — будь-яке число, відмінне від нуля, і $n \in \mathbb{N}$?
- Чому дорівнює нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа?
- Що називають стандартним виглядом числа?
- У яких межах має знаходитися число a , щоб запис $a \cdot 10^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, був стандартним виглядом числа?
- Як у записі числа в стандартному вигляді $a \cdot 10^n$ називають число n ?

ВПРАВИ

22.1.° Якому з виразів дорівнює вираз a^{-6} :

- 1) $-a^6$; 2) $\frac{1}{a^{-6}}$; 3) $\frac{1}{a^6}$; 4) $-\frac{1}{a^6}$?

22.2.° Подайте степінь у вигляді дробу:

- 1) 3^{-8} ; 3) a^{-9} ; 5) 12^{-1} ; 7) $(a - b)^{-2}$;
2) 5^{-6} ; 4) d^{-3} ; 6) m^{-1} ; 8) $(2x - 3y)^{-4}$.

22.3.° Замініть степінь дробом:

- 1) 14^{-4} ; 2) p^{-20} ; 3) $(m + n)^{-1}$; 4) $(4c - 5d)^{-10}$.

22.4.° Подайте дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником або у вигляді добутку степенів:

- 1) $\frac{1}{7^2}$; 3) $\frac{1}{c}$; 5) $\frac{a}{b}$; 7) $\frac{(a+b)^5}{(c-d)^8}$;
2) $\frac{1}{x^5}$; 4) $\frac{m}{n^3}$; 6) $\frac{x^6}{y^7}$; 8) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

22.5.° Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником або добутком степенів:

- 1) $\frac{1}{11^{11}}$; 2) $\frac{1}{k^4}$; 3) $\frac{x^2}{y}$; 4) $\frac{m^6}{n^6}$; 5) $\frac{(2x-y)^3}{(x-2y)^9}$.

22.6.° Подайте числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$

у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

22.7.° Подайте у вигляді степеня одноцифрового натурального числа дріб:

1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{216}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{1}{128}$.

22.8.° Подайте у вигляді степеня з основою 10 число:

1) 0,1; 2) 0,01; 3) 0,0001; 4) 0,000001.

22.9.° Подайте числа 1, 3, 9, 27, 81, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

22.10.° Обчисліть:

1) 5^{-2} ; 3) $(-9)^{-2}$; 5) 1^{-24} ; 7) $(-1)^{-17}$; 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
2) 2^{-4} ; 4) $0,2^{-3}$; 6) $(-1)^{-16}$; 8) $\left(\frac{7}{8}\right)^0$; 10) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

22.11.° Знайдіть значення виразу:

1) 20^{-2} ; 2) $0,3^{-1}$; 3) $(-6)^{-3}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 5) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

22.12.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 4) $9 \cdot 0,1^{-1}$;
2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 5) $0,5^{-2} \cdot 4^{-1}$;
3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2,3)^0 - 5^{-2}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

22.13.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $2^{-2} + 2^{-1}$; 3) $0,03^0 + 0,7^0$;
2) $3^{-2} - 6^{-1}$; 4) $(9 \cdot 3^{-3} - 12^{-1})^{-1}$?

22.14.° Яке з даних чисел записане в стандартному вигляді:

1) $12 \cdot 10^4$; 2) $1,2 \cdot 10^4$; 3) $0,12 \cdot 10^4$?

22.15.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

1) 3400; 4) 0,000008; 7) $0,86 \cdot 10^3$;
2) 15; 5) 0,73; 8) $0,23 \cdot 10^4$;
3) 0,0046; 6) $250 \cdot 10^2$; 9) $9300 \cdot 10^5$.

22.16.° Використовуючи стандартний вигляд числа, запишіть:

- 1) швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с;
- 2) висота Говерли, найвищої гори України, дорівнює 2061 м;
- 3) площа України становить 603 700 км²;
- 4) середня відстань від Землі до Сонця становить 149,6 млн км;
- 5) атмосферний тиск на висоті 100 км становить 0,032 Па;
- 6) діаметр молекули води дорівнює 0,00000028 мм.

22.17.° Запишіть число в стандартному вигляді та вкажіть порядок числа:

- 1) 45 000; 3) 0,00024; 5) $0,59 \cdot 10^8$;
- 2) 260; 4) 0,032; 6) $526 \cdot 10^4$.

22.18.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

- 1) $1,6 \cdot 10^3$; 2) $5,7 \cdot 10^6$; 3) $2,1 \cdot 10^{-2}$; 4) $1,1 \cdot 10^{-5}$.

22.19.° Число подано в стандартному вигляді. Запишіть його у вигляді натурального числа або десяткового дробу:

- 1) $2,4 \cdot 10^2$; 2) $4,8 \cdot 10^5$; 3) $1,4 \cdot 10^{-3}$; 4) $8,6 \cdot 10^{-4}$.

22.20.° Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

22.21.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + 9^0 - (-2)^3 + \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} \cdot (-1,5)^{-3}$;
- 2) $(2,5)^{-2} - (8^5)^0 + \left(1\frac{2}{3}\right)^{-3} + 0,1^{-1}$.

22.22.° Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; 2) 4^{-1} , 4^3 , 4^0 , 4^{-2} .

22.23.° Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

- 1) 7^{-2} , 7^2 , 7^{-1} , 7^0 ; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

22.24.° Порівняйте значення виразів:

- 1) 12^0 і $(-6)^0$; 4) $3^{-1} \cdot 7^{-1}$ і 21^{-1} ;
- 2) $0,2^3$ і $0,2^{-3}$; 5) $5^{-1} - 7^{-1}$ і 2^{-1} ;
- 3) 4^6 і $0,25^{-6}$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ і $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

22.25.° Порівняйте значення виразів:

- 1) 3^{-2} і $(-3)^0$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2}$.
- 2) $3^{-1} + 2^{-1}$ і 5^{-1} ;

22.26.° Подайте у вигляді дробу вираз:

- 1) $ab^{-1} + a^{-1}b$;
- 2) $3a^{-1} + ab^{-2}$;
- 3) $m^2n^2(m^{-3} - n^{-3})$;
- 4) $(a+b)^{-1} \cdot (a^{-1} + b^{-1})$;
- 5) $(c^{-2} - d^{-2}) : (c + d)$;
- 6) $(xy^{-2} + x^{-2}y) \cdot \left(\frac{x^2 - xy + y^2}{x} \right)^{-1}$.

22.27.° Подайте у вигляді дробу вираз:

- 1) $a^{-2} + a^{-3}$;
- 2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
- 3) $(c^{-1} - d^{-1}) \cdot (c - d)^{-2}$;
- 4) $(x^{-2} + y^{-2}) \cdot (x^2 + y^2)^{-1}$.

22.28.° Доведіть, що при будь-якому $n \in \mathbb{Z}$:

- 1) якщо $a > 0$, то $a^n > 0$;
- 2) якщо $a < 0$, то $a^n > 0$ при парному n і $a^n < 0$ при непарному n .

22.29.° Чи є правильною нерівність $a^n > a^{-n}$, якщо:

- 1) $a > 1$, $n \in \mathbb{N}$;
- 2) $0 < a < 1$, $n \in \mathbb{N}$?

22.30.° Порядок деякого натурального числа дорівнює 4. Скільки цифр містить десятковий запис цього числа?

22.31.° Десятковий запис деякого натурального числа складається із семи цифр. Чому дорівнює порядок цього числа?

22.32.° Яке число більше:

- 1) $9,7 \cdot 10^{11}$ або $1,2 \cdot 10^{12}$;
- 2) $3,6 \cdot 10^{-5}$ або $4,8 \cdot 10^{-6}$;
- 3) $2,34 \cdot 10^6$ або $0,23 \cdot 10^7$;
- 4) $42,7 \cdot 10^{-9}$ або $0,072 \cdot 10^{-7}$?

22.33.° Яке число менше:

- 1) $6,1 \cdot 10^{19}$ або $6,15 \cdot 10^{18}$;
- 2) $1,5 \cdot 10^{-9}$ або $0,9 \cdot 10^{-8}$?

22.34.° У таблиці наведено відстані від Сонця до планет Сонячної системи.

Планета	Відстань, км
Венера	$1,082 \cdot 10^8$
Земля	$1,495 \cdot 10^8$
Марс	$2,280 \cdot 10^8$
Меркурій	$5,790 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,427 \cdot 10^9$
Уран	$2,871 \cdot 10^9$
Юпітер	$7,781 \cdot 10^8$

- 1) Яка планета знаходиться на найменшій відстані від Сонця, а яка — на найбільшій?
- 2) Яка з планет, Марс або Сатурн, знаходиться далі від Сонця?
- 3) Складіть таблицю, записавши в лівому стовпці назви планет у порядку збільшення відстані від них до Сонця, а в правому — відстані від них до Сонця, виражені в мільйонах кілометрів.

22.35.° У таблиці наведено маси атомів деяких хімічних елементів.

Елемент	Маса атома, кг	Елемент	Маса атома, кг
Нітроген	$2,32 \cdot 10^{-26}$	Аурум	$3,27 \cdot 10^{-25}$
Алюміній	$4,48 \cdot 10^{-26}$	Купрум	$1,05 \cdot 10^{-25}$
Гідроґен	$1,66 \cdot 10^{-27}$	Натрій	$3,81 \cdot 10^{-26}$
Гелій	$6,64 \cdot 10^{-27}$	Станум	$1,97 \cdot 10^{-25}$
Ферум	$9,28 \cdot 10^{-26}$	Уран	$3,95 \cdot 10^{-25}$

- 1) Маса атома якого з наведених елементів найменша, а якого — найбільша?
- 2) Маса атома якого з елементів, Купруму чи Натрію, більша?
- 3) Складіть таблицю, упорядкувавши елементи в порядку зменшення маси їхніх атомів.

22.36.° У таблиці наведено запаси деяких речовин у мінеральних ресурсах світу.

Речовина	Запаси, т	Речовина	Запаси, т
Алюміній	$1,1 \cdot 10^9$	Нікель	$6,8 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1,3 \cdot 10^6$	Олово	$4,76 \cdot 10^6$
Залізо	$8,8 \cdot 10^{10}$	Ртуть	$1,15 \cdot 10^5$
Золото	$1,1 \cdot 10^4$	Фосфати	$1,98 \cdot 10^{10}$
Марганець	$6,35 \cdot 10^8$	Хром	$4,4 \cdot 10^9$
Мідь	$2,8 \cdot 10^9$	Цинк	$1,12 \cdot 10^8$

- 1) Запаси якої з наведених речовин найбільші, а якої — найменші?
- 2) Запаси якої з речовин, нікелю чи цинку, більші?
- 3) Складіть таблицю мінеральних ресурсів, розмістивши речовини в порядку зменшення їхніх запасів.

23. Властивості степеня із цілим показником

У 7 класі ви вивчали властивості степеня з натуральним показником. Вони залишаються справедливими й для степеня з будь-яким цілим показником.

Для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \quad (2)$$

Для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (3)$$

Рівність (1) виражає **основну властивість степеня**. Доведемо її.

Для натуральних m і n цю рівність уже було доведено в курсі алгебри 7 класу.

Розглянемо тепер випадок, коли m і n — цілі від'ємні числа.

Якщо m і n — цілі від'ємні числа, то $-m$ і $-n$ — натуральні числа. Тоді $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m+(-n)} = a^{-(m+n)}$.

$$\text{Маємо: } a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}.$$

Щоб завершити доведення основної властивості степеня, треба також розглянути такі випадки: один із показників степеня m або n від'ємний, а другий — додатний; один або обидва показники дорівнюють нулю. Розгляньте ці випадки самостійно.

Рівності (2) і (3) доводять аналогічно.

З основної властивості степеня випливає такий важливий наслідок: *для будь-якого $a \neq 0$ та будь-яких цілих m і n виконується рівність*

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (4)$$

$$\text{Справді, } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

Із властивостей (2) і (3) можна отримати ще одну властивість степеня із цілим показником: *для будь-яких $a \neq 0$ і $b \neq 0$ та будь-якого цілого n виконується рівність*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad (5)$$

$$\text{Справді, } \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a \cdot b^{-1})^n = a^n \cdot (b^{-1})^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Властивості (1)–(5) називають **властивостями степеня із цілим показником**.

ПРИКЛАД 1 Подайте у вигляді степеня з основою a вираз $(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6$.

Розв'язання. Застосувавши послідовно правила піднесення степеня до степеня (властивість (2)), множення і ділення степенів з однаковими основами (властивості (1) і (4)), отримуємо:

$$(a^{-4})^{-2} \cdot a^{-7} : a^6 = a^{-4 \cdot (-2)} \cdot a^{-7} : a^6 = a^8 \cdot a^{-7} : a^6 = a^{8+(-7)-6} = a^{-5}. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу:

$$1) 16^{-9} \cdot 8^{12}; \quad 2) \frac{6^{-3}}{18^{-3}}; \quad 3) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5}.$$

Розв'язання. 1) Подавши числа 16 і 8 у вигляді степенів з основою 2, отримуємо:

$$16^{-9} \cdot 8^{12} = (2^4)^{-9} \cdot (2^3)^{12} = 2^{-36} \cdot 2^{36} = 2^0 = 1.$$

2) Використовуючи правило піднесення дробу до степеня (властивість (5)), маємо: $\frac{6^{-3}}{18^{-3}} = \left(\frac{6}{18}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$.

$$\begin{aligned} 3) \left(1\frac{11}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^{-5} &= \left(\frac{36}{25}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\left(\frac{6}{5}\right)^2\right)^{-8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \\ &= \left(\frac{6}{5}\right)^{-16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-15} = \frac{5}{6}. \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3$;

$$2) (a^{-2} + 9)(a^{-2} - 4) - (a^{-2} + 6)(a^{-2} - 6).$$

Розв'язання

$$1) 0,6m^2n^{-6} \cdot \frac{1}{3}m^{-4}n^3 = \left(0,6 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot (m^2 \cdot m^{-4}) \cdot (n^{-6} \cdot n^3) = 0,2m^{-2}n^{-3}.$$

$$\begin{aligned} 2) (a^{-2} + 9)(a^2 - 4) - (a^{-2} + 6)(a^2 - 6) &= \\ &= a^{-4} - 4a^{-2} + 9a^2 - 36 - a^{-4} + 36 = 5a^2. \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 4 Виконайте множення $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8})$ і запишіть результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. $(3,4 \cdot 10^{14}) \cdot (7 \cdot 10^{-8}) = (3,4 \cdot 7) \cdot (10^{14} \cdot 10^{-8}) = 23,8 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10 \cdot 10^6 = 2,38 \cdot 10^7. \blacktriangle$



Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.

ВПРАВИ

23.1.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $9^5 \cdot 9^{-7}$; 4) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$; 7) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
 2) $10^{-8} \cdot 10^{12}$; 5) $(17^4)^{-12} \cdot (17^{-6})^{-8}$; 8) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$.
 3) $3^{-18} : 3^{-21}$; 6) $\frac{6^{-5} \cdot (6^{-3})^4}{(6^{-7})^2 \cdot 6^{-3}}$;

23.2.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $5^{-7} : 5^{-6} \cdot 5^3$; 3) $0,8^{-4} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^{-4}$;
 2) $\frac{4^{-7} \cdot (4^{-5})^3}{(4^{-3})^7}$; 4) $\frac{11^{-2}}{22^{-2}}$.

23.3.° Спростіть вираз:

- 1) $3a^{-3} \cdot 4a^{-4}$; 5) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c$; 9) $0,2c^{-3}d^5 \cdot 1,5c^{-2}d^{-5}$;
 2) $\frac{10b^{-4}}{15b^{-5}}$; 6) $\frac{kp^{-6}}{k^4p^4}$; 10) $4x^8 \cdot (-3x^{-2}y^4)^{-2}$;
 3) $(2c^{-6})^4$; 7) $(c^{-6}d^2)^{-7}$; 11) $\frac{13m^{-10}}{12n^{-8}} \cdot \frac{27n}{26m^2}$;
 4) $m^{-2}n \cdot mn^{-2}$; 8) $\frac{1}{3}a^{-3}b^{-6} \cdot \frac{6}{7}a^7b^4$; 12) $\frac{18p^{-6}k^2}{7} : \frac{15k^{-2}}{p^6}$.

23.4.° Спростіть вираз:

- 1) $2a^{-5}b^2 \cdot 3a^{-2}b^{-5}$; 3) $\frac{3,6a^2b}{0,9a^3b^{-3}}$; 5) $\frac{25x^{-3}}{y^{-4}} \cdot \frac{y^4}{5x^{-7}}$;
 2) $\left(\frac{1}{2}mn^{-3}\right)^{-2}$; 4) $0,8a^{-6}b^8 \cdot 5a^{10}b^{-8}$; 6) $28c^3d^{-2} \cdot (2cd^{-1})^{-2}$.

23.5.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $8^{-3} \cdot 2^7$; 5) $25^{-4} : (0,2^{-3})^{-2}$;
 2) $27^{-2} : 9^{-4}$; 6) $\frac{(-36)^{-3} \cdot 6^8}{216^{-5} \cdot (-6)^{18}}$;
 3) $100^{-2} : 1000^{-5} \cdot 0,01^6$; 7) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$;
 4) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{-3}$; 8) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$.

23.6.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $9^{-4} \cdot 27^2$;
- 2) $32^{-5} : 64^{-4}$;
- 3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
- 4) $8^{-2} : 0,5^4$;
- 5) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$;
- 6) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

23.7.° Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

- 1) $-2,4a^{-4}b^3 \cdot (-2a^{-3}c^{-5})^{-3}$;
- 2) $(-10x^{-2}yz^{-8})^{-2} \cdot (0,1yz^{-4})^{-2}$;
- 3) $1\frac{7}{9}m^{-6}n \cdot \left(1\frac{1}{3}m^{-1}n^{-4}\right)^{-3}$;
- 4) $\left(-\frac{1}{6}a^{-3}b^{-6}\right)^{-3} \cdot (-6a^2b^9)^{-2}$;
- 5) $\left(\frac{7p^{-3}}{5k^{-1}}\right)^{-2} \cdot 49m^{-6}n^4$;
- 6) $\left(\frac{4x^{-5}}{3y^2}\right)^{-3} \cdot (16x^{-6}y^4)^2$.

23.8.° Виконайте дії та зведіть отриманий вираз до вигляду, який не містить степеня з від'ємним показником:

- 1) $3,6a^{-8}b^4 \cdot (-3a^{-3}b^{-7})^{-2}$;
- 2) $1\frac{9}{16}x^{-6}y^2 \cdot \left(1\frac{1}{4}x^{-1}y^{-3}\right)^{-3}$;
- 3) $\left(\frac{5m^{-4}}{6n^{-1}}\right)^{-3} \cdot 125m^{-10}n^2$;
- 4) $\left(\frac{7a^{-6}}{b^5}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^4$.

23.9.° Винесіть за дужки степінь з основою a та найменшим із даних показників:

- 1) $a^3 - 2a^4$;
- 2) $a^{-3} - 2a^{-4}$;
- 3) $a^3 - 2a^{-4}$.

23.10.° Винесіть за дужки степінь з основою b і найменшим із даних показників:

- 1) $b^3 + 3b^2$;
- 2) $b^{-3} + 3b^{-2}$;
- 3) $b^{-3} + 3b^2$.

23.11.° Подайте у вигляді добутку вираз:

- 1) $a^{-2} - 4$;
- 2) $a^{-4}b^{-6} - 1$;
- 3) $25x^{-8}y^{-12} - z^{-2}$;
- 4) $a^{-3} + b^{-3}$;
- 5) $m^{-4} - 6m^{-2}p^{-1} + 9p^{-2}$;
- 6) $a^{-8} - 49a^{-2}$.

23.12.° Подайте у вигляді добутку вираз:

- 1) $x^{-4} - 25$;
- 2) $m^{-6} - 8n^{-3}$;
- 3) $a^{-10} + 8a^{-5}b^{-7} + 16b^{-14}$;
- 4) $a^{-4} - a^{-2}$.

 **23.13.°** Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,8 \cdot 10^4) \cdot (6 \cdot 10^3)$;
- 2) $(3 \cdot 10^6) \cdot (5,2 \cdot 10^{-9})$;

3) $\frac{5,4 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^8};$

4) $\frac{1,7 \cdot 10^{-6}}{3,4 \cdot 10^{-4}}.$

 **23.14.°** Виконайте обчислення та запишіть результат у стандартному вигляді:

1) $(1,6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^7);$

3) $\frac{7 \cdot 10^{-4}}{1,4 \cdot 10^{-6}};$

2) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (1,8 \cdot 10^{-1});$

4) $\frac{6,4 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-2}}.$

23.15.° Середня відстань від Землі до Сонця дорівнює $1,5 \cdot 10^8$ км, а швидкість світла — $3 \cdot 10^8$ м/с. За скільки хвилин світло від Сонця досягне Землі? Відповідь округліть до одиниць.

23.16.° Густина міді дорівнює $8,9 \cdot 10^3$ кг/м³. Знайдіть масу мідної плити, довжина якої $2,5 \cdot 10^{-1}$ м, ширина — 12 см, а висота — 0,02 м.

23.17.° Маса Землі дорівнює $6 \cdot 10^{24}$ кг, а маса Місяця — $7,4 \cdot 10^{22}$ кг. У скільки разів маса Місяця менша від маси Землі? Відповідь округліть до одиниць.

23.18.* Доведіть тотожність

$$a^{-8} - b^{-8} = (a^{-1} - b^{-1}) (a^{-1} + b^{-1}) (a^{-2} + b^{-2}) (a^{-4} + b^{-4}).$$

23.19.* Спростіть вираз:

1) $(a^{-4} + 3)(a^{-4} - 3) - (a^{-4} + 2)^2;$ 3) $\frac{2x^{-2} + y^{-2}}{3x^{-2} - 3x^{-1}y^{-1}} - \frac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}};$

2) $\frac{m^{-2} - n^{-2}}{m^{-1} + n^{-1}};$

4) $\frac{a^{-5} + b^{-5}}{a^{-6}} : \frac{a^{-3}b^{-5} + a^{-8}}{a^{-4}}.$

23.20.* Спростіть вираз:

1) $(x^{-2} - 1)^2 - (x^{-2} - 4)(x^{-2} + 4);$

3) $\frac{5m^{-2} + n^{-2}}{4m^{-3} + 4m^{-1}n^{-2}} - \frac{m^{-1}}{m^{-2} + n^{-2}};$

2) $\frac{a^{-2} - 10a^{-1}b^{-1} + 25b^{-2}}{a^{-1} - 5b^{-1}};$

4) $\frac{b^{-1} + 3c^{-1}}{c^{-2}} \cdot \frac{bc}{b^{-2}c^{-1} + 3b^{-1}c^{-2}}.$

23.21.* Побудуйте графік функції:

1) $y = (x + 3)^0;$

3) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^0;$

5) $y = x \cdot \left(\frac{x}{x+3}\right)^{-1};$

2) $y = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{-1};$

4) $y = \left(\frac{x+2}{x^2-4}\right)^{-1};$

6) $y = \frac{(x^2-1)^0}{x^{-1}}.$

23.22.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = (x + 2)^0; \quad 2) y = \left(\frac{x-3}{x^2-9} \right)^{-1}; \quad 3) y = (x-1) \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-1}.$$

23.23.* Назвіть порядок числа x , якщо:

- 1) $100 \leq x < 1000$; 3) $0,01 \leq x < 0,1$;
2) $10\,000 \leq x < 100\,000$; 4) $0,0001 \leq x < 0,001$.

23.24.* Назвіть порядок числа x , якщо:

- 1) $10 \leq x < 100$; 2) $0,001 \leq x < 0,01$.

23.25.* Порядок числа a дорівнює -4 . Визначте порядок числа:

- 1) $10a$; 2) $0,1a$; 3) $100a$; 4) $0,001a$; 5) $10\,000a$; 6) $1\,000\,000a$.

23.26.* Порядок числа b дорівнює 3 . Визначте порядок числа:

- 1) $10b$; 2) $0,01b$; 3) $0,0001b$; 4) $1000b$.

23.27.* Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

- 1) $\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}} - \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}} \right) : \left(\frac{b}{a^2} \right)^{-1}$;
2) $\frac{b^{-2}-2}{b^{-2}} - \frac{b^{-4}-4}{b^{-2}} \cdot \frac{1}{b^{-2}-2}$;
3) $\frac{5c^{-3}}{c^{-3}-3} - \frac{c^{-3}+6}{2c^{-3}-6} \cdot \frac{90}{c^{-6}+6c^{-3}}$;
4) $\left(\frac{m^{-4}}{m^{-4}-4} - \frac{3m^{-4}}{m^{-8}-8m^{-4}+16} \right) \cdot \frac{16-m^{-8}}{m^{-4}-7} + \frac{8m^{-4}}{m^{-4}-4}$;
5) $\frac{(a+b-1)^{-1}+(a-b+1)^{-1}}{2(a+b)} \cdot \left(\frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{(b-1)^{-2}} \right)$.

23.28.* Спростіть вираз і запишіть результат у вигляді раціонального виразу, який не містить степеня з від'ємним показником:

- 1) $\frac{a^{-2}+5}{a^{-4}-6a^{-2}+9} : \frac{a^{-4}-25}{4a^{-2}-12} - \frac{2}{a^{-2}-5}$;
2) $\left(b^{-1} - \frac{5b^{-1}-36}{b^{-1}-7} \right) \cdot \left(2b^{-1} + \frac{2b^{-1}}{b^{-1}-7} \right)^{-1}$;
3) $\frac{(x-1)(x+1)^{-2} - 2x(x^2-1)^{-1} + (x+1)(x-1)^{-2}}{8x(x^4-1)^{-1}}$.

23.29.* Порядок числа a дорівнює -4 , а порядок числа b дорівнює 3 . Яким може бути порядок значення виразу:

- 1) ab ; 2) $a + b$; 3) $a + 10b$; 4) $10a + 0,1b$?

23.30.* Порядок числа m дорівнює 2, а порядок числа n дорівнює 4.

Яким може бути порядок значення виразу:

- 1) mn ; 2) $0,01mn$; 3) $100m + n$; 4) $0,01m + n$?

23.31.* Доведіть тотожність:

- 1) $\frac{(xy^{-1}+1)^2}{xy^{-1}-x^{-1}y} \cdot \frac{x^3y^{-3}-1}{x^2y^{-2}+xy^{-1}+1} : \frac{x^3y^{-3}+1}{xy^{-1}+x^{-1}y-1} = 1$;
- 2) $\frac{a^{-1}+(b+c)^{-1}}{a^{-1}-(b+c)^{-1}} \cdot \left(1 + \left(\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2} \right)^{-1} \right) = \frac{(a+b+c)^2}{2bc}$.

24. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік

У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з функціональною залежністю однієї величини від другої, за якої **збільшення (зменшення)** однієї величини в кілька разів приводить до **збільшення (зменшення)** другої величини в таку саму кількість разів.

У курсі алгебри 7 класу ви дізналися, що ця функціональна залежність визначає функцію $y = kx$, де $k \neq 0$, яку називають прямою пропорційністю.

Також у курсі математики 6 класу ви ознайомилися з функціональною залежністю, за якої зі **збільшенням (зменшенням)** однієї величини в кілька разів друга величина **зменшується (збільшується)** в таку саму кількість разів. Таку залежність називають **оберненою пропорційністю**.

ПРИКЛАД 1 Нехай є 500 грн. Позначимо через x грн ціну 1 кг товару, а через y кг — кількість цього товару, яку можна придбати за 500 грн.

Залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю: збільшення ціни x у кілька разів приводить до зменшення кількості товару y у стільки ж разів, і навпаки, зменшення ціни спричиняє збільшення кількості купленого товару.

Цій функціональній залежності відповідає функція, задана формулою $y = \frac{500}{x}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Розглянемо прямокутник, площа якого дорівнює 18 см^2 , а сторони — x см і y см. Тоді

$$y = \frac{18}{x}.$$

Збільшення (зменшення) знаменника x у кілька разів спричиняє зменшення (збільшення) величини y у стільки ж разів, тобто залежність змінної y від змінної x є оберненою пропорційністю. ▲

У розглянутих прикладах математичною моделлю реальних ситуацій є функція, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$.

Означення. Функцію, яку можна задати формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають **оберненою пропорційністю**.

Оскільки областю визначення виразу $\frac{k}{x}$ є множина $\{x \mid x \neq 0\}$, то областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є та сама множина, тобто $D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1	1	1,5	2	3	4	6
y	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	6	4	3	2	1,5	1

Позначимо на координатній площині точки, координати $(x; y)$ яких наведено в таблиці (рис. 24.1).

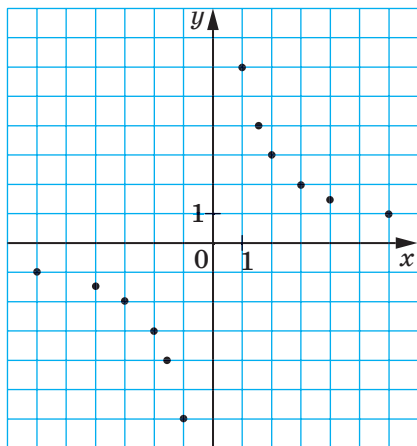


Рис. 24.1

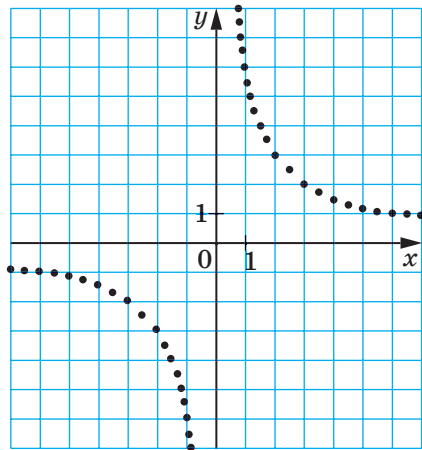


Рис. 24.2

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, нам вдасться позначити, тим менше отримана фігура

(рис. 24.2) відрізнятиметься від графіка функції $y = \frac{6}{x}$.

Серед позначених точок не може бути точки, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки число 0 не належить області визначення даної функції. Тому графік функції $y = \frac{6}{x}$ не має спільних точок з віссю ординат.

Крім того, цей графік не має спільних точок і з віссю абсцис. Справді, рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків. Отже, число 0 не належить області значень даної функції.

Крім того, цей графік не має спільних точок і з віссю абсцис, тобто точок, ординати яких дорівнюють нулю.

Якщо $x > 0$, то $\frac{6}{x} > 0$, тобто $y > 0$; якщо $x < 0$, то $y < 0$.

Отже, точки графіка даної функції можуть розміщуватися тільки в I і III координатних чвертях.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля абсциси відстані від точок графіка функції $y = \frac{6}{x}$ до осі абсцис зменшуються та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Справді, чим більший модуль аргументу, тим менший модуль відповідного значення функції.

Аналогічно можна встановити, що зі зменшенням модуля абсциси відстані від точок графіка до осі ординат зменшуються та можуть стати як завгодно малими, проте ніколи не дорівнюватимуть нулю.

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = \frac{6}{x}$, то ми отримали б фігуру, зображену на рисунку 24.3.

Фігуру, яка є графіком функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох частин — **віток гіперболи**.

Зауважимо, що коли є правильною рівність $y_0 = \frac{k}{x_0}$, то також є правильною рівність $-y_0 = \frac{k}{-x_0}$. Тоді можна зробити такий

висновок: якщо точка $A(x_0; y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ також належить цій гіперболі.

На рисунку 24.3 зображено гіперболу $y = \frac{6}{x}$.

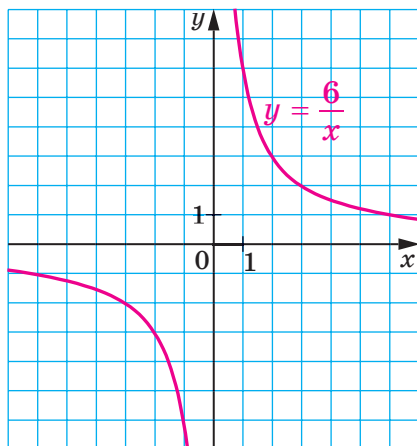


Рис. 24.3

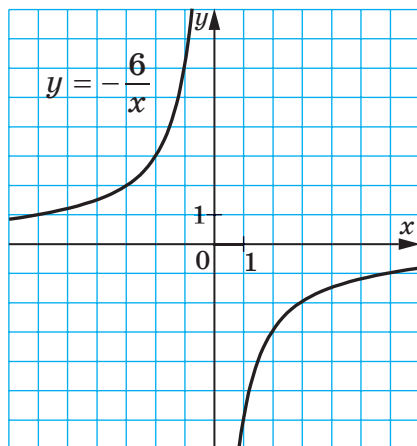


Рис. 24.4

Якщо $k > 0$, то вітки гіперболи розміщені в I і III чвертях, а якщо $k < 0$ — то в II і IV чвертях.

На рисунку 24.4 зображено графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Вітки гіперболи $y = -\frac{6}{x}$ розміщені в II і IV чвертях.

Зауважимо, що областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$, є множина $\{y \mid y \neq 0\}$.

У таблиці наведено властивості функції $y = \frac{k}{x}$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$D(y) = \{x \mid x \neq 0\}$
Область значень	$E(y) = \{y \mid y \neq 0\}$
Графік	Гіпербола

Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	Не існує
Властивість графіка	Якщо точка $A(x_0; y_0)$ належить гіперболі $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-x_0; -y_0)$ також належить цій гіперболі.

Покажемо, як графік функції $y = \frac{k}{x}$ можна використовувати під час розв'язування рівнянь.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$.

Розв'язання. Розглянемо функції $y = \frac{4}{x}$ і $y = x + 3$. Побудуємо в одній системі координат графіки цих функцій (рис. 24.5). Вони перетинаються у двох точках, абсциси яких дорівнюють 1 і -4 . У кожній із точок перетину графіків значення функції $y = \frac{4}{x}$ дорівнює значенню функції $y = x + 3$. Отже, при знайдених абсцисах значення виразів $\frac{4}{x}$ і $x + 3$ рівні, тобто числа 1 і -4 є коренями рівняння $\frac{4}{x} = x + 3$. Перевірка це підтверджує. Справді, $\frac{4}{1} = 1 + 3$ і $\frac{4}{-4} = -4 + 3$. ▲

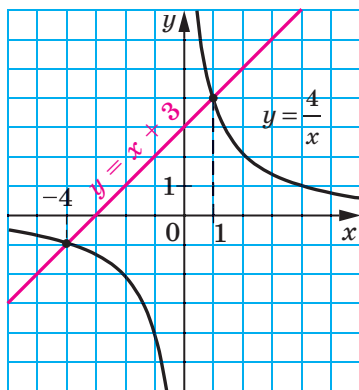


Рис. 24.5

Описаний метод розв'язування рівнянь називають **графічним**. У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь і знаєте, що цей метод не завжди дає точні результати. Тому перевірка знайдених коренів є обов'язковим етапом розв'язування рівняння.

У подальшому (п. 36) ви навчитеся розв'язувати такі рівняння, не використовуючи графічний метод.



1. Поясніть, яку залежність між величинами називають оберненою пропорційністю.
2. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
3. Яка множина є областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
4. Як називають фігуру, що є графіком оберненої пропорційності?
5. Як називають частини, з яких складається гіпербола?
6. Яка множина є областю значень функції $y = \frac{k}{x}$, де $k \neq 0$?
7. У яких координатних чвертях розміщений графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$? якщо $k < 0$?
8. Поясніть, у чому полягає графічний метод розв'язування рівнянь.

ВПРАВИ

24.1.° Автомобіль проїжджає деяку відстань за 10 год. За який час він проїде цю саму відстань, якщо його швидкість:

- 1) збільшиться у 2 рази; 2) зменшиться в 1,2 раза?

24.2.° Довжина прямокутника дорівнює 30 см. Якою стане його довжина, якщо при тій самій площі ширину прямокутника:

- 1) збільшити в 1,5 раза; 2) зменшити в 3,2 раза?

24.3.° За деяку суму грошей купили 40 м тканини. Скільки метрів тканини купили б за ту саму суму грошей, якби її ціна за 1 м:

- 1) зменшилась у 2,6 раза; 2) збільшилась в 1,6 раза?



24.4.° Пішохід пройшов 12 км. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано швидкість, а в другому — час руху.

v , км/год	5		2,4	
t , год		3		$3\frac{1}{3}$

Задайте формулою залежність t від v .

24.5.° Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює 48 см³. Заповніть таблицю, у першому рядку якої вказано площу його основи, а в другому — висоту.

S , см ²	16		240	
h , см		8		4,8

Задайте формулою залежність h від S .

24.6.° Бригада із 7 робітників з однаковою продуктивністю праці може виконати певне виробниче завдання за 12 днів. Скільки потрібно робітників з такою самою продуктивністю праці, щоб виконати це завдання за 4 дні?

24.7.° Заготовлених кормів вистачить для 24 коней на 18 днів. На скільки днів вистачить цих кормів для 36 коней?

24.8.° Серед даних функцій укажіть обернені пропорційності:

- 1) $y = 2x$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = -\frac{0,8}{x}$; 7) $y = \frac{1}{2x}$;
2) $y = \frac{x}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 6) $y = \frac{2x}{3}$; 8) $y = \frac{2}{3x}$.

24.9.° Задано функцію $y = \frac{24}{x}$. Знайдіть:

- значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -3 ; 6 ; $0,2$;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 12 ; -6 ; 100 .

24.10.° Задано функцію $y = -\frac{36}{x}$. Знайдіть:

- значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -4 ; $0,9$; 18 ;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 6 ; $-0,3$; 8 .

24.11.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$. Користуючись графіком,

знайдіть:

- значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4 , -1 ;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 2 , -8 ;
- значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.

24.12.° Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. Користуючись графіком,

знайдіть:

- значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 2 , -10 ;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 5 , -2 ;
- значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

24.13.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = \frac{28}{x}$, визначте,

чи проходить графік через точку:

- 1) $A(-4; -7)$; 2) $B(14; -2)$; 3) $C(0,5; 14)$; 4) $D(0,2; 140)$.

24.14.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{48}{x}$, визначте,

чи проходить графік через точку:

- 1) $A(-6; -8)$; 2) $B(12; -4)$; 3) $C(0,3; -16)$; 4) $D(0,4; -120)$.

24.15.° На рисунку 24.6 зображено графік залежності часу t руху з пункту A до пункту B від швидкості v руху. Користуючись графіком, визначте:

- за який час можна дістатися з пункту A до пункту B , якщо рухатися зі швидкістю 8 км/год; 24 км/год;
- з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з пункту A до пункту B за 3 год; за 4 год;
- чому дорівнює відстань між пунктами A і B .

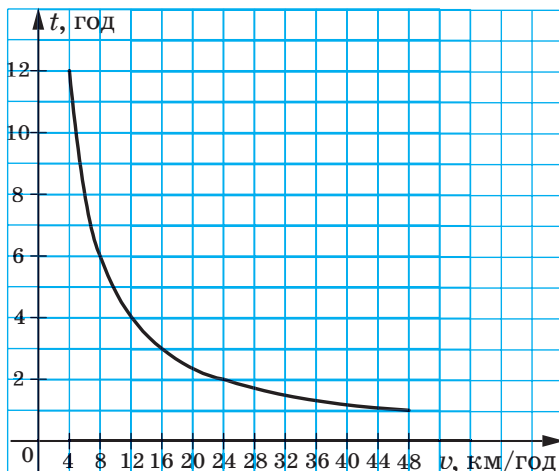


Рис. 24.6

24.16.° Дротяний реостат підключено до блоку живлення (рис. 24.7).

Опір реостата R залежить від положення повзунка й може змінюватися в межах від 0 до 6 Ом. Користуючись графіком залежності сили струму I від опору R за умови, що напруга на кінцях реостата залишається незмінною (рис. 24.8), визначте:

- 1) чому дорівнює сила струму, якщо опір дорівнює 2 Ом;

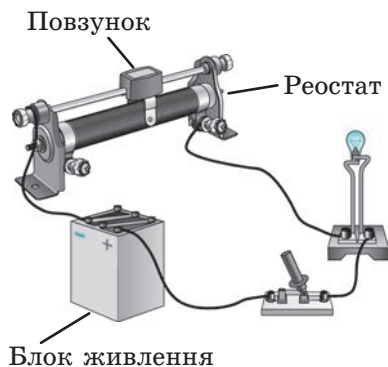


Рис. 24.7

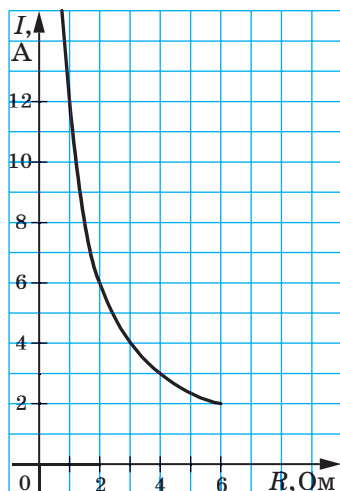


Рис. 24.8

- 2) при якому значенні опору сила струму дорівнює 3 А;
 3) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.

24.17.° Знайдіть значення параметра k , при якому графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

- 1) $A(-5; 4)$; 2) $B\left(\frac{1}{6}; -2\right)$; 3) $C(1,5; -8)$.

24.18.° Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(10; 1,6)$. Чи

проходить графік цієї функції через точку:

- 1) $B(-1; -16)$; 2) $C(-2; 8)$?

24.19.° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x$ та визначте координати точок їхнього перетину.

24.20.° Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\frac{4}{x} = 4 - x$; 2) $x - 2 = \frac{3}{x}$; 3) $x + 2 = -\frac{5}{x}$.

24.21.° Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\frac{8}{x} = 6 - x$; 2) $2x = \frac{2}{x}$; 3) $\frac{7}{x} = -x$.

24.22.° На рисунку 24.9 зображено графік функції $y = f(x)$. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $f(x) = 0$; 3) $f(x) = x$; 5) $f(x) = \frac{1}{x}$;
2) $f(x) = 1$; 4) $f(x) = -x$; 6) $f(x) = 2 - x$.

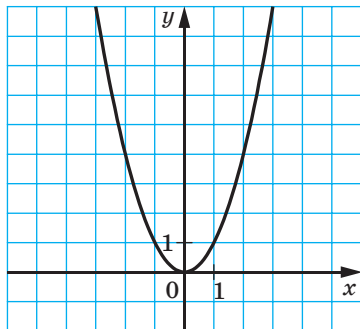


Рис. 24.9

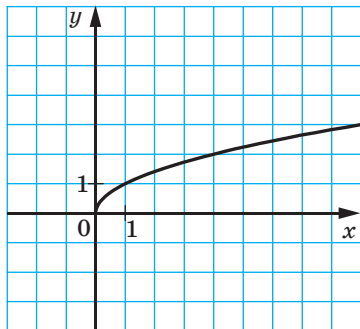


Рис. 24.10

24.23.° На рисунку 24.10 зображено графік функції $y = g(x)$. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $g(x) = 0$; 3) $g(x) = -1$; 5) $g(x) = -x$;
2) $g(x) = 1$; 4) $g(x) = x$; 6) $g(x) = \frac{1}{x}$.

24.24.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} xy = 4, \\ 4y = x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2. \end{cases}$

24.25.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} xy = 5, \\ y - x = 4. \end{cases}$

24.26.° Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

- 1) $\begin{cases} xy = -1, \\ x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -1, \\ x - 3y = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$

24.27.° Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

- 1) $\begin{cases} xy = -8, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -3, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

24.28.° Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = \frac{64}{x}$, у яких абсциса й ордината рівні.

24.29.° Знайдіть координати всіх точок графіка функції $y = -\frac{25}{x}$, у яких абсциса й ордината — протилежні числа.

24.30.* Дослідіть кількість коренів рівняння $\frac{k}{x} = a$, $k \neq 0$, залежно від значення параметра a .

24.31.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{6}{|x|};$$

$$2) y = -\frac{6}{|x|};$$

$$3) y = -|x|^{-1}.$$

24.32.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x+3, & \text{якщо } x > -1; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} -2x+10, & \text{якщо } x \leq 2, \\ \frac{12}{x}, & \text{якщо } 2 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$$

24.33.* Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

24.34.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{9x-18}{x^2-2x};$$

$$2) y = \frac{5x^2-5}{x-x^3}.$$

24.35.* Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{x-3}{x^2-3x};$$

$$2) y = \frac{10x^2-40}{x^3-4x}.$$

24.36.** Побудуйте графік рівняння:

$$1) (xy - 1)(x - 2) = 0;$$

$$4) \frac{xy-1}{x-y} = 0;$$

$$2) (xy + 1)(y - 1) = 0;$$

$$5) \frac{xy+1}{x-y} = 0.$$

$$3) (xy - 1)(|x| - |y|) = 0;$$

24.37.** Побудуйте графік рівняння:

$$1) x(xy - 1) = 0; \quad 2) x^2y^2 - 1 = 0; \quad 3) \frac{xy-1}{x-1} = 0.$$

24.38." Нехай $f(x) = x$. Побудуйте графік функції $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

24.39." Нехай $f(x) = -\frac{1}{x}$. Побудуйте графік функції $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$.

24.40." Функція f така, що $f(x) = \frac{4}{x}$. Доведіть, що

$$f(x+1) - f(x-1) = -\frac{1}{2} f(x+1) \cdot f(x-1).$$

24.41.* Знайдіть функцію f , яка задовольняє умову

$$3f(x) + 2f(x) = -\frac{2}{x}.$$

24.42.* Знайдіть функцію f , яка задовольняє умову

$$2f(x) + f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6}{x}.$$

§ 5 НЕРІВНОСТІ

25. Числові нерівності та їхні властивості

На практиці часто доводиться порівнювати значення величин. Наприклад, площа України ($603,7$ тис. км²) більша за площу Франції (551 тис. км²), висота гори Роман-Кош (1545 м) менша від висоти гори Говерла (2061 м), відстань від Києва до Харкова (450 км) дорівнює $0,011$ довжини екватора.

Результати цих порівнянь записують у вигляді числових нерівностей, використовуючи знаки: $=$, $>$, $<$.

Якщо число a більше за число b , то пишуть: $a > b$; якщо число a менше від числа b , то пишуть: $a < b$.

Очевидно, що $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$. Справедливість цих нерівностей впливає з правил порівняння раціональних чисел, які ви вивчали в попередніх класах.

Проте існує інший спосіб, більш універсальний, заснований на таких очевидних міркуваннях: якщо різниця двох чисел є додатною, то зменшуване більше за від'ємник, а якщо різниця від'ємна, то зменшуване менше від від'ємника.

Ці міркування підказують, що зручно прийняти таке означення.

Означення. Число a вважають **більшим** за число b , якщо різниця $a - b$ є додатним числом. Число a вважають **меншим** від числа b , якщо різниця $a - b$ є від'ємним числом.

Це означення дає змогу задачу про порівняння двох чисел звести до задачі про порівняння їхньої різниці з нулем. Наприклад, щоб порівняти значення виразів $3 - 4\pi$ і $6 - 5\pi$, розглянемо їхню різницю:

$$(3 - 4\pi) - (6 - 5\pi) = 3 - 4\pi - 6 + 5\pi = \pi - 3.$$

Оскільки $\pi - 3 > 0$, то $3 - 4\pi > 6 - 5\pi$.

Зауважимо, що різниця чисел a і b може бути або додатною, або від'ємною, або дорівнювати нулю. Тому для будь-яких чисел a і b справедливе одне й тільки одне з таких співвідношень: $a > b$, $a < b$, $a = b$.

Якщо $a > b$, то точка, яка відповідає числу a на координатній прямій, розташована праворуч від точки, яка відповідає числу b (рис. 25.1).

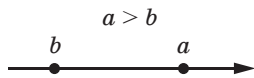


Рис. 25.1

У математиці для вислову «не більше» використовують знак $\leq$ (читають: «менше або дорівнює»), а для вислову «не менше» — знак $\geq$ (читають: «більше або дорівнює»).

Якщо $a < b$ або $a = b$, то є правильною нерівність $a \leq b$.

Якщо $a > b$ або $a = b$, то є правильною нерівність $a \geq b$.

Наприклад, нерівності $7 \leq 7$, $7 \leq 15$, $-3 \geq -5$ є правильними.

Знаки $<$ і $>$ називають знаками **строкої нерівності**, а знаки $\leq$ і $\geq$ — знаками **нестрокої нерівності**.

Розглянемо властивості числових нерівностей, які часто використовують під час розв'язування задач. Їх називають **основними властивостями числових нерівностей**.

Теорема 25.1. *Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.*

Доведення. Оскільки за умовою $a > b$ і $b > c$, то різниці $a - b$ і $b - c$ є додатними числами. Тоді додатною буде їхня сума $(a - b) + (b - c)$. Маємо: $(a - b) + (b - c) = a - c$. Отже, різниця $a - c$ є додатним числом, а тому $a > c$. ▲

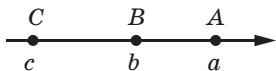


Рис. 25.2

Аналогічно доводять властивість: **якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.**

Теорему 25.1 можна проілюструвати геометрично: якщо на координатній прямій точка A (a) лежить праворуч від точки B (b), а точка B (b) — праворуч від точки C (c), то точка A (a) лежить праворуч від точки C (c) (рис. 25.2).

Теорема 25.2. *Якщо $a > b$ і c — будь-яке число, то $a + c > b + c$.*

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + c)$. Маємо: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Оскільки за умовою $a > b$, то різниця $a - b$ є додатним числом. Отже, $a + c > b + c$. ▲

Аналогічно доводять властивість: **якщо $a < b$ і c — будь-яке число, то $a + c < b + c$.**

Оскільки дію віднімання можна замінити дією додавання ($a - c = a + (-c)$), то, урахувуючи теорему 25.2, можна зробити такий висновок.

Якщо до обох частин правильної нерівності додати або від обох частин правильної нерівності відняти одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. *Якщо будь-який доданок перенести з однієї частини правильної нерівності в другу, замінивши знак доданка на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.*

Доведення. Нехай нерівність $a > b + c$ є правильною. Віднімемо від обох її частин число c . Отримаємо: $a - c > b + c - c$, тобто $a - c > b$. ▲

Теорема 25.3. *Якщо $a > b$ і c — додатне число, то $ac > bc$. Якщо $a > b$ і c — від'ємне число, то $ac < bc$.*

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bc$. Маємо: $ac - bc = c(a - b)$.

За умовою $a > b$, отже, різниця $a - b$ є додатним числом.

Якщо $c > 0$, то добуток $c(a - b)$ додатний, а отже, різниця $ac - bc$ є додатною, тобто $ac > bc$.

Якщо $c < 0$, то добуток $c(a - b)$ від'ємний, а отже, різниця $ac - bc$ є від'ємною, тобто $ac < bc$. ▲

Аналогічно доводять властивість: *якщо $a < b$ і c — додатне число, то $ac < bc$; якщо $a < b$ і c — від'ємне число, то $ac > bc$.*

Оскільки дію ділення можна замінити дією множення $\left(a : c = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, то, ураховуючи теорему 25.3, можна зробити такий висновок.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число, то отримаємо правильну нерівність.

Якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та поміняти знак нерівності на протилежний, то отримаємо правильну нерівність.

Наслідок. *Якщо $ab > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.*

Доведення. Поділимо обидві частини нерівності $a > b$ на додатне число ab . Отримаємо правильну нерівність $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$, тобто

$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Звідси $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ▲

Звернемо увагу: вимога, щоб числа a і b мали однаковий знак ($ab > 0$), є суттєвою. Справді, нерівність $5 > -3$ є правильною, проте нерівність $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ є неправильною.

У теоремах, які розглядалися в цьому пункті, ішлося про строгі нерівності. Аналогічні властивості мають і нестрогі нерівності. Наприклад, якщо $a \geq b$ і c — будь-яке число, то $a + c \geq b + c$.

ПРИКЛАД Відомо, що $-4 \leq a < -2$. Доведіть, що $-7 < \frac{7}{3a+5} \leq -1$.

Розв'язання. Маємо: $-4 \leq a < -2$. Тоді за теоремою 25.3 можна записати: $-12 \leq 3a < -6$. Застосовуючи теорему 25.2, отримуємо $-7 \leq 3a + 5 < -1$. Користуючись наслідком з теореми 25.3, можна

записати, що $-\frac{1}{7} \geq \frac{1}{3a+5} > -1$, тобто $-1 < \frac{1}{3a+5} \leq -\frac{1}{7}$.

Звідси $-7 < \frac{7}{3a+5} \leq -1$. ▲



1. У якому разі число a вважають більшим за число b ?
2. У якому разі число b вважають меншим від числа a ?
3. Як розташована на координатній прямій точка, яка зображує число a , відносно точки, яка зображує число b , якщо $a > b$?
4. Який символ використовують для вислову «не більше»? для вислову «не менше»?
5. У якому разі є правильною нерівність $a \leq b$?
6. У якому разі є правильною нерівність $a \geq b$?
7. Поясніть, які знаки називають знаками строгої нерівності, а які — нестрогої.
8. Яке із чисел a і c більше, якщо $a > b$ і $b > c$?
9. Сформулюйте теорему про додавання одного й того самого числа до обох частин нерівності.
10. Сформулюйте наслідок з теореми про додавання одного й того самого числа до обох частин нерівності.
11. Сформулюйте теорему про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.
12. Сформулюйте наслідок з теореми про множення обох частин нерівності на одне й те саме число.

ВПРАВИ

25.1.° Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a - b = 0,4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

25.2.° Відомо, що $m < n$. Чи може різниця $m - n$ дорівнювати числу:

- 1) 4,6; 2) -5,2; 3) 0?

25.3.° Яке із чисел, x або y , більше, якщо:

- 1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

25.4.° Як розташована на координатній прямій точка A (a) відносно точки B (b), якщо:

- 1) $a - b = 2$; 2) $a - b = -6$; 3) $a - b = 0$?

25.5.° Чи можуть одночасно виконуватися нерівності:

- 1) $a > b$ і $a < b$; 2) $a \geq b$ і $a \leq b$?

25.6.° Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$; 3) якщо $a < 1$, то $\frac{2}{a} > 2$;
2) якщо $a > 1$, то $\frac{2}{a} < 2$; 4) якщо $\frac{a}{b} > 1$ і $b > 0$, то $a > b$?

25.7.° Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > 1$, то $|a| > 1$; 3) якщо $a < -3$, то $|a| > 3$;
2) якщо $a < 2$, то $|a| < 2$; 4) якщо $-4 < a < 4$, то $|a| < 4$?

25.8.° Відомо, що $a < 3$. Який знак має значення виразу:

- 1) $2a - 6$; 2) $3 - a$; 3) $\frac{a-3}{4-a}$?

25.9.° Відомо, що $a > 2$. Який знак має значення виразу:

- 1) $4a - 8$; 2) $6 - 3a$; 3) $3a - 3$; 4) $(a - 2)(1 - a)$?

25.10.° Який знак має значення виразу $(a + 3)(a - 2)$, якщо:

- 1) $a < -3$; 2) $a > 2$; 3) $-3 < a < 2$; 4) $a < -4$?

25.11.° Відомо, що $a < b$ і $b < c$. Яке з тверджень є правильним:

- 1) $a > c$; 2) $a = c$; 3) $c > a$?

25.12.° Відомо, що $b > a$, $c < a$ і $d > b$. Порівняйте числа:

- 1) a і d ; 2) b і c .

25.13.° Розташуйте в порядку зростання числа a , b , c і 0, якщо $a > b$, $c < b$, $0 < b$ і $0 > c$.

25.14.° Відомо, що $a > 4$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $a - 3$; 3) $(a - 3)(a - 2)$; 5) $(1 - a^2)(4 - a)$.
2) $2 - a$; 4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;

25.15.° Відомо, що $b > -2$ і $b < 1$. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $b + 2$; 3) $b - 2$; 5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
2) $1 - b$; 4) $(b - 1)(b - 3)$; 6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

25.16.° Дано: $a > b$. Порівняйте значення виразів:

- 1) $a + 9$ і $b + 9$; 5) $-40b$ і $-40a$;
2) $b - 6$ і $a - 6$; 6) $\frac{a}{20}$ і $\frac{b}{20}$;
3) $1,8a$ і $1,8b$; 7) $2a - 3$ і $2b - 3$;
4) $-a$ і $-b$; 8) $5 - 8a$ і $5 - 8b$.

25.17.° Відомо, що $1 \leq m < 2$. Які з наведених нерівностей є правильними:

- 1) $-1 \leq m < -2$; 3) $-1 \geq -m > -2$;
2) $-2 < m \leq -1$; 4) $-2 > m \geq -1$?

25.18.° Дано: $-3a > -3b$. Порівняйте значення виразів:

- 1) a і b ; 4) $-\frac{5}{9}b$ і $-\frac{5}{9}a$;
2) $\frac{2}{7}a$ і $\frac{2}{7}b$; 5) $3a + 2$ і $3b + 2$;
3) $b - 4$ і $a - 4$; 6) $-5a + 10$ і $-5b + 10$.

25.19.° Відомо, що $a > b$. Розташуйте в порядку спадання числа $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b .

25.20.° Дано: $a < b$. Порівняйте:

- 1) $a - 5$ і b ; 2) a і $b + 6$; 3) $a + 3$ і $b - 2$.

25.21.° Порівняйте числа a і b , якщо:

- 1) $a > c$ і $c > b + 3$; 2) $a > c$ і $c - 1 > b + d^2$,
де c і d — деякі числа.

25.22.° Порівняйте числа a і 0 , якщо:

- 1) $7a < 8a$; 3) $-6a > -8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$; 4) $-0,02a > -0,2a$.

25.23.° Дано: $a > -2$. Доведіть, що:

- 1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$.

25.24.° Дано: $b \leq 10$. Доведіть, що:

- 1) $5b - 9 \leq 41$; 2) $1 - 2b > -21$.

25.25.* Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > b$, то $a > -b$;
- 2) якщо $a > b$, то $2a > b$;
- 3) якщо $a > b$, то $2a + 1 > 2b$;
- 4) якщо $b > a$, то $\frac{b}{a} > 1$;
- 5) якщо $\frac{a}{b} > 1$ і $a > 0$, то $a > b$;
- 6) якщо $a > b + 2$ і $b - 3 > 4$, то $a > 5$;
- 7) якщо $a > b$, то $ab > b^2$;
- 8) оскільки $5 > 3$, то $5a^2 > 3a^2$?

25.26.* Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a} < 1$;
- 2) якщо $a > 3$, то $\frac{3}{a} < 1$;
- 3) якщо $a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$;
- 4) якщо $2 \leq a < 3$, то $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$;
- 5) якщо $-2 < a < -1$, то $-1 < \frac{1}{a} < -\frac{1}{2}$;
- 6) якщо $-3 < a < 3$, то $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

25.27.* Відомо, що $1 < a < 2$. Доведіть, що:

- 1) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2a-1} < 1$;
- 2) $1 < \frac{4}{3a-2} < 4$.

25.28.* Доведіть, що коли:

- 1) $2 < a < 3$, то $\frac{1}{a-2} > 1$;
- 2) $-3 < a < -1$, то $\frac{1}{a+1} < -\frac{1}{2}$.

25.29.* Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) обидві частини нерівності $a > 2$ помножимо на a ;
- 2) обидві частини нерівності $b < -1$ помножимо на b ;
- 3) обидві частини нерівності $m < -3$ помножимо на $-m$.

25.30.* Запишіть правильну нерівність, яку отримаємо, якщо:

- 1) обидві частини нерівності $a < -a^2$ поділимо на a ;
- 2) обидві частини нерівності $a > a^2$ поділимо на a ;
- 3) обидві частини нерівності $a^3 > a^2$ поділимо на $-a$.

26. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу

Розглянемо приклади.

1) Якщо з першого поля зібрали не менше ніж 40 т жита, а з другого поля — не менше ніж 45 т, то очевидно, що з двох полів разом зібрали не менше ніж 85 т жита.

2) Якщо довжина прямокутника не більша за 70 см, а ширина — не більша за 40 см, то очевидно, що його площа не більша за 2800 см^2 .

Висновки із цих прикладів є інтуїтивно очевидними. Їхню справедливості підтверджують такі теореми.

Теорема 26.1 (про почленне додавання нерівностей).

Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доведення. Розглянемо різницю $(a + c) - (b + d)$. Маємо:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Оскільки $a > b$ і $c > d$, то різниці $a - b$ і $c - d$ є додатними числами. Отже, різниця, яку ми розглядаємо, є додатною, тобто $a + c > b + d$. ▲

Аналогічно доводять властивість: *якщо $a < b$ і $c < d$, то $a + c < b + d$.*

Нерівності $a > b$ і $c > d$ (або $a < b$ і $c < d$) називають **нерівностями однакового знака**, а нерівності $a > b$ і $c < d$ (або $a < b$ і $c > d$) — **нерівностями протилежних знаків**.

Говорять, що нерівність $a + c > b + d$ отримано з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом **почленного додавання**.

Теорема 26.1 означає, що *при почленному додаванні правильних нерівностей однакового знака результатом є правильна нерівність того самого знака*.

Зазначимо, що теорема 26.1 справедлива й у випадку почленного додавання трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ і $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Теорема 26.2 (про почленне множення нерівностей).

Якщо $a > b$, $c > d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac > bd$.

Доведення. Розглянемо різницю $ac - bd$. Маємо:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

За умовою $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Отже, різниця, яку ми розглядаємо, є додатною. Із цього випливає, що $ac > bd$. ▲

Аналогічно доводять властивість: *якщо $a < b$, $c < d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac < bd$.*

Говорять, що нерівність $ac > bd$ отримано з нерівностей $a > b$ і $c > d$ шляхом **почленного множення**.

Теорема 26.2 означає, що *при почленному множенні правильних нерівностей однакового знака, у яких ліві та праві частини — додатні числа, результатом є правильна нерівність того самого знака.*

Звернемо увагу: вимога, щоб обидві частини нерівностей, які множать, були додатними, є суттєвою. Справді, розглянемо дві правильні нерівності $-2 > -3$ і $4 > 1$. Помноживши почленно ці нерівності, отримуємо нерівність $-8 > -3$, яка не є правильною.

Зауважимо, що теорема 26.2 залишається справедливою і в разі почленного множення трьох і більше нерівностей. Наприклад, якщо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — додатні числа, причому $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3$, то $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.

Наслідок. *Якщо $a > b$ і a, b — додатні числа, то $a^n > b^n$, де n — натуральне число.*

Доведення. Запишемо n правильних нерівностей $a > b$:

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{array} \right\} n \text{ нерівностей}$$

Оскільки a і b — додатні числа, то можемо перемножити почленно n записаних нерівностей. Отримаємо $a^n > b^n$. ▲

Зазначимо, що всі розглянуті властивості нерівностей є справедливими й у тому разі, коли нерівності є нестрогими:

якщо $a \geq b$ і $c \geq d$, то $a + b \geq c + d$;

якщо $a \geq b, c \geq d$ і a, b, c, d — додатні числа, то $ac \geq bd$;

якщо $a \geq b$ і a, b — додатні числа, то $a^n \geq b^n$, де n — натуральне число.

Ви знаєте, що значення величин, які є результатом вимірювань, не є точними. Вимірювальні прилади дають змогу лише встановити, між якими числами міститься точне значення величини. Ці числа називають межами значення величини.

Нехай, наприклад, у результаті вимірювання ширини x і довжини y прямокутника було встановлено, що $2,5 \text{ см} < x < 2,7 \text{ см}$

і $4,1 \text{ см} < y < 4,3 \text{ см}$. Тоді за допомогою теореми 26.2 можна оцінити площу прямокутника. Маємо:

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{l} 2,5 \text{ см} < x < 2,7 \text{ см} \\ 4,1 \text{ см} < y < 4,3 \text{ см} \end{array} \\ \hline 10,25 \text{ см}^2 < xy < 11,61 \text{ см}^2 \end{array}$$

Узагалі, якщо відомо значення меж величин, то, використовуючи властивості числових нерівностей, можна знайти межі значення виразу, який містить ці величини, тобто **оцінити** його значення.

ПРИКЛАД Дано: $6 < a < 8$ і $10 < b < 12$. Оцініть значення виразу:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab ; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Розв'язання

1) Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{l} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \end{array} \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Помноживши кожен частину нерівності $10 < b < 12$ на -1 , отримуємо: $-10 > -b > -12$ або $-12 < -b < -10$. Ураховуючи, що $a - b = a + (-b)$, далі маємо:

$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{l} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \end{array} \\ \hline -6 < a - b < -2. \end{array}$$

3) Оскільки $a > 6$ і $b > 10$, то a і b набувають додатних значень. Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{l} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \end{array} \\ \hline 60 < ab < 96. \end{array}$$

4) Оскільки $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ або $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Ураховуючи, що $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, маємо:

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{l} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \end{array} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5} \end{array}$$

5) Помножимо кожну частину нерівності $6 < a < 8$ на 3, а кожну частину нерівності $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$. Отримаємо дві правильні нерівності:

$$18 < 3a < 24 \text{ і } -5 > -\frac{1}{2}b > -6.$$

Додамо отримані нерівності:

$$\begin{array}{r} 18 < 3a < 24 \\ + \quad -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Відповідь: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$;
4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ▲



1. Сформулюйте теорему про почленне додавання нерівностей.
2. Поясніть, які нерівності називають нерівностями однакового знака, а які нерівності — нерівностями протилежних знаків.
3. Сформулюйте теорему про почленне множення нерівностей.
4. Сформулюйте наслідок з теореми про почленне множення нерівностей.

ВПРАВИ

26.1.° Дано: $-3 < a < 4$. Оцініть значення виразу:

- | | | | |
|--------------------|--------------|---------------|----------------|
| 1) $2a$; | 3) $a + 2$; | 5) $3a + 1$; | 7) $-4a$; |
| 2) $\frac{a}{3}$; | 4) $a - 1$; | 6) $-a$; | 8) $-5a + 3$. |

26.2.° Дано: $2 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

- | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|--------------|
| 1) $\frac{1}{2}b$; | 2) $b - 6$; | 3) $2b + 5$; | 4) $4 - b$. |
|---------------------|--------------|---------------|--------------|

26.3.° Дано: $2 < x < 4$. Оцініть значення виразу $\frac{1}{x}$.

26.4.° Оцініть середнє арифметичне значень a і b , якщо $2,5 < a < 2,6$ і $3,1 < b < 3,2$.

26.5.° Оцініть периметр рівнобедреного трикутника з основою a см і бічною стороною b см, якщо $10 < a < 14$ і $12 < b < 18$.

26.6.° Оцініть периметр паралелограма зі сторонами a см і b см, якщо $15 \leq a \leq 19$ і $6 \leq b \leq 11$.

26.7.° Чи є правильним твердження:

- 1) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9$;
- 2) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 8$;
- 3) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a + b > 9,2$;
- 4) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $a - b > -5$;
- 5) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $b - a > 5$;
- 6) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $ab > 13$;
- 7) якщо $a > 2$ і $b > 7$, то $3a + 2b > 20$;
- 8) якщо $a > 2$ і $b < -7$, то $a - b > 9$;
- 9) якщо $a < 2$ і $b < 7$, то $ab < 14$;
- 10) якщо $a > 2$, то $a^2 > 4$;
- 11) якщо $a < 2$, то $a^2 < 4$?

26.8.° Дано: $a > 2,4$ і $b > 1,6$. Порівняйте:

1) $a + \frac{3}{4}b$ і 3,6; 3) $(a - 0,4)(b + 1,4)$ і 6.

2) $(a + b)^2$ і 16;

26.9.° Відомо, що $a > 3$ і $b > -2$. Доведіть, що $5a + 4b > 7$.

26.10.° Відомо, що $a > 5$ і $b < 2$. Доведіть, що $6a - 7b > 16$.

26.11.° Дано: $5 < a < 8$ і $3 < b < 6$. Оцініть значення виразу:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

26.12.° Дано: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ і $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Оцініть значення виразу:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

26.13.* Доведіть, що периметр чотирикутника більший за суму його діагоналей.

26.14.* Доведіть, що кожна діагональ опуклого чотирикутника менша від його півпериметра.

26.15.* Доведіть, що сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника менша від суми його діагоналей.

26.16.* Доведіть твердження:

- 1) якщо $a < b < 0$, то $a^2 > b^2$;
- 2) якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a^2 > b^2$, то $a > b$.

26.17.* Оцініть значення a , якщо:

1) $a - |b| = 1$; 2) $a + b^2 = 2$; 3) $|a| + |b| = 1$.

26.18.* Відомо, що $b > 0$ і $a > b$. Чи обов'язково є правильною нерівність:

1) $a^2 + a > b^2 + b$;

3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$;

4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

27. Нерівності з однією змінною

Розглянемо таку задачу. Одна зі сторін паралелограма дорівнює 7 см. Якою має бути довжина другої сторони, щоб периметр паралелограма був більшим за 44 см?

Нехай шукана сторона дорівнює x см. Тоді периметр паралелограма дорівнює $(14 + 2x)$ см. Нерівність $14 + 2x > 44$ є математичною моделлю задачі про периметр паралелограма.

Якщо в цю нерівність замість змінної x підставити, наприклад, число 16, то отримаємо правильну числову нерівність $14 + 32 > 44$. Говорять, що число 16 є **розв'язком нерівності** $14 + 2x > 44$.

Означення. Розв'язком нерівності з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює її в правильну числову нерівність.

Так, кожне із чисел 15,1; 20; 101 є розв'язком нерівності $14 + 2x > 44$, а число 10 не є її розв'язком.

Зауваження. Означення розв'язку нерівності аналогічне означенню кореня рівняння. Проте не прийнято говорити «корінь нерівності».

Розв'язати нерівність означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Усі розв'язки нерівності утворюють **множину розв'язків нерівності**. Якщо нерівність розв'язків не має, то говорять, що множиною її розв'язків є порожня множина. Отже, *розв'язати нерівність означає знайти множину її розв'язків*.

Наприклад, до задачі «розв'яжіть нерівність $x^2 > 0$ » відповідь буде такою: «множина всіх чисел, крім числа 0».

Очевидно, що нерівність $|x| < 0$ розв'язків не має, тобто множиною її розв'язків є порожня множина.

Означення. Нерівності називають **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leq 0$ і $|x| \leq 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина всіх чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.



1. Що називають розв'язком нерівності з однією змінною?
2. Що означає розв'язати нерівність?
3. Що утворюють усі розв'язки нерівності?
4. Коли множиною розв'язків нерівності є порожня множина?
5. Які нерівності називають рівносильними?

ВПРАВИ

27.1.° Які із чисел -4 ; $-0,5$; 0 ; $\frac{1}{3}$; 2 є розв'язками нерівності:

- 1) $x \leq 5$; 2) $3x > x - 1$; 3) $x^2 - 9 \leq 0$; 4) $\frac{1}{x} > 1$?

27.2.° Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $(x - 2)^2(x - 5) > 0$:

- 1) 3 ; 2) 2 ; 3) 6 ; 4) -1 ?

27.3.° Множиною розв'язків якої з даних нерівностей є порожня множина:

- 1) $(x - 3)^2 > 0$; 3) $(x - 3)^2 < 0$;
2) $(x - 3)^2 \geq 0$; 4) $(x - 3)^2 \leq 0$?

27.4.° Яка з наведених нерівностей не має розв'язків:

- 1) $0x > -3$; 2) $0x < 3$; 3) $0x < -3$; 4) $0x > 3$?

27.5.° Множиною розв'язків якої з наведених нерівностей є множина всіх чисел:

- 1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

27.6.° Множиною розв'язків яких із наведених нерівностей є множина всіх чисел:

- 1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leq 0$; 4) $|x| \geq 0$?

27.7.° Серед наведених нерівностей укажіть нерівність, розв'язком якої є будь-яке число, і нерівність, що не має розв'язків:

- 1) $\frac{x^2 + 1}{x^2} \geq 0$; 2) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} < 1$; 3) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \geq 1$; 4) $\frac{x^2}{x^2 + 1} \geq 0$.

27.8.* Розв'яжіть нерівність:

- | | | |
|--|--|------------------------------|
| 1) $\frac{2}{x^2} + 2 > 0$; | 7) $ x > -1$; | 13) $ x > x$; |
| 2) $(x+2)^2 > 0$; | 8) $ x^2 - 3x - 2 < -1$; | 14) $ x \geq -x$; |
| 3) $(x+2)^2 \leq 0$; | 9) $\left \frac{1}{x+3}\right > -2$; | 15) $\frac{ x }{x} \geq 1$; |
| 4) $\frac{x+2}{x+2} > \frac{2}{3}$; | 10) $ x^2 - 4 \leq 0$; | 16) $\frac{ x }{x} > 1$; |
| 5) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$; | 11) $ x \geq -x^2$; | 17) $ x + x \geq -x^2$; |
| 6) $\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2 \geq 0$; | 12) $ x > -x^2$; | 18) $ x - x \geq -x^2$. |

27.9.* Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- | | | |
|-------------------|--|-----------------------------|
| 1) $ x > 0$; | 5) $\left \frac{1}{x}\right > -2$; | 9) $\frac{ x }{x} \leq 1$; |
| 2) $ x \leq 0$; | 6) $ x > - x - 4 $; | 10) $ x + x > -x^2$; |
| 3) $ x < 0$; | 7) $\left \frac{1}{x}\right > - x $; | 11) $ x + x \leq -x^2$; |
| 4) $ x > -2$; | 8) $\frac{ x }{x} < 1$; | 12) $ x - x \leq -x^2$. |

27.10.* Чи є рівносильними нерівності:

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$; | 4) $(x-5)^2 < 0$ і $ x-4 < 0$; |
| 2) $x^2 \geq x$ і $x \geq 1$; | 5) $ x \leq 0$ і $x^4 \leq 0$; |
| 3) $(x-1)^2 > 0$ і $ x-1 > 0$; | 6) $(x-2)^2 \leq 0$ і $(x-1)^2 \leq 0$; |

28. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки

Властивості числових рівностей допомагали нам розв'язувати рівняння. Так само властивості числових нерівностей допоможуть розв'язувати нерівності.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, простішим рівнянням, рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності.

Під час заміни рівняння на рівносильне йому використовують теореми про перенесення доданків з однієї частини в другу та

щодо множення обох частин рівняння на одне й те саме відмінне від нуля число.

Аналогічні теореми застосовують і при розв'язуванні нерівностей.

- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Ці теореми доводять так само, як і теореми, що розглядалися в п. 20. Переконайтесь у цьому самостійно.

За допомогою цих теорем розв'яжемо нерівність, отриману в задачі про периметр паралелограма (див. п. 27).

Маємо: $14 + 2x > 44$.

Переносимо доданок 14 у праву частину нерівності:

$$2x > 44 - 14.$$

Звідси $2x > 30$.

Поділивши обидві частини нерівності на 2, отримуємо:

$$x > 15.$$

Зауважимо, що отримана нерівність рівносильна заданій нерівності. Множина її розв'язків складається з усіх чисел, більших за 15. Цю множину називають **числовим проміжком** і позначають $(15; +\infty)$ (читають: «проміжок від 15 до плюс нескінченності»).

Відповідь можна записати одним із способів: $(15; +\infty)$ або $x > 15$.

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x > 15$, розміщені праворуч від точки, яка зображує число 15, і утворюють промінь, у якого «виколото» початок (рис. 28.1). Тому числовий проміжок $(15; +\infty)$ називають **відкритим числовим променем**.

Зауважимо, що для зображення на рисунку числового проміжку використовують два способи: за допомогою штриховки (рис. 28.1, а) або за допомогою дужки (рис. 28.1, б). Ми використовуватимемо другий спосіб.



Рис. 28.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $3 + \frac{x}{2} \leq 7 + x$.

Розв'язання. Перенесемо доданок x з правої частини нерівності в ліву, а доданок 3 — з лівої частини в праву та зведемо подібні члени:

$$-x + \frac{x}{2} \leq 7 - 3;$$

$$-\frac{x}{2} \leq 4.$$

Помноживши обидві частини нерівності на -2 , отримаємо:

$$x \geq -8.$$

Множиною розв'язків цієї нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $[-8; +\infty)$ (читають: «проміжок від -8 до плюс нескінченності, включаючи -8 »).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \geq -8$, утворюють промінь (рис. 28.2). Тому числовий проміжок $[-8; +\infty)$ називають **числовим променем**.

Відповідь можна записати одним із способів: $[-8; +\infty)$ або $x \geq -8$. ▲



Рис. 28.2

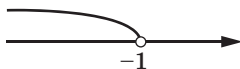


Рис. 28.3

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $2(2 - 3x) > 3(x + 6) - 5$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок нерівностей, рівносильних даній:

$$4 - 6x > 3x + 18 - 5;$$

$$4 - 6x > 3x + 13;$$

$$-3x - 6x > -4 + 13;$$

$$-9x > 9;$$

$$x < -1.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $(-\infty; -1)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до -1 »).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x < -1$, розташовані ліворуч від точки -1 (рис. 28.3) і утворюють промінь, у якого «виколото» початок. Тому числовий проміжок $(-\infty; -1)$ називають **відкритим числовим променем**.

Відповідь можна записати одним із способів: $(-\infty; -1)$ або $x < -1$. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leq \frac{1}{6}$.

Розв'язання. Запишемо ланцюжок нерівностей, рівносильних даній:

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} &\leq 6 \cdot \frac{1}{6}; \\ 3x - 3 + 2x &\leq 1; \\ 5x &\leq 4; \\ x &\leq \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є числовий проміжок, який позначають так: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до $\frac{4}{5}$, включаючи $\frac{4}{5}$ »).

Точки координатної прямої, які зображують розв'язки нерівності $x \leq \frac{4}{5}$, утворюють промінь (рис. 28.4). Тому числовий проміжок

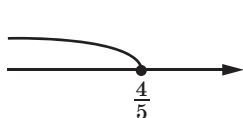


Рис. 28.4

$\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ називають числовим променем.

Відповідь можна записати одним із способів: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$ або $x \leq \frac{4}{5}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $3(2x-1)+7 \geq 2(3x+1)$.

Розв'язання. Маємо: $6x-3+7 \geq 6x+2$;

$$6x-6x \geq 2-4;$$

$$0x \geq -2.$$

Остання нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в правильну числову нерівність $0x \geq -2$. Отже, шукана множина розв'язків збігається з множиною всіх чисел.

Відповідь: x — будь-яке число. ▲

Цю відповідь можна записати інакше: $(-\infty; +\infty)$ (читають: «проміжок від мінус нескінченності до плюс нескінченності»). Цей числовий проміжок називають **числовою прямою**.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $4(x - 2) - 1 < 2(2x - 9)$.

Розв'язання. Маємо: $4x - 8 - 1 < 4x - 18$;

$$4x - 4x < 9 - 18;$$

$$0x < -9.$$

Отримана нерівність при будь-якому значенні x перетворюється в неправильну числову нерівність $0 < -9$.

Відповідь можна записати одним із способів: розв'язків немає або $\emptyset$. ▲

Означення. Нерівності виду $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де x — змінна, а b — параметри, називають **лінійними нерівностями з однією змінною**.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають **наслідком** першої нерівності.

Наприклад, нерівність $x > 2$ є наслідком нерівності $x > 5$ (рис. 28.5).

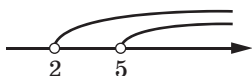


Рис. 28.5

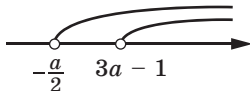


Рис. 28.6

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x| < 0$.

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a нерівність

$$2x + a > 0$$

є наслідком нерівності $x + 1 - 3a > 0$?

Розв'язання. Замінімо дані нерівності на їм рівносильні.

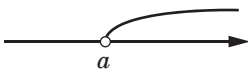
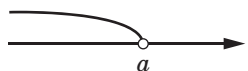
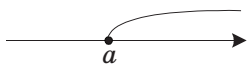
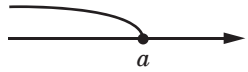
Маємо: $x > -\frac{a}{2}$ і $x > 3a - 1$. Множина розв'язків нерівності $x > -\frac{a}{2}$

має містити множину розв'язків нерівності $x > 3a - 1$ (рис. 28.6),

а це виконується, якщо $-\frac{a}{2} \leq 3a - 1$, тобто $a \geq \frac{2}{7}$.

Відповідь: $a \geq \frac{2}{7}$. ▲

Наприкінці наведемо таблицю позначень і зображень вивчених числових проміжків:

Нерівність	Проміжок	Назва	Зображення
$x > a$	$(a; +\infty)$	Відкритий числовий промінь	
$x < a$	$(-\infty; a)$	Відкритий числовий промінь	
$x \geq a$	$[a; +\infty)$	Числовий промінь	
$x \leq a$	$(-\infty; a]$	Числовий промінь	



1. Сформулюйте теореми, за якими можна отримати нерівність, рівносильну даній.
2. Які нерівності називають лінійними нерівностями з однією змінною?
3. Як записують, читають, називають і зображують проміжок, який є множиною розв'язків нерівності виду: $x > a$? $x < a$? $x \geq a$? $x \leq a$?
4. Розв'язком нерівності є будь-яке число. Як у такому випадку записують, читають і називають проміжок, який є множиною розв'язків нерівності?

ВПРАВИ

28.1.° Укажіть найменше ціле число, яке належить проміжку:

- 1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3,4; +\infty)$; 4) $[-0,9; +\infty)$.

28.2.° Укажіть найбільше ціле число, яке належить проміжку:

- 1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6,2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1,8)$.



28.3.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-2x \geq 10$; 4) $7x - 2 > 19$; 7) $5x < 2x - 18$;
 2) $\frac{1}{3}x < 9$; 5) $4 - x < 5$; 8) $36 - 2x < 4x$;
 3) $-10x < 0$; 6) $5 + 8x \geq 6$; 9) $\frac{x+2}{5} < 2$.

28.4.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $-4x \leq -16$; 4) $-3x > \frac{6}{7}$; 7) $5 - 9x > 16$;
2) $\frac{2}{3}x \leq 6$; 5) $4x + 5 > -7$; 8) $\frac{x-3}{4} > -1$.
3) $-12x \geq 0$; 6) $9 - x \geq 2x$;

28.5.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $0x > 10$; 3) $0x > -8$; 5) $0x \geq 1$; 7) $0x \leq 0$;
2) $0x < 15$; 4) $0x < -3$; 6) $0x \leq 2$; 8) $0x > 0$.

28.6.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

- 1) $5x \geq 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

28.7.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

- 1) $8x \leq -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

28.8.° При яких значеннях a вираз $6a + 1$ набуває від'ємних значень?

28.9.° При яких значеннях b вираз $7 - 2b$ набуває додатних значень?

28.10.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $8x + 2 < 9x - 3$; 3) $3 - 11y \geq -3y + 6$;
2) $6y + 8 \leq 10y - 8$; 4) $3m - 1 \leq 1,5m + 5$.

28.11.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $4 + 11x > 7 + 12x$; 3) $3x - 10 < 6x + 2$;
2) $35x - 28 \leq 32x + 2$; 4) $6x - 3 \geq 2x$.

28.12.° При яких значеннях c значення двочлена $9c - 2$ не більші за відповідні значення двочлена $4c + 4$?

28.13.° При яких значеннях k значення двочлена $11k - 3$ не менші від відповідних значень двочлена $15k - 13$?

28.14.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{4x}{3} + \frac{x}{2} < 11$; 3) $\frac{5x}{7} - x > -4$;
2) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} \geq \frac{1}{6}$; 4) $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \leq x$.

28.15.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\frac{y}{6} - \frac{5y}{4} < 1$; 2) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > -2$.

28.16.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- 1) $3 - 5(2x + 4) \geq 7 - 2x$;
2) $x - 2(x - 1) \geq 10 + 3(x + 4)$;
3) $2(2x - 3,5) - 3(2 - 3x) < 6(1 - x)$;
4) $(4x - 3)^2 + (3x + 2)^2 \geq (5x + 1)^2$;

5) $\frac{2x-1}{4} \geq \frac{3x-5}{5};$

6) $(x-5)(x+1) \leq 3+(x-2)^2;$

7) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-3}{3} > 2 + \frac{x}{6};$

8) $(6x-1)^2 - 4x(9x-3) \leq 1;$

9) $\frac{x-3}{9} - \frac{x+4}{4} > \frac{x-8}{6}.$

28.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(2-y)(3+y) \leq (4+y)(6-y);$

2) $(y+3)(y-5) - (y-1)^2 > -16;$

3) $\frac{2x}{3} - \frac{x-1}{6} - \frac{x+2}{2} < 0;$

4) $\frac{y-1}{2} - \frac{2y+1}{8} - y < 2.$

28.18.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $7(x+2) - 3(x-8) < 10;$

2) $(x-4)(x+4) - 5x > (x-1)^2 - 17.$

28.19.° Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $\frac{4x+13}{10} - \frac{5+2x}{4} > \frac{6-7x}{20} - 2;$

2) $(x-1)(x+1) - (x-4)(x+2) \geq 0.$

28.20.° Скільки цілих від'ємних розв'язків має нерівність

$$x - \frac{x+7}{4} - \frac{11x+30}{12} < \frac{x-5}{3}?$$

28.21.° Скільки натуральних розв'язків має нерівність

$$\frac{2-3x}{4} \geq \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

28.22.° При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $|x-5| = x-5;$

2) $|2x+14| = -2x-14?$

28.23.° При яких значеннях y є правильною рівність:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1;$

2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1?$

28.24.° Турист проплив човном деяку відстань за течією річки, а потім повернувся назад, витративши на всю подорож не більше п'яти годин. Власна швидкість човна дорівнює 5 км/год, а швидкість течії — 1 км/год. Яку найбільшу відстань міг проплисти турист за течією річки?

28.25.° Беруть чотири послідовних цілих числа та розглядають різницю добутоків крайніх і середніх чисел. Чи існують такі чотири послідовних цілих числа, для яких ця різниця більша за нуль?

28.26.° У коробці містяться сині та жовті кулі. Кількість синіх куль відноситься до кількості жовтих як $3 : 4$. Яка найбільша кількість синіх куль може бути в коробці, якщо всього куль не більше ніж 45?

28.27.° Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 14 см і a см, де a — натуральне число. Якого найбільшого значення може набувати a ?

28.28.° Які з нерівностей є наслідками нерівності $1 - 3x > 0$:

1) $x > \frac{1}{3}$;

3) $x \leq \frac{1}{3}$;

5) $x < \frac{2}{5}$;

2) $x < \frac{1}{3}$;

4) $x < \frac{1}{4}$;

6) $x < 1$?

28.29.* Яка з нерівностей у парі є наслідком іншої:

1) $2x + 1 > 0$ і $1 - 2x < 0$; 5) $x + 1 \leq 0$ і $(x + 1)(x^2 + 1) > 0$;

2) $3x - 5 \leq 0$ і $6 - 5x \geq 0$; 6) $x^2 + 2x + 1 > 0$ і $x + 1 > 0$;

3) $|x| \geq 0$ і $x^2 > 0$; 7) $\frac{1}{x} > 0$ і $x \geq 0$?

4) $|x + 3| < 0$ і $17x - 19 > 0$;

28.30.* Побудуйте графік функції:

1) $y = |x - 2|$; 2) $y = |x + 3| - 1$; 3) $y = |x - 1| + x$.

28.31.* Побудуйте графік функції:

1) $y = |x + 4|$; 2) $y = |x - 5| + 2$; 3) $y = |2x - 6| - x$.

28.32.* При яких значеннях параметра a рівняння:

1) $4x + a = 2$ має додатний корінь;

2) $(a + 6)x = 3$ має від'ємний корінь;

3) $(a - 1)x = a^2 - 1$ має єдиний додатний корінь?

28.33.* При яких значеннях параметра m рівняння:

1) $2 + 4x = m - 6$ має невід'ємний корінь;

2) $mx = m^2 - 7m$ має єдиний від'ємний корінь?

28.34.* Чи існує таке значення параметра a , при якому не має розв'язків нерівність (у разі ствердної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax > 3x + 4$;

2) $(a^2 + a)x \leq a$?

28.35.* Чи існує таке значення параметра a , при якому будь-яке число є розв'язком нерівності (у разі ствердної відповіді вкажіть це значення):

1) $ax > -1 - 7x$;

2) $(a^2 - 16)x \leq a + 4$?

28.36." Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax > 0$; 3) $ax \geq a$; 5) $(a+3)x \leq a^2 - 9$;

2) $ax < 1$; 4) $(a-2)x > a^2 - 4$; 6) $2(x-a) < ax - 4$.

28.37." Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $a^2x \leq 0$; 2) $(a+4)x > 1$; 3) $a+x < 2-ax$.

28.38." При яких значеннях параметра a перша з нерівностей пари є наслідком другої нерівності:

1) $2x - a > 0$ і $x + 2a - 3 > 0$; 4) $ax < 1$ і $x > 1$;

2) $3x + a \leq 0$ і $2x - a + 4 < 0$; 5) $x > 0$ і $ax > 1$?

3) $x + a - 3 > 0$ і $\frac{x}{2} + a - 1 \geq 0$;

28.39." При яких значеннях параметра a нерівності є рівносильними:

1) $2x - a > 0$ і $x + 2a - 3 > 0$; 4) $3x - a \geq 0$ і $ax - 3 \geq 0$;

2) $3x + a \leq 0$ і $2x - a + 4 < 0$; 5) $ax \geq 1$ і $2ax > 3$;

3) $3x - a \geq 0$ і $x - a - 1 \geq 0$; 6) $a^2x \geq 1$ і $2ax \geq 3$?

29. Системи та сукупності лінійних нерівностей з однією змінною

Розглянемо нерівності $2x - 1 \geq 0$ і $5 - x \geq 0$. Поставимо задачу: знайти множину спільних розв'язків цих нерівностей.

Якщо потрібно знайти спільний розв'язок двох або кількох нерівностей, то говорять, що треба розв'язати **систему нерівностей**.

Як і систему рівнянь, систему нерівностей записують за допомогою фігурної дужки.

Для знаходження спільних розв'язків заданих вище нерівностей треба розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ 5 - x \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Означення. Розв'язком системи нерівностей з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює кожен нерівність системи в правильну числову нерівність.

Наприклад, числа 2, 3, 4, 5 є розв'язками системи (*), а число 7 не є її розв'язком.

Розв'язати систему нерівностей — це означає знайти множину її розв'язків.

Наприклад, до задачі

«Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 0x \geq -1, \\ |x| \geq 0 \end{cases}$ »

відповідь буде такою: «множина всіх чисел».

Очевидно, що множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq 5 \end{cases}$ складається з одного числа 5.

Система нерівностей $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ розв'язків не має, тобто множиною

її розв'язків є порожня множина.

Розв'яжемо систему (*). Перетворюючи кожну нерівність системи в рівносильну їй, отримуємо: $\begin{cases} 2x \geq 1, \\ -x \geq -5; \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5. \end{cases}$

Множина розв'язків останньої системи складається з усіх чисел, які не менші від $\frac{1}{2}$ і не більші за 5, тобто з усіх чисел, які задовольняють нерівність $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають так: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (читають: «проміжок від $\frac{1}{2}$ до 5, включаючи $\frac{1}{2}$ і 5»).

Точки, які зображують розв'язки системи (*), розташовані між точками $A\left(\frac{1}{2}\right)$ і $B(5)$, включаючи точки A і B (рис. 29.1). Вони утворюють відрізок. Тому числовий проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ називають



Рис. 29.1

числовим відрізком.

Відповідь у задачі про знаходження спільних розв'язків нерівностей $2x - 1 \geq 0$ і $5 - x \geq 0$ може бути за-

писана одним із способів: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ або $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$.

Зауважимо, що всі спільні точки проміжків $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ утворюють проміжок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (рис. 29.2). Таким чином, числовий відрізок $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ є перерізом числових променів $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$. Записують: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Проміжки $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ і $(-\infty; 5]$ є розв'язками відповідно нерівностей $x \geq \frac{1}{2}$ і $x \leq 5$. Тоді можна сказати, що *множина розв'язків системи* $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x \leq 5 \end{cases}$ є *перерізом множин розв'язків кожної з нерівностей, які складають систему*.

Отже, щоб розв'язати систему нерівностей, треба знайти переріз множин розв'язків нерівностей, які складають систему.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases} \begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо переріз множин розв'язків нерівностей даної системи, тобто переріз проміжків $(-\infty; 3)$ і $(-2; +\infty)$ (рис. 29.3). Шуканий переріз складається з усіх чисел, які задовольняють нерівність $-2 < x < 3$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $(-2; 3)$ і читають: «проміжок від -2 до 3 ». Такий проміжок називають **відкритим числовим відрізком**.

Відповідь можна записати одним із способів: $(-2; 3)$ або $-2 < x < 3$. ▲

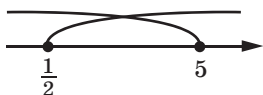


Рис. 29.2



Рис. 29.3



Рис. 29.4

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leq 5. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leq 2; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x \geq -2. \end{cases}$

За допомогою координатної прямої знайдемо переріз проміжків $(-\infty; 1)$ і $[-2; +\infty)$, які є множинами розв'язків нерівностей даної системи (рис. 29.4). Шуканий переріз складається з усіх чисел, які задовольняють нерівність $-2 \leq x < 1$. Ця множина є числовим проміжком, який позначають $[-2; 1)$ і читають: «проміжок від -2 до 1 , включаючи -2 ». Такий проміжок називають **числовим відрізком, відкритим справа**.

Відповідь можна записати одним із способів: $[-2; 1)$ або $-2 \leq x < 1$. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x \leq 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Множиною розв'язків даної системи є переріз проміжків $(-\infty; 1]$ і $(-2; +\infty)$. Цей переріз є числовим проміжком, який позначають $(-2; 1]$ і читають: «проміжок від -2 до 1 , включаючи 1 ». Такий проміжок називають **числовим відрізком, відкритим зліва**. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $-7 < 3x + 5 < 11$.

Розв'язання. Розв'язками нерівності будуть ті значення змінної, які одночасно задовольняють кожну з нерівностей $3x + 5 > -7$ і $3x + 5 < 11$, тобто дана подвійна нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 3x + 5 > -7, \\ 3x + 5 < 11. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x > -4, \\ x < 2. \end{cases}$

Відповідь: $(-4; 2)$. ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $x^2(x + 1) > 0$.

Розв'язання. Добуток двох множників набуває додатних значень, якщо ці множники мають однаковий знак. Оскільки $x = 0$ не є розв'язком даної нерівності, то $x^2 > 0$, тому слід вимагати, щоб множник $x + 1$ був додатним. Звідси $x > -1$. Проте проміжку $(-1; +\infty)$ належить число 0 , яке не є розв'язком даної нерівності. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$ Розв'язком цієї системи

є об'єднання двох проміжків: $(-1; 0)$ і $(0; +\infty)$ (рис. 29.5). Відповідь можна записати одним із способів. Перший спосіб: $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$; другий спосіб: $-1 < x < 0$ або $x > 0$. ▲

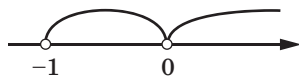


Рис. 29.5

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність

$$|x|(x-1) \geq 0.$$

Розв'язання. Оскільки $|x| \geq 0$, то може здаватися, що дана нерівність рівносильна нерівності $x-1 \geq 0$. Проте проміжку $[1; +\infty)$ не належить число 0, яке є розв'язком заданої нерівності. Отже, шукана множина розв'язків складається з об'єднання множини розв'язків рівняння $|x| = 0$ і множини розв'язків нерівності $x-1 \geq 0$.

Відповідь: $\{0\} \cup [1; +\infty)$. ▲

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків нерівностей (рівнянь), то говорять, що треба розв'язати **сукупність нерівностей (рівнянь)**. Сукупність нерівностей (рівнянь) записують за допомогою квадратної дужки.

Так, щоб розв'язати нерівність $|x|(x-1) \geq 0$, треба розв'язати сукупність

$$\begin{cases} |x| = 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $(x+2)(x-1)^2 \leq 0$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності

$$\begin{cases} x+2 \leq 0, \\ x-1 = 0. \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} x \leq -2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $(-\infty; -2] \cup \{1\}$. ▲

ПРИКЛАД 8 Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x-a)^2(x-2) \geq 0$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності
$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-a = 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x = a. \end{cases}$$

Якщо $a < 2$ (рис. 29.6), то множиною розв'язків заданої нерівності є множина $\{a\} \cup [2; +\infty)$.

Якщо $a \geq 2$ (рис. 29.7), то множиною розв'язків даної нерівності є проміжок $[2; +\infty)$. ▲

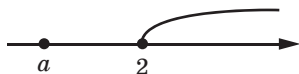


Рис. 29.6

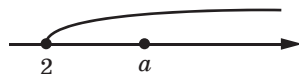


Рис. 29.7

Наприкінці наведемо таблицю позначень і зображень числових проміжків, вивчених у цьому пункті.

Нерівність	Проміжок	Назва	Зображення
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$	Числовий відрізок	
$a < x < b$	$(a; b)$	Відкритий числовий відрізок	
$a < x \leq b$	$(a; b]$	Числовий відрізок, відкритий зліва	
$a \leq x < b$	$[a; b)$	Числовий відрізок, відкритий справа	



1. У яких випадках говорять, що треба розв'язати систему нерівностей?
2. За допомогою якого символу записують систему нерівностей?
3. Що називають розв'язком системи нерівностей з однією змінною?
4. Що означає розв'язати систему нерівностей?
5. Поясніть, що називають перерізом двох проміжків.
6. Опишіть алгоритм розв'язування системи нерівностей.
7. Як записують, читають, називають і зображують проміжок, який є множиною розв'язків нерівності в виду: $a \leq x \leq b$? $a < x < b$? $a < x \leq b$? $a \leq x < b$?
8. У яких випадках говорять, що треба розв'язати сукупність нерівностей (рівнянь)?

ВПРАВИ

29.1.° Які із чисел -6 ; -5 ; 0 ; 2 ; 4 є розв'язками системи нерівностей:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leq 10? \end{cases}$$

29.2.° Розв'язком яких із систем нерівностей є число -3 :

$$1) \begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq 6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$$

29.3.° Зобразіть на координатній прямій і запишіть проміжок, який задано нерівністю:

$$1) 0 < x < 5; \quad 3) 0,2 \leq x < 102;$$

$$2) \frac{1}{6} < x \leq 2\frac{1}{7}; \quad 4) -2,4 \leq x \leq -1.$$

29.4.° Запишіть усі цілі числа, які належать проміжку:

$$1) [3; 7]; \quad 2) (2,9; 6]; \quad 3) [-5,2; 1]; \quad 4) (-2; 2).$$

29.5.° Укажіть найменше й найбільше цілі числа, які належать проміжку:

$$1) [-12; -6]; \quad 2) (5; 11]; \quad 3) (-10,8; 1,6]; \quad 4) [-7,8; -2,9].$$

29.6.° Зобразіть на координатній прямій та запишіть переріз проміжків:

$$\begin{array}{ll} 1) [-1; 7] \text{ і } [4; 9]; & 4) (-\infty; 2,6) \text{ і } (2,8; +\infty); \\ 2) [3; 6] \text{ і } (3; 8); & 5) [9; +\infty) \text{ і } [11,5; +\infty); \\ 3) (-\infty; 3,4) \text{ і } (2,5; +\infty); & 6) (-\infty; -4,2] \text{ і } (-\infty; -1,3). \end{array}$$

29.7.° Укажіть на рисунку 29.8 зображення множини розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \leq 6. \end{cases}$



а



б



в



г

Рис. 29.8

29.8.° Укажіть на рисунку 29.9 зображення множини розв'язків подвійної нерівності $-4 \leq x \leq 2$.

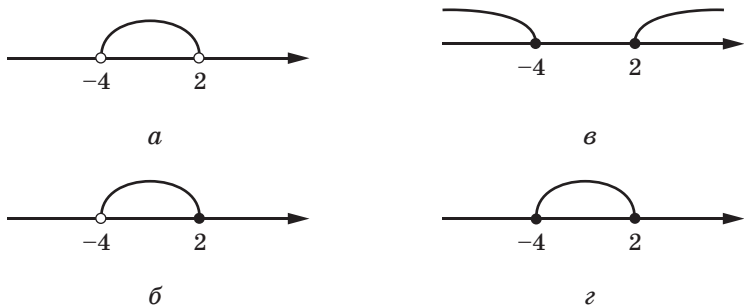


Рис. 29.9

29.9.° Який із наведених проміжків є множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

- 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

29.10.° Відомо, що $a < b < c < d$. Який із наведених проміжків є перерізом проміжків $(a; c)$ і $(b; d)$:

- 1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

29.11.° Відомо, що $m < n < k < p$. Який із наведених проміжків є перерізом проміжків $(m; p)$ і $(n; k)$:

- 1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

29.12.° Зобразіть на координатній прямій та запишіть множину розв'язків системи нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geq -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geq -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 2; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leq 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leq -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geq 2, \\ x < 2. \end{cases}$

29.13.° Розв'яжіть систему нерівностей:

- 1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geq -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6x + 3 \geq 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x - 6 \leq x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$
 2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 10x - 1 \geq 3, \\ 7 - 3x \geq 2x - 3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 14 \geq 18 - x, \\ 1,5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$
 3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \frac{x}{4} < 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leq x + 9; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x + 19 \leq 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

29.14.° Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} -4x \leq -12, \\ x+2 > 6; \end{cases} & 3) \begin{cases} 3x-3 < 5x, \\ 7x-10 < 5x; \end{cases} & 5) \begin{cases} x+3 \geq 8, \\ \frac{x+1}{3} < 6; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 8-x \geq 5, \\ x-7 \leq 2; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2-3x < 4x-12, \\ 7+3x \geq 2x+10; \end{cases} & 6) \begin{cases} 5x-2 \geq 2x+1, \\ 2x+3 \leq 33-3x. \end{cases} \end{array}$$

29.15.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$\begin{array}{ll} 1) -3 < x - 4 < 7; & 3) 0,8 \leq 6 - 2x < 1,4; \\ 2) -2,4 \leq 3x + 0,6 \leq 3; & 4) 4 < \frac{x}{5} - 2 \leq 5; \end{array}$$

29.16.° Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{array}{ll} 1) 2 < x + 10 \leq 14; & 3) -1,8 \leq 1 - 7x \leq 36; \\ 2) 10 < 4x - 2 < 18; & 4) 1 \leq \frac{x+1}{4} < 1,5. \end{array}$$

29.17.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей $\begin{cases} -2x \geq -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

29.18.° Знайдіть суму цілих розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x+8 \geq 4, \\ 5x+1 \leq 9. \end{cases}$$

29.19.° Скільки цілих розв'язків має нерівність $-3 \leq 7x - 5 < 16$?

29.20.° Знайдіть найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} x+8 \geq 17, \\ \frac{x}{2} > 4,5. \end{cases}$$

29.21.° Знайдіть найбільший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x+1 < -4, \\ 3x-6 \leq -12. \end{cases}$$

29.22.° Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 8(2-x) - 2x > 3, \\ -3(6x-1) - x < 2x; \end{cases} & 4) \begin{cases} 2(x+11) \geq 3(6-x), \\ (x-3)(x+6) \geq (x+5)(x-4); \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \frac{x+1}{4} - \frac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x-1) < 5(x-4) - 7; \end{cases} & 5) \begin{cases} 2x - \frac{x+1}{2} \leq \frac{x+1}{3}, \\ (x+5)(x-3) + 41 \geq (x-6)^2; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2(x-3) \leq 3x+4(x+1), \\ (x-3)(x+3) \leq (x-4)^2 - 1; \end{cases} & 6) \begin{cases} 5x+4 \leq 2x-8, \\ (x+2)(x-1) \geq (x+3)(x-2); \end{cases} \end{array}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x+2}{7} < \frac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2)+4x < (x-7)(x+7); \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{6x+1}{6} - \frac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x+8)-3(x+2) < 5-x. \end{cases}$$

29.23.° Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{2x-3}{5} - \frac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1)+7(x+2) > 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < \frac{x+12}{6}, \\ 0,3x - 19 \leq 1,7x - 5; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{4x+1}{4} \leq 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$$

29.24.° Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

$$1) \begin{cases} 2x-1 < 1,7-x, \\ 3x-2 \geq x-8; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1, \\ 2x - \frac{x}{2} \geq 10. \end{cases}$$

29.25.° Скільки цілих розв'язків має система нерівностей:

$$1) \begin{cases} 4x+3 \geq 6x-7, \\ 3(x+8) \geq 4(8-x); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2, \\ \frac{2x-5}{3} \geq -3? \end{cases}$$

29.26.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) -3 < \frac{2x-5}{2} < 4;$$

$$2) -4 \leq 1 - \frac{x-2}{3} \leq -3.$$

29.27.° Розв'яжіть нерівність:

$$1) -2 \leq \frac{6x+1}{4} < 4;$$

$$2) 1,2 < \frac{7-3x}{5} \leq 1,4.$$

29.28.° Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3,6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x-6 < 8, \\ 4-4x < 10, \\ 8x-9 > 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0,4-8x \geq 3,6, \\ 1,5x-2 < 4, \\ 4,1x+10 < 1,6x+5. \end{cases}$$

29.29.° Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} -x < 2, \\ 2x \geq 7, \\ x < -4; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x-1 < 2x+2, \\ 2x+1 > 8-5x, \\ 5x-25 \leq 0. \end{cases}$$

29.30.° Одна сторона трикутника дорівнює 4 см, а сума двох інших — 8 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо довжина кожної з них дорівнює цілому числу сантиметрів.

29.31.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} x < 1, \\ x > 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 1, \\ x < 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 1, \\ x > 3; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x > 1, \\ x < 3. \end{cases}$$

29.32.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} x \leq 7, \\ x < 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 7, \\ x > 7; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x \geq 7, \\ x > 7; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x > 7, \\ x < 7. \end{cases}$$

29.33.° Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \leq 1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \geq 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

29.34.* Розв'яжіть сукупність $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 7. \end{cases}$

29.35.* Розв'яжіть систему:

$$1) \begin{cases} x > 2, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 4, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 3; \end{cases} \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > -3, \\ \begin{cases} x > 1, \\ x < 0; \end{cases} \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x < 4, \\ \begin{cases} x > 2, \\ x < -2. \end{cases} \end{cases}$$

29.36.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) x^2(x+2) > 0; \quad 3) x^2(x-2) \geq 0; \quad 5) x^2(x+2) \leq 0; \\ 2) x^2(x+2) \geq 0; \quad 4) x^2(x-2) < 0; \quad 6) x^2(x-2) \leq 0.$$

29.37.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) |x-1|(x+3) > 0; \quad 3) |x-1|(x-3) \geq 0; \quad 5) |x-1|(x+3) \leq 0; \\ 2) |x-1|(x+3) \geq 0; \quad 4) |x-1|(x-3) < 0; \quad 6) |x-1|(x-3) \leq 0.$$

29.38.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{x}{|x-1|} > 0; \quad 2) \frac{x}{|x-1|} \geq 0; \quad 3) \frac{x}{|x+1|} < 0; \quad 4) \frac{x}{|x+1|} \leq 0.$$

29.39.* При яких значеннях параметра a має хоча б один розв'язок система нерівностей:

$$1) \begin{cases} x \geq 3, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq a? \end{cases}$$

29.40.* При яких значеннях параметра a не має розв'язків система нерівностей:

$$1) \begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq a? \end{cases}$$

29.41.* При яких значеннях параметра a множиною розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x > -1, \\ x \geq a \end{cases}$ є проміжок:

1) $(-1; +\infty)$;

2) $[1; +\infty)$?

29.42.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < 2, \\ x \leq a. \end{cases}$

29.43.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

29.44.** При яких значеннях параметра a множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 7, \\ x < a \end{cases}$ містить чотири цілих розв'язки?

29.45.** При яких значеннях параметра b множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x < 5, \\ x \geq b \end{cases}$ містить три цілих розв'язки?

29.46.** При яких значеннях параметра a найменшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 6, \\ x > a \end{cases}$ є число 9?

29.47.** При яких значеннях параметра b найбільшим цілим розв'язком системи нерівностей $\begin{cases} x \leq b, \\ x < -2 \end{cases}$ є число -6 ?

29.48.** При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a \leq x \leq a+8, \\ x \geq 4 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 5?

29.49.** При яких значеннях параметра a розв'язком системи $\begin{cases} a-7 \leq x \leq a, \\ x \leq 3 \end{cases}$ є відрізок, довжина якого дорівнює 4?

29.50.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $(x-a)^2(x-1) > 0$;

3) $(x-a)(x-1)^2 < 0$;

2) $(x-a)^2(x-1) \geq 0$;

4) $(x-a)(x-1)^2 \leq 0$.

29.51.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|x+a| \cdot |x+1| > 0$;

3) $(x+a) \cdot |x+1| < 0$;

2) $|x+a| \cdot |x+1| \geq 0$;

4) $(x+a) \cdot |x+1| \leq 0$.

30. Рівняння та нерівності, які містять знак модуля

Нагадаємо основні відомості про модуль числа.

Означення. Модулем числа a називають відстань від точки, яка зображує число a на координатній прямій, до початку відліку.

Модуль числа a позначають так: $|a|$.

З означення модуля випливає, що $|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$

Отже, щоб знайти модуль числа (або, як ще говорять, «розкрити модуль»), треба знати знак числа.

Наприклад, $|\pi - 3| = \pi - 3$, оскільки $\pi > 3$.

$|\pi - 4| = 4 - \pi$, оскільки $\pi < 4$.

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$, оскільки $x^2 + 1 > 0$ при будь-якому значенні x .

ПРИКЛАД 1 Розкрийте модуль $|2x - 1|$.

Розв'язання. З означення модуля числа випливає, що

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{якщо } x \geq \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x, & \text{якщо } x < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Властивості модуля, які випливають з означення

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| = |-a|$;
- 3) якщо $|a| = |b|$, то $a = b$ або $a = -b$;
- 4) якщо $|a| = b$, то $b \geq 0$ і $a = b$ або $a = -b$;
- 5) відстань між точками $A(a)$ і $B(b)$ координатної прямої дорівнює $|a - b|$ (рис. 30.1).



Рис. 30.1

Розглянемо основні прийоми розв'язування рівнянь, які містять знак модуля.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $|x - 1| = 2$.

Розв'язання. Із властивості 4 випливає, що дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\begin{cases} x - 1 = 2, \\ x - 1 = -2. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x = 3, \\ x = -1. \end{cases}$

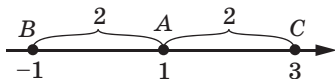


Рис. 30.2

Відповідь: $-1; 3$. ▲

Це рівняння можна розв'язати інакше, якщо умову задачі «перекласти геометричною мовою»: знайдіть координати всіх точок координатної прямої, які віддалені від точки A (1) на 2 одиничних відрізки. Очевидно, що існують дві такі точки: B (-1) і C (3) (рис. 30.2).

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$.

Розв'язання. Якщо замінити дане рівняння сукупністю рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3x + 1, \\ 2x - 1 = -3x - 1, \end{cases}$$

то ми отримаємо два значення змінної x : -2 і 0 . Очевидно, що число -2 не є коренем заданого рівняння.

Певна річ, виникає запитання: «Чому заміна рівняння сукупністю призвела до появи стороннього кореня, тобто чому такий перехід від рівняння до сукупності не є рівносильним?»

Річ у тім, що ліва частина заданого рівняння набуває тільки невід'ємних значень. Тому $3x + 1 \geq 0$, тобто $x \geq -\frac{1}{3}$. Отже, шукані

корені мають належати проміжку $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. У записаній сукупності такої вимоги немає.

Насправді задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0, \\ \begin{cases} 2x - 1 = 3x + 1, \\ 2x - 1 = -3x - 1, \end{cases} \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $x = 0$. ▲

Узагалі, рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Рівняння зазначеного виду можна розв'язати й іншим способом: розглянути два випадки $f(x) \geq 0$ і $f(x) < 0$, тобто розкрити модуль $|f(x)|$.

Таким чином, рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Наприклад, розв'язання рівняння $|2x - 1| = 3x + 1$ можна записати так:

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ 2x - 1 = 3x + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 1 < 0, \\ -2x + 1 = 3x + 1; \end{cases} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x = -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

Розв'язання. Розіб'ємо область визначення рівняння на проміжки $(-\infty; -1)$ (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку від'ємні), $[-1; 2]$ (вираз $x + 1$ набуває на цьому проміжку невід'ємних значень, а вираз $x - 2$ — недодатних) і $(2; +\infty)$ (значення виразів $x + 1$ і $x - 2$ на цьому проміжку додатні). Зазначимо, що точки, у яких вирази дорівнюють нулю, можна віднести до будь-якого з проміжків, але тільки до одного з них. Отже, задане рівняння рівносильне сукупності трьох систем.

- 1) $\begin{cases} x < -1, \\ -(x+1) - (x-2) = 3. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x < -1, \\ x = -1. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.
- 2) $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ (x+1) - (x-2) = 3. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ 0x = 0. \end{cases}$ Розв'язком цієї системи

є проміжок $[-1; 2]$.

- 3) $\begin{cases} x > 2, \\ (x+1) + (x-2) = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x = 2. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

Відповідь: $[-1; 2]$. ▲

Розв'язання заданого рівняння можна оформити в інший спосіб, одразу записавши сукупність:

$$\begin{cases} \begin{cases} x < -1, \\ -x-1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ x+1-x+2=3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ x+1+x-2=3. \end{cases} \end{cases}$$

Також це рівняння можна розв'язати за допомогою геометричної інтерпретації: шукані корені — це координати точок координатної прямої, сума відстаней від яких до точок $A(-1)$ і $B(2)$ дорівнює 3. Зрозуміло, що координати всіх точок відрізка AB (рис. 30.3) утворюють шукану множину коренів.



Рис. 30.3

Розглянемо основні методи розв'язування нерівностей, які містять знак модуля.

Теорема 30.1. Нерівність виду $|x| < a$ рівносильна системі

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $a \leq 0$, то як задана нерівність, так і записана система розв'язків не мають. Отже, вони є рівносильними.

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x < a, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x < a. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Звідси} \begin{cases} 0 \leq x < a, \\ -a < x < 0; \end{cases} \quad -a < x < a.$$

Очевидно, що отримана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x < a, \\ x > -a. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і не-

рівність $|x| < a$, і систему $\begin{cases} x < a, \\ x > -a \end{cases}$ задовольняють координати тих

і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, меншу від a .

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $|3x - 1| < 2$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x - 1 < 2, \\ 3x - 1 > -2. \end{cases}$$

$$\text{Звідси} \begin{cases} 3x < 3, \\ 3x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь:} \left(-\frac{1}{3}; 1\right). \quad \blacktriangle$$

Узагальненням теореми 30.1 є така теорема.

Теорема 30.2. Нерівність виду $|f(x)| < g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 30.1.

Теорема 30.3. Нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} x > a, \\ x < -a. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків як заданої нерівності, так і сукупності є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності й сукупності є множина $(-\infty; +\infty)$. Тому, якщо $a \leq 0$, то задана нерівність і записана сукупність нерівностей є рівносильними.

Якщо $a > 0$, то, розкривши модуль, можна записати, що задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x > a, \\ x < 0, \\ -x > a. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x > a, \\ x < -a. \end{cases}$ ▲

Зауважимо, що для випадку, коли $a > 0$, доведення теореми можна провести, використовуючи геометричну інтерпретацію: і нерівність $|x| > a$, і сукупність $\begin{cases} x > a, \\ x < -a \end{cases}$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a .

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $|4x - 3| > 5$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 4x - 3 < -5. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 4x > 8, \\ 4x < -2; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x < -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. ▲

Узагальненням теореми 30.3 є така теорема.

Теорема 30.4. Нерівність виду $|f(x)| > g(x)$ рівносильна сукупності нерівностей

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 30.3.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $|x - 1| + |x - 2| > x + 3$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності трьох систем.

1) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x < 0; \end{cases} x < 0.$

- 2) $\begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x - 1 - x + 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ x < -2. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.
- 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > x + 3; \end{cases} \begin{cases} x > 2, \\ x > 6; \end{cases} x > 6.$

Відповідь: $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$. ▲



1. Сформулюйте означення модуля числа.
2. Що потрібно знати, щоб розкрити модуль числа?
3. Сформулюйте властивості, які впливають з означення модуля.
4. Сформулюйте теореми про розв'язування нерівностей, які містять знак модуля.

ВПРАВИ

30.1.° Розкрийте модуль:

- 1) $\left| \frac{\pi}{3} - 1 \right|$; 3) $\left| 2 - \frac{\pi}{3} \right|$; 5) $\left| x - \frac{x^2}{4} - 1 \right|$;
 2) $|\pi - 3,14|$; 4) $|x^2 + 1|$; 6) $|x^2 + 2x + 2|$.

30.2.° Розкрийте модуль:

- 1) $\left| \frac{\pi}{4} - 0,7 \right|$; 3) $|\pi - 3,15|$; 5) $\left| x^2 + x + \frac{1}{4} \right|$;
 2) $\left| \frac{\pi}{4} - 0,8 \right|$; 4) $|x^4 + 2|$; 6) $|x^2 + 4x + 5|$.



30.3.° Доведіть, що:

- 1) $|ab| = |a| \cdot |b|$; 4) $|a - b| = |b - a|$;
 2) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; 5) $-|a| \leq a \leq |a|$.
 3) $(|a|)^2 = |a^2| = a^2$;

30.4.° Відомо, що $a + b < 0$, $a > 0$, $b < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a| - |b|$.

30.5.° Відомо, що $a + b > 0$, $a < 0$, $b > 0$. Порівняйте з нулем значення виразу $|a| - |b|$.

30.6.° Спростіть вираз:

- 1) $(3|x| - |y|)(3|x| + |y|)$; 3) $\frac{|m| - |n|}{|m| + |n|} - \frac{|m| + |n|}{|m| - |n|}$.
 2) $(2|a| - 3|b|)^2 + (2|a| + 3|b|)^2$;

30.7.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) |x + 3| = 2; \quad 2) |1 - 2x| = 5; \quad 3) |6x + 5| = 1.$$

30.8.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) |x - 1| = 4; \quad 2) |1 - 3x| = 7; \quad 3) |-4x - 1| = 8.$$

 **30.9.°** Доведіть, що:

$$\begin{aligned} 1) \text{ нерівність } |f(x)| \leq g(x) \text{ рівносильна системі } \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x); \end{cases} \\ 2) \text{ нерівність } |f(x)| \geq g(x) \text{ рівносильна сукупності } \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

30.10.° Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{aligned} 1) |x + 5| < 4; & \quad 3) |3x + 2| \leq 1; \\ 2) |2x - 1| > 3; & \quad 4) |5x - 1| \geq 4. \end{aligned}$$

30.11.° Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{aligned} 1) |x - 3| \leq 6; & \quad 3) |1 - 4x| < 2; \\ 2) |3x - 2| \geq 3; & \quad 4) |5x + 2| > 6. \end{aligned}$$

 **30.12.*** Доведіть, що:

$$\begin{aligned} 1) |a + b| &\leq |a| + |b|; \\ 2) |a - b| &\geq |a| - |b|; \\ 3) |a + b| &= |a| + |b| \text{ тоді й тільки тоді, коли } ab \geq 0; \\ 4) |a| + |b| &= a + b \text{ тоді й тільки тоді, коли } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0; \\ 5) |a - b| &= |a| + |b| \text{ тоді й тільки тоді, коли } ab \leq 0. \end{aligned}$$

30.13.* Доведіть, що:

$$1) |x| + |x - 3| \geq 3; \quad 2) |x - 1| + |x - 3| \geq 2.$$

30.14.* Знайдіть найменше значення виразу:

$$1) |x| + |x + 4|; \quad 2) |x + 2| + |x - 3|.$$

30.15.* Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} |x + y - 4| = \pi, \\ |x - 3| + |y - 1| = 3. \end{cases}$$

30.16.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) ||x| - 2| = 2; \quad 2) ||x| + 2| = 1.$$

30.17.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) ||x| - 3| = 1; \quad 2) ||x| + 1| = 1.$$

30.18.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) |2x - 1| = |3x + 2|; \quad 2) |3 - 4x| = |2x + 1|.$$

30.19.* Розв'яжіть рівняння:

1) $|x + 2| = 4x - 1$;

3) $|x - 1| = 4x + 3$.

2) $|3x + 2| = 2x - 1$;

30.20.* Розв'яжіть рівняння:

1) $|x + 2| = 2(3 - x)$;

3) $|3x + 1| = 4x - 1$.

2) $|3x - 1| = x + 1$;

30.21.* Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 5| < 2x + 3$;

3) $|4x + 5| > 3x - 1$;

2) $|1 - 2x| \leq x + 1$;

4) $|2x - 7| \geq x - 2$.

30.22.* Розв'яжіть нерівність:

1) $|x + 2| < 2x - 1$;

3) $|3x - 2| \geq 2x + 1$;

2) $5x + 3 \geq |x + 1|$;

4) $|3x - 5| > 9x + 1$.

30.23.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x - 2| + |x - 4| = 3$;

2) $|x - 2| - 3|3 - x| + x = 0$;

3) $|4 - x| + |2x - 2| = 5 - 2x$;

4) $|x - 2| |x + 1| = 5$;

5) $|x| + |3x + 2| + |2x - 1| = 5$;

6) $|x| + |x - 6| = 6$;

7) $|x + 2| - |x - 3| = 5$;

8) $|5x - 2| - |7x - 3| + 2x = 1$;

9) $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1$;

10) $\frac{|x-3|+|x-1|}{|x-2|+|x-4|} = 1$.

30.24.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x + 1| + |x - 5| = 20$;

6) $|x| - |x - 2| = 2$;

2) $|x + 3| - |5 - 2x| = 2 - 3x$;

7) $|7x - 12| - |7x - 11| = 1$;

3) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$;

8) $\frac{|x-6|}{3-|x-3|} = 1$;

4) $|x - 1| + |x - 2| = |x - 3| + 4$;

9) $\frac{|x|+|x+1|-1}{|x|-|x-2|+2} = 1$.

5) $|x + 5| + |x - 8| = 13$;

30.25." Розв'яжіть нерівність:

- 1) $|x+1| + |x+2| > 2x+3$; 3) $|x+1| + |x-1| \leq 2$;
2) $2|x-3| + |x+1| \leq 3x+1$; 4) $|x-2| |x-2| + 3|x+5| \geq 2x$.

30.26." Розв'яжіть нерівність:

- 1) $2|x+1| - |x-1| > 3$; 3) $|x-1| + |x+3| \leq 4$;
2) $|x-1| - 2|x+3| > x+7$; 4) $|x-2| |x+1| + 3|x+2| \geq 4$.

30.27." Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |x+3| + |x-1|$; 2) $y = 2|x-2| - |x-1|$.

30.28." Побудуйте графік функції $y = |x+2| + 2|x-1| - x$.

30.29." Визначте кількість коренів рівняння залежно від значення параметра a :

- 1) $|3x-4| = a+x$; 2) $2x - |x| + |x-1| = a$.

30.30." Визначте кількість коренів рівняння залежно від значення параметра a :

- 1) $|x-1| + |x+1| = a$; 2) $|x-2| - |x+2| = a$.

30.31." При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння

$$|x-1| + |x-a| = 1-a$$

містить три цілих числа?

30.32." При яких значеннях параметра a множина коренів рівняння

$$|x-3| + |x-a| = a-3$$

містить одне парне число?

§ 6

КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

31. Функція $y = x^2$ та її графік

Позначимо через y площу квадрата зі стороною x . Тоді $y = x^2$.
Зі змінюю стороною x квадрата відповідно змінюватиметься і його площа y .

Зрозуміло, що кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y . Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = x^2$ задає функцію.

Розглянемо функцію $y = x^2$, областю визначення якої є множина всіх чисел. У таблиці наведено деякі значення аргументу та відповідні їм значення функції.

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо на координатній площині точки, координати яких $(x; y)$ візьмемо з таблиці (рис. 31.1).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, позначимо, тим менше отримана фігура (рис. 31.2) відрізнатиметься від графіка функції $y = x^2$.

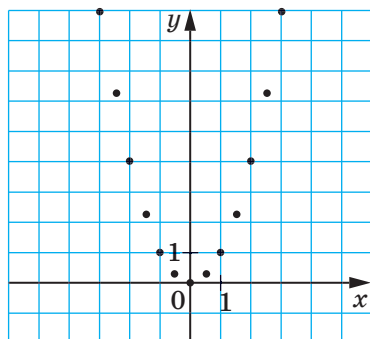


Рис. 31.1

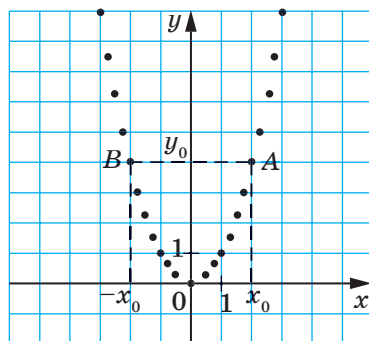


Рис. 31.2

Пара чисел $(0; 0)$ є розв'язком рівняння $y = x^2$. Отже, графік даної функції проходить через початок координат. Оскільки $y = x^2$ і $x^2 \geq 0$, то $y \geq 0$, тобто серед позначених точок не може бути точок з від'ємними ординатами.

Областю значень функції $y = x^2$ є множина всіх невід'ємних чисел.

Оскільки $x^2 = (-x)^2$, то можна зробити висновок: якщо точка $A(x_0; y_0)$ належить графіку функції, то точка $B(-x_0; y_0)$ також йому належить (рис. 31.2).

Якби вдалося позначити на координатній площині всі точки, координати яких задовольняють рівняння $y = x^2$, то отримали б фігуру — графік функції $y = x^2$, яку називають **параболою** (рис. 31.3).

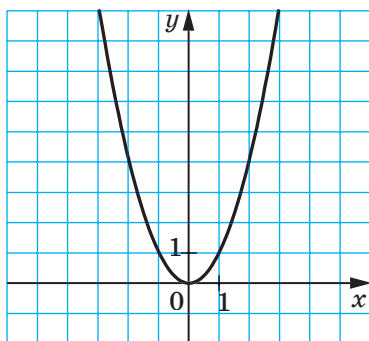


Рис. 31.3

Точка з координатами $(0; 0)$ поділяє параболу на дві рівні частини, кожна з яких називають **віткою параболі**, а саму точку — **вершиною параболі**.

У таблиці наведено властивості функції $y = x^2$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	Множина всіх чисел
Область значень	Множина невід'ємних чисел
Графік	Парабола
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$
Властивість графіка	Якщо точка $A(x_0; y_0)$ належить параболі $y = x^2$, то точка $B(-x_0; y_0)$ також належить цій параболі.

ПРИКЛАД Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = x + 2$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$ (рис. 31.4). Ці графіки перетинаються у двох точках, абсиси яких дорівнюють 2 і -1 . Отже, як при $x = 2$, так і при $x = -1$ значення виразів x^2 і $x + 2$ рівні, тобто числа 2 і -1 є коренями рівняння $x^2 = x + 2$. Перевірка це підтверджує. Справді, $2^2 = 2 + 2$ і $(-1)^2 = -1 + 2$. ▲

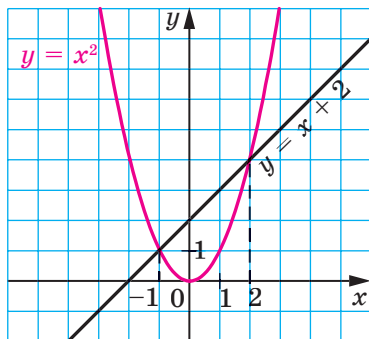


Рис. 31.4



1. Яка множина є областю визначення функції $y = x^2$?
2. Яка множина є областю значень функції $y = x^2$?
3. При якому значенні аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює нулю?
4. Порівняйте значення функції $y = x^2$ при протилежних значеннях аргументу.
5. Яка фігура є графіком функції $y = x^2$?

ВПРАВИ

31.1.° Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -6 ; $0,8$; $-1,2$; 150 ;
- 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 49 ; 0 ; 2500 ; $0,04$.

31.2.° Не виконуючи побудови графіка функції $y = x^2$, визначте, чи проходить цей графік через точку:

- 1) $A(-8; 64)$; 2) $B(-9; -81)$; 3) $C(0,5; 2,5)$; 4) $D(0,1; 0,01)$.

31.3.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = 4x - 4$. Побудуйте графіки даних функцій і позначте знайдені точки.

31.4.° Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = x - 1; \quad 2) x^2 - 2x - 3 = 0; \quad 3) x^2 = \frac{8}{x}.$$

31.5.° Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^2 = -4x - 3; \quad 2) x^2 - 3x + 5 = 0; \quad 3) x^2 + \frac{1}{x} = 0.$$

31.6.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ y = -2; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y + 6 = 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10. \end{cases}$$

31.7.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = x^2, \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

 **31.8.*** Функцію f задано в такий спосіб: $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(0,5)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

 **31.9.*** Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x < 2, \\ 4, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-4)$, $f(-0,3)$, $f(1,9)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(2)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

 **31.10.*** Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

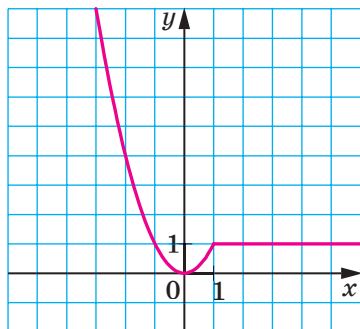
1) Знайдіть $f(-7)$, $f(0)$, $f(2)$.

2) Побудуйте графік даної функції.

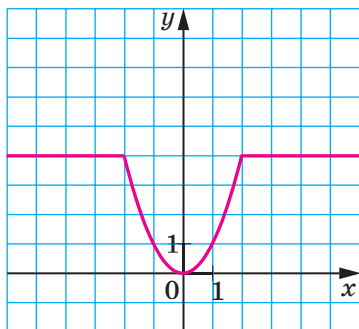
 **31.11.*** Дано функцію $f(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2, & \text{якщо } x > -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-12)$, $f(-1)$, $f(-0,9)$, $f(3)$, $f(0)$.

2) Побудуйте графік даної функції.



а



б

Рис. 31.5

31.12.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^3 + x^2}{x+1}$;

2) $y = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 4}$.

31.13.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^3}{x}$;

2) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

31.14.* Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y = -x^2$. Побудуйте графік цієї функції.

31.15.* При якому значенні параметра k графіки функцій $y = kx - 3$ і $y = x^2$ перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює -2 ?

31.16.* При якому значенні параметра b графіки функцій $y = 8x + b$ і $y = x^2$ перетинаються в точці, що належить осі ординат?

31.17.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 31.5.

31.18.* Задайте за допомогою формул функцію, графік якої зображено на рисунку 31.6.

31.19.** Побудуйте графік рівняння:

1) $(y - x^2)(y - x) = 0$;

2) $y^2 - x^4 = 0$;

3) $\frac{y - x^2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0$;

4) $\frac{y - x^2}{y - x} = 0$.

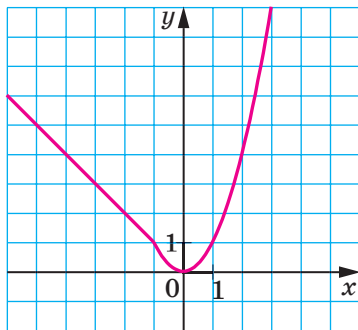


Рис. 31.6

31.20." Побудуйте графік рівняння:

$$1) (y + x^2)(y + x) = 0; \quad 2) \frac{x^2 - y}{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 0.$$

31.21." Побудуйте графік рівняння:

$$1) (y - x^2) + (y - x^2)^2 = 0; \quad 2) (y - 2x)^2 + (y + x^2)^2 = 0.$$

32. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо квадрат, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Нехай довжина його сторони дорівнює x одиниць. Тоді рівняння $x^2 = 49$ можна вважати математичною моделлю задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям.

Коренями цього рівняння є числа 7 і -7 . Говорять, що числа 7 і -7 є **квадратними коренями** із числа 49.

Означення. Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

Наведемо кілька прикладів.

Квадратними коренями із числа 9 є числа 3 і -3 . Справді, $3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$.

Квадратними коренями із числа $\frac{25}{4}$ є числа $\frac{5}{2}$ і $-\frac{5}{2}$. Справді,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Квадратним коренем із числа 0 є тільки число 0. Справді, існує лише одне число, квадрат якого дорівнює нулю, — це число 0.

Оскільки не існує числа, квадрат якого дорівнює від'ємному числу, то квадратного кореня з від'ємного числа не існує.

Додатний корінь рівняння $x^2 = 49$, число 7, є відповіддю до задачі про знаходження сторони квадрата, площа якого дорівнює 49 квадратним одиницям. Це число називають **арифметичним квадратним коренем** із числа 49.

Означення. Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ називають **знаком квадратного кореня** або **радикалом** (від лат. *radix* — корінь).

Запис $\sqrt{a}$ читають: «квадратний корінь з a », опускаючи при читанні слово «арифметичний».

Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**. Наприклад, у записі $\sqrt{b-5}$ двочлен $b-5$ є підкореневим виразом. З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що **підкореневий вираз може набувати тільки невід'ємних значень**. Так, областю визначення виразу $\sqrt{b-5}$ є числовий проміжок $[5; +\infty)$.

Дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа називають **добуванням квадратного кореня**.

Розглянемо кілька прикладів:

$$\sqrt{9} = 3, \text{ оскільки } 3 \geq 0 \text{ і } 3^2 = 9;$$

$$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}, \text{ оскільки } \frac{5}{2} \geq 0 \text{ і } \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};$$

$$\sqrt{0} = 0, \text{ оскільки } 0 \geq 0 \text{ і } 0^2 = 0.$$

Узагалі, **рівність $\sqrt{a} = b$ виконується за умови, що $b \geq 0$ і $b^2 = a$** .

Цей висновок можна подати в іншій формі: **для будь-якого невід'ємного числа a справедливо, що $\sqrt{a} \geq 0$ і $(\sqrt{a})^2 = a$** .

Наприклад, $\sqrt{4} \geq 0$ і $(\sqrt{4})^2 = 4$, $\sqrt{2} \geq 0$ і $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\sqrt{5,2} \geq 0$ і $(\sqrt{5,2})^2 = 5,2$.

Наголосимо, що до поняття квадратного кореня ми прийшли, розв'язуючи рівняння виду $x^2 = a$, де $a \geq 0$. Коренями цього рівняння є числа, кожне з яких є квадратним коренем із числа a .

Пошук коренів рівняння $x^2 = a$ проілюструємо, розв'язавши графічно рівняння $x^2 = 4$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 4$ (рис. 32.1). Точки перетину цих графіків мають абсциси 2 і -2, які і є коренями заданого рівняння.

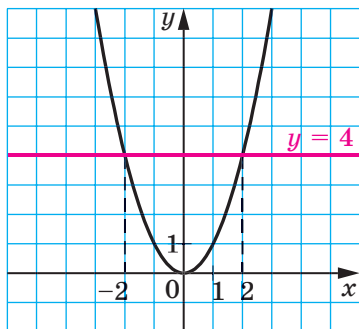


Рис. 32.1

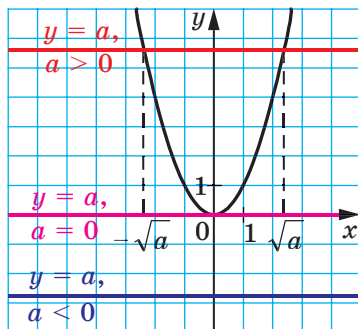


Рис. 32.2

Рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, що підтверджується графічно: графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ при $a < 0$ спільних точок не мають (рис. 32.2).

При $a = 0$ рівняння $x^2 = a$ має єдиний корінь $x = 0$, що також підтверджується графічно: графіки функцій $y = x^2$ і $y = 0$ мають тільки одну спільну точку (рис. 32.2).

Графічний метод також дає змогу зробити такий висновок: якщо $a > 0$, то рівняння $x^2 = a$ має два корені. Справді, парабола $y = x^2$ і пряма $y = a$, де $a > 0$, мають дві спільні точки (рис. 32.2). При цьому коренями рівняння $x^2 = a$ є числа $\sqrt{a}$ і $-\sqrt{a}$. Дійсно, $(\sqrt{a})^2 = a$, $(-\sqrt{a})^2 = a$.

Наприклад, рівняння $x^2 = 5$ має два корені: $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу $(-8\sqrt{2})^2$.

Розв'язання. Застосувавши правило піднесення добутку до степеня та тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, отримуємо:

$$(-8\sqrt{2})^2 = (-8)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 64 \cdot 2 = 128. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2}\sqrt{x} - 3 = 0;$$

$$2) \sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2.$$

Розв'язання. 1) Маємо: $\frac{1}{2}\sqrt{x} = 3$; $\sqrt{x} = 6$. Тоді $x = 6^2$; $x = 36$.

$$2) \sqrt{1 + \sqrt{x+2}} = 2; 1 + \sqrt{x+2} = 2^2; \sqrt{x+2} = 3; x + 2 = 3^2; x = 7. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(x - 5)^2 = 16$.

Розв'язання. Множина коренів даного рівняння дорівнює об'єднанню множин коренів таких двох рівнянь: $x - 5 = 4$ і $x - 5 = -4$, тобто дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} x - 5 = 4, \\ x - 5 = -4. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x = 9, \\ x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: 1; 9. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $(3x - 1)^2 = 2$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 1 = -\sqrt{2}, \\ 3x - 1 = \sqrt{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси } \begin{cases} 3x = 1 - \sqrt{2}, \\ 3x = 1 + \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}, \\ x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1 - \sqrt{2}}{3}; \frac{1 + \sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 5 Знайдіть область визначення виразу:

$$1) \frac{\sqrt{|x| - 1}}{x^2 - 4};$$

$$2) \sqrt{3 - |x|} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}.$$

Розв'язання

1) Даний вираз має зміст, якщо одночасно виконуються дві умови: підкореневий вираз невід'ємний і знаменник дробу не дорівнює нулю, тобто $|x| - 1 \geq 0$ і $x^2 - 4 \neq 0$. Отже, область визначення даного виразу дорівнює множині розв'язків системи

$$\begin{cases} |x| - 1 \geq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x \geq 1, \\ x \leq -1, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

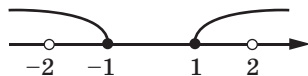


Рис. 32.3

Зобразивши розв'язки цієї системи на координатній прямій (рис. 32.3), отримуємо відповідь.

$$\text{Відповідь: } (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty).$$

2) Щоб знайти область визначення даного виразу, достатньо розв'язати систему

$$\begin{cases} 3 - |x| \geq 0, \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} |x| \leq 3, \\ x > -1; \end{cases} \begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x > -1. \end{cases}$



Рис. 32.4

Звернемося до геометричної інтерпретації (рис. 32.4).

Відповідь: $(-1; 3]$. ▲

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{-x} + \sqrt{x-2} = 2$; 2) $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x-2} = 0$; 3) $(x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0$.

Розв'язання. 1) Знайдемо область визначення даного рівняння. Для цього розв'яжемо систему $\begin{cases} -x \geq 0, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$ Очевидно, що ця система розв'язків не має, а отже, не має розв'язків і задане рівняння.

Відповідь: коренів немає.

2) Ліва частина даного рівняння є сумою двох доданків, кожен з яких може набувати тільки невід'ємних значень. Тоді їхня сума дорівнює нулю, якщо кожен із доданків дорівнює нулю. Отже, одночасно мають виконуватися дві умови: $\sqrt{x^2 - 2x} = 0$ і $\sqrt{x-2} = 0$. Це означає, що треба знайти спільні корені отриманих рівнянь, тобто розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} = 0, \\ \sqrt{x-2} = 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 2x = 0, \\ x - 2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x(x-2) = 0, \\ x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = 2, \\ x = 2. \end{cases}$

Розв'язком останньої системи, а отже, і початкового рівняння, є число 2.

Відповідь: 2.

3) Областю визначення даного рівняння є проміжок $[2; +\infty)$. Ураховуючи це та використовуючи умову рівності добутку нулю, можна записати, що дане рівняння рівносильне сукупності:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ x^2-9=0, \\ x-2 \geq 0. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} x=2, \\ \begin{cases} x=3, \\ x=-3, \end{cases} \\ x \geq 2; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ x=3. \end{cases}$$

Відповідь: 2; 3. ▲

ПРИКЛАД 7 Побудуйте графік функції $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2$.

Розв'язання. Область визначення даної функції — це множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x \geq 0, \\ 1-x \geq 0. \end{cases}$ Звідси $D(y) = [0; 1]$.

Маємо: $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = x + 1 - x = 1$.

Шуканий графік зображено на рисунку 32.5. ▲

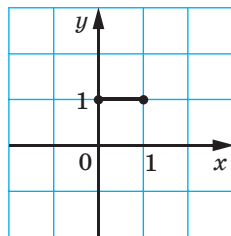


Рис. 32.5

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\sqrt{x}-1)=0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є проміжок $[0; +\infty)$. Тому дане рівняння рівносильне сукупності $\begin{cases} \sqrt{x}-1=0, \\ x-a=0, \\ x \geq 0. \end{cases}$

При будь-якому значенні параметра a задане рівняння має корінь $x=1$. Для того щоб цей корінь залишався єдиним, система повинна або мати цей самий розв'язок, або не мати розв'язків, тобто має виконуватися одна з двох умов: $a=1$ або $a < 0$.

Відповідь: $a=1$ або $a < 0$. ▲



1. Що називають квадратним коренем із числа a ?
2. Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a ?
3. Як позначають арифметичний квадратний корінь із числа a ?
4. Як називають знак $\sqrt{}$?
5. Як читають запис $\sqrt{a}$?
6. Як називають вираз, який стоїть під радикалом?
7. Яких значень може набувати підкореневий вираз?

8. Як називають дію знаходження арифметичного квадратного кореня із числа?
9. Чому дорівнює значення виразу $(\sqrt{a})^2$ для будь-якого невід'ємного значення a ?
10. Скільки коренів має рівняння $x^2 = a$ при $a > 0$? Чому вони дорівнюють?
11. Чи має корені рівняння $x^2 = a$ при $a = 0$? при $a < 0$?

ВПРАВИ

32.1.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

- | | | |
|----------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1) $\sqrt{25} = 5$; | 3) $\sqrt{36} = -6$; | 5) $\sqrt{0,81} = 0,9$; |
| 2) $\sqrt{0} = 0$; | 4) $\sqrt{0,4} = 0,2$; | 6) $\sqrt{10} = 100$? |

32.2.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

- | | | |
|--------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{225}$; | 4) $\sqrt{1,21}$; | 7) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; |
| 2) $\sqrt{0,25}$; | 5) $\sqrt{3600}$; | 8) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; |
| 3) $\sqrt{0,01}$; | 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; | 9) $\sqrt{0,0004}$. |

32.3.° Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

- | | | |
|--------------------|------------------------------|----------------------------|
| 1) $\sqrt{64}$; | 4) $\sqrt{0,49}$; | 7) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; |
| 2) $\sqrt{144}$; | 5) $\sqrt{2500}$; | 8) $\sqrt{0,0009}$; |
| 3) $\sqrt{0,04}$; | 6) $\sqrt{\frac{16}{121}}$; | 9) $\sqrt{0,0196}$. |

32.4.° Чи має зміст вираз:

- | | | | | |
|-----------------|------------------|------------------|----------------------|----------------------|
| 1) $\sqrt{2}$; | 2) $-\sqrt{2}$; | 3) $\sqrt{-2}$; | 4) $\sqrt{(-2)^2}$; | 5) $(\sqrt{-2})^2$? |
|-----------------|------------------|------------------|----------------------|----------------------|

32.5.° Знайдіть число, арифметичний квадратний корінь з якого дорівнює:

- | | | | | | |
|-------|-------|---------|---------------------|---------|--------|
| 1) 4; | 2) 0; | 3) 0,8; | 4) $2\frac{1}{4}$; | 5) 1,6; | 6) -9. |
|-------|-------|---------|---------------------|---------|--------|

32.6.° Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|--|
| 1) $(\sqrt{7})^2$; | 3) $(-\sqrt{11})^2$; | 5) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; |
| 2) $(\sqrt{4,2})^2$; | 4) $-(\sqrt{10})^2$; | 6) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{14}\right)^2$. |

32.7.° Обчисліть:

$$1) (\sqrt{6})^2; \quad 2) (-\sqrt{21})^2; \quad 3) (-4\sqrt{5})^2; \quad 4) \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2.$$

32.8.° Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{16+9}; & 6) -2\sqrt{0,16}+0,7; \\ 2) \sqrt{16}+\sqrt{9}; & 7) (\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2; \\ 3) \sqrt{36}-\sqrt{49}; & 8) \frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2; \\ 4) \sqrt{36}\cdot\sqrt{49}; & 9) \sqrt{4\cdot5^2-6^2}. \\ 5) \sqrt{0,81}+\sqrt{0,01}; \end{array}$$

32.9.° Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{72}-\sqrt{64}; & 3) \frac{1}{3}\sqrt{900}+0,2\sqrt{1600}; \\ 2) \sqrt{16}\cdot\sqrt{225}; & 4) (2\sqrt{6})^2-3(\sqrt{21})^2. \end{array}$$

32.10.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x}=9; \quad 2) \sqrt{x}=\frac{1}{4}; \quad 3) \sqrt{x}-0,2=0; \quad 4) \sqrt{x}+7=0.$$

32.11.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x}=20; \quad 2) \sqrt{x}=-16; \quad 3) \sqrt{x}-\frac{2}{3}=0.$$

32.12.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2=25; \quad 2) x^2=0,49; \quad 3) x^2=3; \quad 4) x^2=-25.$$

32.13.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2=100; \quad 2) x^2=0,81; \quad 3) x^2=7; \quad 4) x^2=3,6.$$

32.14.° Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{l} 1) -0,06\cdot\sqrt{10000}+\frac{8}{\sqrt{256}}-2,5\sqrt{3,24}; \\ 2) \sqrt{64}\cdot\sqrt{6,25}+\sqrt{2^3+17}; \\ 3) \sqrt{1\frac{11}{25}}+3\sqrt{7\frac{1}{9}}-0,6\sqrt{3025}; \\ 4) \left(\frac{1}{5}\sqrt{75}\right)^2+\sqrt{26^2-24^2}; \\ 5) (3\sqrt{8})^2+(8\sqrt{3})^2-2(\sqrt{24})^2; \\ 6) \sqrt{144}:\sqrt{0,04}-\sqrt{2,56}\cdot\sqrt{2500}; \end{array}$$

7) $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$, якщо $a = -\frac{1}{2}$, $b = -0,19$, $c = 0,18$, $d = 0,04$.

 **32.15.°** Знайдіть значення виразу:

1) $0,15\sqrt{3600} - 0,18\sqrt{400} + (10\sqrt{0,08})^2$;

2) $\frac{95}{\sqrt{361}} - \frac{13}{14}\sqrt{1\frac{27}{169}} + \sqrt{8^2 + 15^2}$;

3) $\left(-8\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{1,44}}{3} \cdot \sqrt{12,25}\right) : (0,1\sqrt{13})^2$.

32.16.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{-x}$;

3) $\sqrt{-x^2}$;

5) $\sqrt{(x-8)^2}$;

2) $\sqrt{x^2}$;

4) $\sqrt{x^2+8}$;

6) $\sqrt{|x|}$.

32.17.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2y}$;

3) $\sqrt{y^3}$;

5) $\sqrt{-y^4}$;

2) $\sqrt{-3y}$;

4) $\sqrt{-y^3}$;

6) $\frac{1}{\sqrt{y}}$.

32.18.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{x+1}$;

5) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{4x-1}}$;

2) $y = \sqrt{1-3x}$;

6) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x+1}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

7) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{3-x}$;

4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+5}$;

8) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} - \sqrt{2x+1}$.

32.19.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$;

3) $y = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-4}}{2x-9}$.

2) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}$;

32.20.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x-4} = 0$;

3) $\sqrt{5x-4} = 6$;

5) $\frac{18}{\sqrt{x+3}} = 9$;

2) $\sqrt{5x-4} = 0$;

4) $\frac{42}{\sqrt{x}} = 6$;

6) $\sqrt{x^2-36} = 8$.

32.21.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{3}\sqrt{x-2}=0$;

3) $\frac{4}{\sqrt{x-5}}=6$;

2) $\sqrt{2x+3}=11$;

4) $\sqrt{130-x^2}=9$.

32.22.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2=0$; 2) $(x+6)^2=9$; 3) $(x+6)^2=3$; 4) $(7x+6)^2=5$.

32.23.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x-3)^2=25$; 2) $(x-3)^2=7$; 3) $(2x-3)^2=7$.

32.24.* Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{\frac{2}{3}x-x^2-\frac{1}{9}}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$;

7) $\sqrt{-|x|}$;

10) $\sqrt{-\sqrt{x}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;

5) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$;

8) $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$;

11) $\sqrt{-\sqrt{-x}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$;

6) $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}}$;

9) $\sqrt{\sqrt{x}+1}$;

12) $\sqrt{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

32.25.* Знайдіть область визначення виразу:

1) $\frac{1}{\sqrt{y-1}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{y+1}}$;

3) $\sqrt{y^2-y+\frac{1}{4}}$;

4) $\sqrt{y-\frac{y^2}{4}-1}$.

32.26.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{|x|-2}$;

4) $y=\sqrt{|x|-x}$;

2) $y=\sqrt{1-|x|}$;

5) $y=\frac{\sqrt{|x|-4}}{x^2-25}$;

3) $y=\sqrt{x-|x|}$;

6) $y=\sqrt{5-|x|}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

32.27.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{7-|x|}$;

2) $y=\sqrt{|x|-2}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

32.28.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3+\sqrt{2+x}}=4$; 2) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3$; 3) $\sqrt{4-\sqrt{10+\sqrt{x}}}=2$.

32.29.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{17+\sqrt{\sqrt{x}-6}}=5$;

2) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=1$.

32.30.* Чи можна стверджувати, що при будь-якому значенні x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x^2-4x+4}$;

2) $\sqrt{x^2-4x+5}$?

32.31.* Доведіть, що не існує такого значення x , при якому має зміст вираз $\sqrt{-x^2+6x-12}$.

32.32.* Який із даних виразів має зміст при будь-якому значенні x :

1) $\sqrt{x^2+8x+15}$;

2) $\sqrt{x^2-10x+27}$?

32.33.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = -x$;

8) $(x-1)\sqrt{x+1} = 0$;

2) $(\sqrt{x})^2 = x$;

9) $(x+1)\sqrt{x-1} = 0$;

3) $\sqrt{x} = -x^2$;

10) $\sqrt{x+3}\sqrt{x-2} = 0$;

4) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 0$;

11) $(x^2-4)\sqrt{x-1} = 0$;

5) $\sqrt{x-1} + \sqrt{-x-3} = 0$;

12) $(x-1)(\sqrt{-x}-1) = 0$;

6) $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x-1} = 0$;

13) $(x+1)(\sqrt{-x}-1) = 0$.

7) $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-4} = 0$;

32.34.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 0$;

6) $(x-2)\sqrt{x-3} = 0$;

2) $\sqrt{x} = -|x|$;

7) $(x-1)(\sqrt{x}+1) = 0$;

3) $(\sqrt{x})^2 = |x|$;

8) $(x+1)(\sqrt{x}-1) = 0$;

4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x} = 1$;

9) $(x^2-16)\sqrt{x-3} = 0$;

5) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2-1} = 0$;

10) $(x+2)(\sqrt{-x}-1) = 0$.

32.35.* При яких значеннях a рівняння $x^2 = a + 1$:

1) має два корені;

2) має один корінь;

3) не має коренів?

32.36.* Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x+1} > -2$;

3) $\sqrt{2x+1} < -2$;

5) $\sqrt{x} \geq -\sqrt{x}$;

2) $\sqrt{2x+1} \leq 0$;

4) $\sqrt{x} > -\sqrt{x}$;

6) $\sqrt{x} \leq -\sqrt{x}$.

32.37.* Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1} > -1$;

2) $\sqrt{x-1} \geq -1$;

3) $\sqrt{x-1} \leq -\sqrt{x-1}$.

32.38.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-x^2}$;

5) $y = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x}$;

2) $y = \sqrt{-x^2-4x-4} + 2$;

6) $y = (\sqrt{1-x})^2 + 1$;

3) $y = (\sqrt{x})^4$;

7) $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{-x})^2 + 2$;

4) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-x}$;

8) $y = (\sqrt{3-x})^2 + (\sqrt{x-1})^2 + x - 1$.

32.39.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2x-1-x^2} - 1;$

4) $y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x};$

2) $y = (\sqrt{x})^2 + 3 - x;$

5) $y = x(\sqrt{x})^2;$

3) $y = (\sqrt{-x})^2 + 1;$

6) $y = (\sqrt{x+2})^2 - 1.$

32.40.* Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} = 0;$

4) $\sqrt{x+4} + \sqrt{y^2-1} = 0;$

2) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{y-2x+3} = 0;$

5) $\sqrt{x^2-25} + \sqrt{y^2-16} = 0.$

3) $\sqrt{4x+y-5} + \sqrt{x-2y+6} = 0;$

32.41.* Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{y-3} = 0;$

3) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{y+1} = 0.$

2) $\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y-2} = 0;$

 **32.42.*** На координатній площині позначте всі точки з координатами $(x; y)$, для яких визначено вираз:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{y};$

2) $\sqrt{x} + \sqrt{-y};$

3) $\sqrt{xy};$

4) $\sqrt{x^2y}.$

32.43.* При яких значеннях a і b має зміст вираз:

1) $\sqrt{ab};$

2) $\sqrt{-ab};$

3) $\sqrt{ab^2};$

4) $\sqrt{a^2b^2};$

5) $\sqrt{-a^2b};$

32.44.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x}(x+1) > 0;$

4) $\sqrt{x}(x+1) \leq 0;$

7) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} < 0;$

2) $\sqrt{x}(x+1) \geq 0;$

5) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} > 0;$

8) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq 0.$

3) $\sqrt{x}(x+1) < 0;$

6) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} \geq 0;$

32.45.** Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x}(x-1) > 0;$

4) $\sqrt{x}(x-1) \leq 0;$

7) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} < 0;$

2) $\sqrt{x}(x-1) \geq 0;$

5) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} > 0;$

8) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \leq 0.$

3) $\sqrt{x}(x-1) < 0;$

6) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geq 0;$

32.46.** Побудуйте графік функції $y = x^3 - (\sqrt{x^2(x-1)})^2.$

32.47.** Побудуйте графік функції $y = (\sqrt{(x+1)^2x})^2 - x^3 - x^2 - x.$

32.48." При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $(x-a)(\sqrt{x}+1)=0$; 2) $(x-a)(\sqrt{-x}+1)=0$?

32.49." При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $\frac{x-a}{\sqrt{x}-1}=0$; 2) $\frac{x-a}{\sqrt{x-1}}=0$?

32.50." При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\sqrt{x}-2)=0$ має два різних корені?

32.51." При яких значеннях параметра a має єдиний розв'язок рівняння:

1) $(x+a)(\sqrt{x}-3)=0$; 3) $\left(1-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x-a}=0$?

2) $\left(1-\frac{1}{x}\right)(\sqrt{x}-a)=0$;

32.52." При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x}-4)(x-a)=0$ має тільки один корінь?

32.53." Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $a\sqrt{x-1}=0$; 4) $\sqrt{x-2}=a$;

2) $\sqrt{(a-1)x}=0$; 5) $(x-1)\sqrt{x-a}=0$;

3) $a\sqrt{x-1}=a$; 6) $(2-a)\sqrt{x-2}=0$.

Чи ростуть у городі радикали?



У Стародавній Греції дію добування кореня ототожнювали з пошуком сторони квадрата за його площею, а сам квадратний корінь називали «стороною».



Рене Декарт
(1596–1650)

У Стародавній Індії слово «мула» означало «початок», «основа», «корінь дерева». Це слово почали застосовувати й до сторони квадрата, можливо, виходячи з такої асоціації: зі сторони квадрата, як із кореня, виростає сам квадрат. Мабуть, тому в латинській мові поняття «сторона» та «корінь» виражаються одним і тим самим словом — *radix*. Від цього слова походить термін «радикал».

Слово *radix* можна також перекласти як «редис», тобто коренеплід — частина рослини, видозмінений корінь, який може бути їстівним.

У XIII–XV ст. європейські математики, скорочуючи слово *radix*, позначали квадратний корінь знаками R , $\mathcal{R}$, R^2 . Наприклад, запис $\sqrt{7}$ мав такий вигляд: R^27 .

У XVI ст. стали використовувати знак $\forall$. Походження цього символу, мабуть, пов'язано з виглядом рукописної латинської букви r .

У XVII ст. видатний французький математик Рене Декарт, поєднавши знак $\forall$ з горизонтальною рисою, отримав символ $\sqrt{}$, який ми й використовуємо сьогодні.

Перша задача першої математичної олімпіади в Україні



Задача 32.14 (7) варта уваги ще й тому, що в 1935 р. саме її умовою відкривався текст першої математичної олімпіади в Україні. Ініціатором цих математичних змагань був видатний український математик, академік Михайло Пилипович Кравчук¹.

Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів і школярок першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорелов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі в усьому науковому світі. Ці видатні вчені в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Із задоволенням зазначаємо, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. В організації та проведенні олімпіад задіяно наукову та освітянську спільноту. Саме завдяки ентузіазму та професіоналізму цієї спільноти команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі восьмикласники та восьмикласниці, брати участь у математичних олімпіадах.

¹ На першому форзаці підручника зображено пам'ятник М. П. Кравчуку, установлений на території Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». На базі цього навчального закладу раз на два роки проводяться Міжнародні математичні конференції імені академіка М. П. Кравчука.

33. Множина дійсних чисел

Розглянемо множину $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Кожне раціональне число можна подати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне. Наприклад, $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0,2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $5,3 = \frac{53}{10}$.

З можливістю такого подання пов'язана назва «раціональне число»: одним із значень латинського слова *ratio* є «відношення».

У 6 класі ви дізналися, що кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Для дробу $\frac{m}{n}$ таке подання можна отримати, виконавши ділення числа m на число n куточком.

Наприклад, $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{5}{11} = 0,454545\dots$

Число $\frac{5}{8}$ записано у вигляді скінченного десяткового дробу, а число $\frac{5}{11}$ — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. У записі $0,454545\dots$ цифри 4 і 5 періодично повторюються. Групу цифр, яка повторюється, називають **періодом дробу** й записують у круглих дужках. У даному випадку період дробу становить 45, а дріб $\frac{5}{11}$ записують так: $\frac{5}{11} = 0,(45)$.

Зауважимо, що будь-який скінченний десятковий дріб і будь-яке ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад,

$$\begin{aligned} 0,625 &= 0,6250000\dots = 0,625(0); \\ 2 &= 2,000\dots = 2,(0). \end{aligned}$$

Отже, *кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу*.

Справедливим є й таке твердження: *кожний нескінченний періодичний десятковий дріб є записом деякого раціонального числа*. У 9 класі ви навчитеся записувати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу.

Сума й добуток двох натуральних чисел є натуральними числами. Проте різниця натуральних чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $(5 - 7) \notin \mathbb{N}$.

Сума, різниця, добуток двох цілих чисел є цілими числами. Проте частка цілих чисел не завжди має таку властивість. Наприклад, $\frac{5}{7} \notin \mathbb{Z}$.

Сума, різниця, добуток і частка (крім ділення на нуль) двох раціональних чисел є раціональними числами.

Отже, дія віднімання натуральних чисел може вивести результат за межі множини $\mathbb{N}$, дія ділення цілих чисел — за межі множини $\mathbb{Z}$, проте виконання будь-якої із чотирьох арифметичних дій з раціональними числами не виводить результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Ви ознайомилися з новою дією — добуванням квадратного кореня. Виникає природне запитання: чи завжди квадратний корінь з невід'ємного раціонального числа є раціональним числом? Іншими словами, чи може дія добування квадратного кореня з раціонального числа вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$?

Розглянемо рівняння $x^2 = 2$. Оскільки $2 > 0$, то це рівняння має два корені: $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ (рис. 33.1).

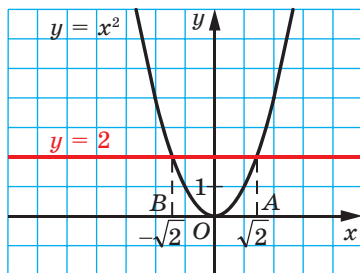


Рис. 33.1

Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне. Тоді його можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа.

Маємо:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

$$\text{Тоді } (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2; \quad 2 = \frac{m^2}{n^2}; \quad m^2 = 2n^2.$$

З останньої рівності випливає, що число m^2 парне. А це означає, що парним є і число m . Тоді $m = 2k$, де k — деяке натуральне число. Маємо: $(2k)^2 = 2n^2$; $4k^2 = 2n^2$; $n^2 = 2k^2$. Звідси випливає, що число n^2 , а отже, і число n — парні.

Таким чином, чисельник і знаменник дробу $\frac{m}{n}$ — парні числа, тобто цей дріб є скоротним. Отримали суперечність.

Отже, *не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2*, тобто числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ не є раціональними. Ці числа є прикладами **ірраціональних чисел** (префікс «ір» означає «заперечення»).

Ми показали, що дія добування кореня з раціонального числа може вивести результат за межі множини $\mathbb{Q}$.

Жодне ірраціональне число не можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а отже, у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Ірраціональні числа можуть бути подані у вигляді **нескінченних неперіодичних** десяткових дробів.

Наприклад, за допомогою спеціальної комп'ютерної програми можна встановити, що

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

Числа $\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2}$ — це не перші ірраціональні числа, з якими ви стикаєтеся. Число π , яке дорівнює відношенню довжини кола до діаметра, також є ірраціональним:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937\dots$$

Ірраціональні числа виникають не тільки в результаті добування квадратних коренів. Їх можна конструювати, будуючи нескінченні неперіодичні десяткові дробі.

Наприклад, число $0,10100100010000100000\dots$ (після коми записано послідовно степені числа 10) є ірраціональним. Справді, якщо припустити, що розглядуваний десятковий дріб має період, який складається з n цифр, то з деякого місця цей період повністю складатиметься з нулів. Інакше кажучи, починаючи із цього місця, у записі не повинно бути жодної одиниці, що суперечить конструкції числа.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел називають **множиною дійсних чисел**. Її позначають буквою $\mathbb{R}$ (перша буква латинського слова *realis* — «реальний», «той, що існує насправді»).

Тепер «ланцюжок» $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ можна продовжити: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

У старших класах ви дізнаєтесь, що цей ланцюжок також має продовження.

Зв'язок між числовими множинами, які розглянуто в цьому пункті, ілюструє рисунок 33.2.

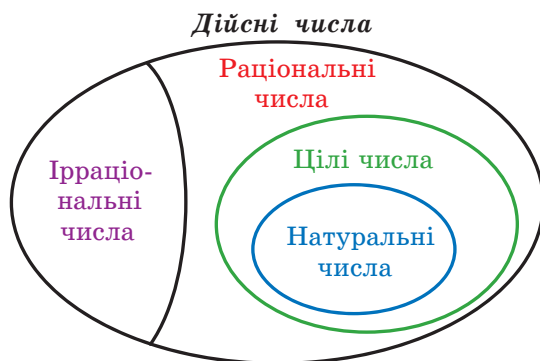


Рис. 33.2

Довжину будь-якого відрізка можна виразити дійсним числом. Цей факт дає змогу встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{R}$ і множиною точок координатної прямої. Точці O , початку відрізка, поставимо у відповідність число 0 . Кожній точці A координатної прямої, відмінній від точки O , поставимо у відповідність єдине число, яке дорівнює довжині відрізка OA , якщо точка A розміщена праворуч від точки O , і число, протилежне довжині відрізка OA , якщо точка A розміщена ліворуч від точки O . Також зрозуміло, що кожне дійсне число є відповідним єдиній точці координатної прямої.

Над дійсними числами можна виконувати чотири арифметичні дії (крім ділення на нуль), у результаті отримуватимемо дійсне число. Цим діям притаманні звичні для вас властивості:

$a + b = b + a$	Переставна властивість додавання
$ab = ba$	Переставна властивість множення
$(a + b) + c = a + (b + c)$	Сполучна властивість додавання
$(ab) c = a (bc)$	Сполучна властивість множення
$a (b + c) = ab + ac$	Розподільна властивість множення відносно додавання

Дійсні числа можна порівнювати, використовуючи правила порівняння десяткових дробів, тобто порівняння цифр у відповідних розрядах. Наприклад, $7,853126... < 7,853211...$.

Будь-яке додатне дійсне число більше за нуль і за будь-яке від’ємне дійсне число. Будь-яке від’ємне дійсне число менше від нуля. Із двох від’ємних дійсних чисел більшим є те, у якого модуль менший.

Якщо позначити на координатній прямій два дійсних числа, то менше з них буде розміщено ліворуч від більшого.

Знаходячи довжину кола та площу круга, ви користувалися **наближеним значенням числа π** (наприклад, $\pi \approx 3,14$). Аналогічно під час розв’язування практичних задач, де необхідно виконати дії з дійсними числами, за потреби ці числа замінюють їхніми наближеними значеннями. Наприклад, для числа $\sqrt{2}$ можна скористуватися такими наближеними рівностями: $\sqrt{2} \approx 1,414$ або $\sqrt{2} \approx 1,415$. Першу з них називають наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за нестачею з точністю до 0,001, друге — наближеним значенням числа $\sqrt{2}$ за надлишком з точністю до 0,001. Докладніше про наближені значення ви дізнаєтеся в 9 класі.

На закінчення наголосимо, що з будь-якого невід’ємного дійсного числа можна добути квадратний корінь і в результаті цієї дії отримати дійсне число. Отже, дія добування квадратного кореня з невід’ємного дійсного числа не виводить результат за межі множини $\mathbb{R}$.



1. Які числа утворюють множину раціональних чисел?
2. У вигляді якого відношення можна подати кожне раціональне число?
3. Як пов’язані між собою раціональні числа та нескінченні періодичні десяткові дробі?
4. Як називають числа, що не є раціональними?
5. Об’єднання яких множин утворює множину дійсних чисел?
6. Якою буквою позначають множину дійсних чисел?
7. Як взаємозв’язані множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$?

ВПРАВИ

33.1.° Чи є правильним твердження:

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $1 \in \mathbb{N}$; | 3) $1 \in \mathbb{Q}$; | 5) $0 \in \mathbb{N}$; | 7) $0 \in \mathbb{R}$; |
| 2) $1 \in \mathbb{Z}$; | 4) $1 \in \mathbb{R}$; | 6) $0 \notin \mathbb{Z}$; | 8) $-2,3 \in \mathbb{N}$; |

- 9) $-2,3 \in \mathbb{R}$; 11) $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{R}$; 13) $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$; 15) $\sqrt{9} \in \mathbb{R}$;
10) $-\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$; 12) $\sqrt{7} \notin \mathbb{R}$; 14) $\sqrt{9} \in \mathbb{Z}$; 16) $\frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$?

33.2.° Чи є правильним твердження:

- 1) будь-яке натуральне число є цілим;
- 2) будь-яке натуральне число є раціональним;
- 3) будь-яке натуральне число є дійсним;
- 4) будь-яке раціональне число є цілим;
- 5) будь-яке дійсне число є раціональним;
- 6) будь-яке раціональне число є дійсним;
- 7) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
- 8) будь-яке дійсне число є або раціональним, або ірраціональним?

33.3.° Які з даних нескінченних дробів є записами раціональних чисел, а які — ірраціональних:

- 1) $0,(3)$;
- 2) $0,4(32)$;
- 3) $5,25255255525\dots$ (кількість п'ятірок між сусідніми двійками послідовно збільшується на 1)?

33.4.° Порівняйте:

- 1) $6,542\dots$ і $6,452\dots$; 2) $-24,064\dots$ і $-24,165\dots$.

33.5.° Порівняйте:

- 1) $0,234\dots$ і $0,225\dots$; 2) $-1,333\dots$ і $-1,345\dots$.

33.6.° Укажіть яке-небудь значення a , при якому рівняння $x^2 = a$:

- 1) має два раціональних корені;
- 2) має два ірраціональних корені.

33.7.° Порівняйте числа:

- 1) $\frac{43}{7}$ і $6,12$; 4) $-2,(36)$ і $-2,36$;
- 2) $3,(24)$ і $3,24$; 5) $7,(18)$ і $7,(17)$.
- 3) π і $3,(14)$;

33.8.° Порівняйте числа:

- 1) $\frac{1}{6}$ і $0,2$; 2) $\frac{7}{9}$ і $0,77$; 3) $-1,(645)$ і $-1,(643)$.

33.9.° Запишіть у порядку спадання числа $3,(16)$; π ; $-1,82\dots$; $-0,08\dots$; $2,(136)$.

33.10.° Запишіть у порядку зростання числа $1,57$; $1,571\dots$; $\frac{\pi}{2}$; $1,(56)$; $1,(572)$.

33.11.* Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка двох раціональних чисел є раціональними числами.

33.12.* Доведіть, що сума раціонального та ірраціонального чисел є ірраціональним числом.

33.13.* Чи є правильним твердження, що:

- 1) сума будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
- 2) добуток будь-яких двох ірраціональних чисел є ірраціональним числом;
- 3) добуток будь-якого ірраціонального числа та будь-якого раціонального числа є ірраціональним числом?

33.14.* Відомо, що сума й добуток двох чисел — раціональні числа. Чи обов'язково задані числа є раціональними?

33.15.* Знайдіть усі раціональні числа a і b такі, що число $a + b\sqrt{2}$ є раціональним.

33.16.* Знайдіть такі цілі числа a і b , що:

- 1) $(3 - \sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$;
- 2) $(\sqrt{3} - 2)^2 = a - b\sqrt{3}$.

33.17.** Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.

33.18.** Доведіть ірраціональність числа $0,12345\dots$ (виписано поспіль усі натуральні числа).

33.19.** Чи можна подати число $\sqrt{2} + 1$ у вигляді арифметичного квадратного кореня з якогось раціонального числа?

33.20.** Пара чисел $(\sqrt{2} - 1; -\sqrt{2})$ є розв'язком рівняння $ax + by + c = 0$, де a, b, c — раціональні числа. Доведіть, що $a = b = c$.

33.21.** Число $1 + \sqrt{2}$ є коренем рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q — раціональні числа. Знайдіть p і q .

33.22.** Число $\sqrt{2} - 1$ є коренем рівняння $x^2 + px + q = 0$, де p і q — раціональні числа. Доведіть, що число $-\sqrt{2} - 1$ також є коренем цього рівняння.

33.23.* Числа a, b і $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ раціональні. Доведіть, що $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$ — раціональні числа.

33.24.* Доведіть, що між будь-якими двома раціональними числами знайдеться як раціональне число, так і ірраціональне число.

33.25.* Чи існує таке число x , що значення виразів $x + \sqrt{2}$ і $x^3 + \sqrt{2}$ — раціональні числа?

33.26.* Чи існує таке число x , що значення виразів:

$$1) x + \sqrt{3} \text{ і } \frac{1}{x} - \sqrt{3}; \quad 2) x + \sqrt{3} \text{ і } \frac{1}{x} + \sqrt{3}$$

є цілими числами?

33.27.* Площину покрито нескінченною квадратною сіткою. Чи можна через будь-який вузол провести пряму, яка не проходить більше через жодний інший вузол сітки?

Коли таємне стає явним



Графічне розв'язання рівняння $x^2 = 2$ (рис. 33.1) показує, що існують відрізки (у нашому випадку це відрізки OA і OB), довжини яких не виражаються раціональними числами, тобто *для вимірювання відрізків раціональних чисел недостатньо*.

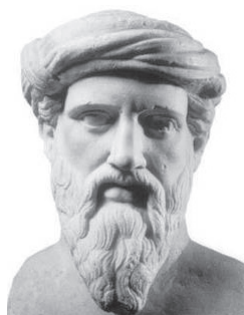
Цей факт було відкрито в школі великого давньогрецького вченого Піфагора.

Спочатку піфагорійці вважали, що для будь-яких відрізків AB і CD завжди можна знайти такий відрізок MN , який у кожному з них вкладається ціле число разів. Звідси випливало, що відношення довжин будь-яких двох відрізків виражається відношенням цілих чисел, тобто раціональним числом.

Наприклад, на рисунку 33.3 маємо: $AB = 5MN$, $CD = 2MN$ і $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{2}$. Відрізок MN

називають **спільною мірою** відрізків AB і CD .

Якщо для відрізків існує спільна міра, то їх називають **спільно-мірними**. Наприклад, відрізки AB і CD (рис. 33.3) є спільномірними.



Піфагор

(бл. 570 — бл. 500 р. до н. е.)

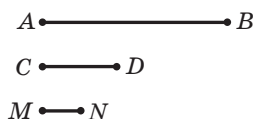


Рис. 33.3

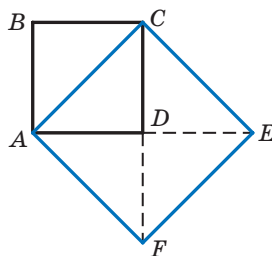


Рис. 33.4

Отже, давньогрецькі вчені вважали, що будь-які два відрізки є спільномірними. А із цього випливало, що довжину будь-якого відрізка можна виразити раціональним числом.

Справді, нехай деякий відрізок AB вибрано за одиничний. Тоді для відрізка AB і будь-якого іншого відрізка CD існує відрізок завдовжки e , який є їхньою спільною мірою. Отримуємо: $AB = ne$, $CD = me$, де m і n — деякі натуральні числа. Звідси $\frac{CD}{AB} = \frac{me}{ne} = \frac{m}{n}$.

Оскільки $AB = 1$, то $CD = \frac{m}{n}$.

Проте самі ж піфагорійці зробили видатне відкриття. Вони довели, що діагональ і сторона квадрата неспільномірні, тобто якщо сторону квадрата взяти за одиницю, то довжину діагоналі квадрата виразити раціональним числом не можна.

Для доведення розглянемо довільний квадрат $ABCD$ і візьмемо його сторону за одиницю довжини. Тоді його площа дорівнює $AB^2 = 1$. На діагоналі AC побудуємо квадрат $ACEF$ (рис. 33.4). Зрозуміло, що площа квадрата $ACEF$ у 2 рази більша за площу квадрата $ABCD$. Звідси $AC^2 = 2$, тобто $AC = \sqrt{2}$. Отже, довжина діагоналі AC не може бути виражена раціональним числом.

Це відкриття змінило один із фундаментальних постулатів давньогрецьких вчених, який полягав у тому, що відношення будь-яких двох величин виражають відношенням цілих чисел.

Існує легенда про те, що піфагорійці тримали відкриття ірраціональних чисел у найсуворішій таємниці, а людину, яка розголосила цей факт, покарали боги: вона загинула під час корабельної катастрофи.

Про зліченність числових множин



Ви знаєте, що множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Q}$ зліченні.

Виникає природне запитання: «Чи всі числові множини є зліченними?»

Покажемо, що, наприклад, множина чисел проміжку $(0; 1)$ є незліченною.

Нехай ця множина є зліченною. Тоді всі числа із цього проміжку можна пронумерувати:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

Кожне із цих чисел можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу (якщо десятковий дріб є скінченим, то вважати-

мемо, що з певного місця всі цифри десяткового запису дорівнюють нулю) такого вигляду:

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ — будь-які цифри від 0 до 9.

Деякі із цих чисел можуть мати два записи. Наприклад, дробом $0,7000\dots$ і $0,6999\dots$ відповідає одне й те саме дійсне число (цей, на перший погляд, несподіваний факт буде доведено в курсі алгебри старших класів). Для уникнення невизначеності не будемо тут розглядати періодичні десяткові дробі з періодом 9.

Запишемо всі числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ у стовпчик. Наприклад, запис може мати такий вигляд:

$$\begin{array}{rcccccccc} a_1 = & 0, & 7 & 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 & \dots \\ a_2 = & 0, & 1 & 1 & 7 & 7 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 = & 0, & 9 & 8 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & \dots \\ a_4 = & 0, & 8 & 5 & 3 & 9 & 5 & 8 & 4 & \dots \\ & \dots & & & & & & & & \end{array}$$

У цій таблиці виділено цифри, які стоять на діагоналі. Сконструємо новий десятковий нескінченний дріб (число a) за таким правилом: якщо у числа a_n на «діагональному місці» (на n -му місці після коми) стоїть цифра 1, то у числа a на цьому місці поставимо цифру 2; у решті випадків у числа a на n -му місці поставимо цифру 1. Так, для нашого прикладу отримуємо:

$$a = 0,1211\dots$$

Оскільки у числа a на n -му місці стоїть цифра, відмінна від n -ї цифри числа a_n , то число a не міститься серед записаних чисел. Проте $a \in (0; 1)$. Отримали суперечність. Отже, множина точок проміжку $(0; 1)$ є незліченною.

Це доведення багато в чому аналогічне доведенню незліченності множини послідовностей, розглянутому в п. 7. Застосований метод називають **діагональним методом Кантора**.

34. Властивості арифметичного квадратного кореня

Легко перевірити, що $\sqrt{5^2} = 5$, $\sqrt{1,4^2} = 1,4$, $\sqrt{0^2} = 0$. Може здатися, що при будь-якому значенні a виконується рівність $\sqrt{a^2} = a$. Проте це не так. Наприклад, рівність $\sqrt{(-5)^2} = -5$ є неправильною, оскільки

ки $-5 < 0$. Насправді $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Також можна переконатися, що, наприклад, $\sqrt{(-7)^2} = 7$, $\sqrt{(-2,8)^2} = 2,8$.

Узагалі, є справедливою така теорема.

Теорема 34.1. *Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність*

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt{a} = b$, треба показати, що $b \geq 0$ і $b^2 = a$.

Маємо: $|a| \geq 0$ при будь-якому a .

Також з означення модуля випливає, що $|a|^2 = a^2$. ▲

Наступна теорема узагальнює доведений факт.

Теорема 34.2 (арифметичний квадратний корінь із степеня). *Для будь-якого дійсного числа a та будь-якого натурального числа n виконується рівність*

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 34.1. Проведіть це доведення самостійно.

Теорема 34.3 (арифметичний квадратний корінь з добутку). *Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geq 0$ і $b \geq 0$, виконується рівність*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$. Тоді $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$. Отже, вираз $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ набуває тільки невід'ємних значень, і його квадрат дорівнює ab . ▲

Цю теорему можна узагальнити для добутку трьох і більше множників. Наприклад, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $c \geq 0$, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Зауважимо, що коли $a \leq 0$ і $b \leq 0$, то теорема про корінь з добутку виражається такою рівністю:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Теорема 34.4 (арифметичний квадратний корінь із дробу). *Для будь-яких дійсних чисел a і b таких, що $a \geq 0$ і $b > 0$, виконується рівність*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 34.3. Проведіть це доведення самостійно.

Зауважимо, що коли $a \leq 0$ і $b < 0$, то теорема про корінь із дробу виражається такою рівністю:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Зрозуміло, що з двох квадратів із площами S_1 і S_2 (рис. 34.1), більшу сторону має той, у якого площа більша, тобто якщо $S_1 > S_2$, то $\sqrt{S_1} > \sqrt{S_2}$. Це очевидне міркування підтверджує така теорема.

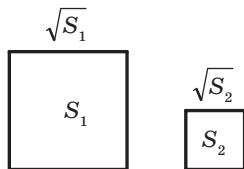


Рис. 34.1

Теорема 34.5. Якщо $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Доведення. Припустимо, що нерівність, яка доводиться, є невірною, тобто $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Оскільки $\sqrt{a} > 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$, то, використовуючи властивості числових нерівностей, отримуємо, що $(\sqrt{a})^2 \leq (\sqrt{b})^2$, тобто $a \leq b$, що суперечить умові. ▲

Теорема 34.6. Якщо $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$.

Доведення. Оскільки $\sqrt{a} \geq 0$ і $\sqrt{b} \geq 0$, то, використовуючи властивості числових нерівностей, отримуємо, що $(\sqrt{a})^2 > (\sqrt{b})^2$, тобто $a > b$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt{(-7,3)^2}; \quad 2) \sqrt{1,2^4}; \quad 3) \sqrt{0,81 \cdot 225}; \quad 4) \sqrt{\frac{16}{49}}.$$

Розв'язання. 1) $\sqrt{(-7,3)^2} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt{1,2^4} = 1,2^2 = 1,44$.

3) $\sqrt{0,81 \cdot 225} = \sqrt{0,81} \cdot \sqrt{225} = 0,9 \cdot 15 = 13,5$.

4) $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$.

Розв'язання. 1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, отримаємо: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$.

2) Замінивши частку коренів коренем із частки (дробу), матимемо: $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}} = \sqrt{\frac{24}{150}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$. ▲

ПРИКЛАД 3 Порівняйте числа: 1) 6 і $\sqrt{31}$; 2) $3\sqrt{7}$ і $\sqrt{65}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $6 = \sqrt{36}$ і $36 > 31$, то $\sqrt{36} > \sqrt{31}$, тобто $6 > \sqrt{31}$.

2) Маємо: $(3\sqrt{7})^2 = 63$, $63 < 65$, тоді $\sqrt{63} < \sqrt{65}$.

Отже, $3\sqrt{7} < \sqrt{65}$. ▲

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{14}}$; 2) $\sqrt{9a^6}$, якщо $a \leq 0$; 3) $\sqrt{m^2n^2}$, якщо $m \geq 0$, $n \leq 0$; 4) $\sqrt{a^{36}}$; 5) $\sqrt{y^2+4y+4}$, якщо $y \leq -2$; 6) $\sqrt{(x-3)^6}$.

Розв'язання. 1) За теоремою про арифметичний квадратний корінь зі степеня маємо:

$$\sqrt{a^{14}} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо: $\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3|$. Оскільки за умовою $a \leq 0$, то $a^3 \leq 0$. Тоді

$$\sqrt{9a^6} = 3 \cdot |a^3| = -3a^3.$$

3) Маємо: $\sqrt{m^2n^2} = |m| \cdot |n|$. Оскільки за умовою $m \geq 0$, то $|m| = m$. Оскільки $n \leq 0$, то $|n| = -n$. Отже, $|m| \cdot |n| = m \cdot (-n) = -mn$.

4) Маємо: $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}|$. Оскільки $a^{18} \geq 0$, то $\sqrt{a^{36}} = |a^{18}| = a^{18}$.

5) $\sqrt{y^2+4y+4} = \sqrt{(y+2)^2} = |y+2|$. Оскільки $y \leq -2$, то $y+2 \leq 0$; отже, $|y+2| = -y-2$.

6) $\sqrt{(x-3)^6} = |x-3|^3 = \begin{cases} (x-3)^3, & \text{якщо } x \geq 3, \\ (3-x)^3, & \text{якщо } x < 3. \end{cases}$ ▲

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} - \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}{\sqrt{x + \frac{1}{x} + 2} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 2}}$.

Розв'язання. Маємо: $y = \frac{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} - \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}{\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}} + \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}}$. Отже, областю

визначення даної функції є множина $D(y) = (0; +\infty)$.

$$\text{Звідси } y = \frac{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} - \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}{\frac{|x+1|}{\sqrt{x}} + \frac{|x-1|}{\sqrt{x}}}; \quad y = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}.$$

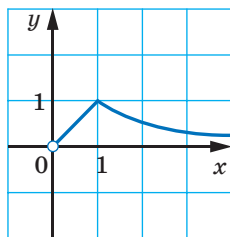
$$\text{Оскільки } x > 0, \text{ то } x+1 > 0, \text{ тоді } y = \frac{x+1 - |x-1|}{x+1 + |x-1|}.$$

$$\text{Якщо } 0 < x \leq 1, \text{ то } y = \frac{x+1+x-1}{x+1+1-x} = x.$$

$$\text{Якщо } x > 1, \text{ то } y = \frac{x+1-x+1}{x+1+x-1} = \frac{1}{x}.$$

Отже, цю функцію можна задати так:

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$



Шуканий графік зображено на рисунку 34.2. ▲

Рис. 34.2

ПРИКЛАД 6 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}}$.

Розв'язання. З умови задачі випливає, що числа a і b мають однаковий знак. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$ і $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} - (\sqrt{-b})^2}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-b}(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})}{\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}.$$

Випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$, можна розглянути інакше. Нехай $a = -x$, $b = -y$, де $x > 0$, $y > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - y}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-a} - \sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}. \quad \blacktriangle$$

?

1. Якому виразу тотожно дорівнює вираз $\sqrt{a^2}$?
2. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із степеня.
3. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь з добутку.
4. Сформулюйте теорему про арифметичний квадратний корінь із дробу.
5. Відомо, що невід'ємні числа a_1 і a_2 такі, що $a_1 > a_2$. Порівняйте значення виразів $\sqrt{a_1}$ і $\sqrt{a_2}$.

ВПРАВИ

34.1.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{0,4^2}$;

3) $\sqrt{6^4}$;

5) $5\sqrt{(-10)^4}$;

2) $\sqrt{(-1,8)^2}$;

4) $\sqrt{(-2)^{10}}$;

6) $-4\sqrt{(-1)^{14}}$?

34.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{a^2}$, якщо $a = 4,6; -18,6$;

3) $0,1\sqrt{c^6}$, якщо $c = -2; 5$.

2) $\sqrt{b^4}$, якщо $b = -3; 1,2$;

34.3.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 2500}$;

4) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

7) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$;

2) $\sqrt{400 \cdot 1,44}$;

5) $\sqrt{0,01 \cdot 0,81 \cdot 2500}$;

8) $\sqrt{\frac{169}{36 \cdot 81}}$;

3) $\sqrt{0,09 \cdot 0,04}$;

6) $\sqrt{\frac{49}{256}}$;

9) $\sqrt{\frac{121 \cdot 256}{25 \cdot 100}}$.

34.4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt{16 \cdot 0,25}$;

4) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 1600}$;

2) $\sqrt{0,36 \cdot 1,21}$;

5) $\sqrt{13\frac{4}{9}}$;

3) $\sqrt{5^2 \cdot 3^6}$;

6) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$?

34.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$;

4) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$;

7) $\sqrt{\frac{2}{11}} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{11}}$;

2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$;

5) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$;

8) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$.

3) $\sqrt{0,009} \cdot \sqrt{1000}$;

6) $\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{1\frac{2}{3}}$;

34.6.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$;

3) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{12,1}$;

5) $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{2,8}$;

2) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{0,5} \cdot \sqrt{50}$;

6) $\sqrt{5 \cdot 2^3} \cdot \sqrt{5^3 \cdot 2^3}$.

34.7.° Знайдіть значення частки:

- 1) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{3,2}}{\sqrt{0,2}}$; 5) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;
2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 4) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

34.8.° Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{6,3}}{\sqrt{0,7}}$; 3) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{242}}$; 4) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

34.9.° Порівняйте числа:

- 1) $\sqrt{\frac{17}{4}}$ і 2; 3) $\sqrt{\frac{6}{7}}$ і 1; 5) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{3}$;
2) 5 і $\sqrt{26}$; 4) -7 і $-\sqrt{48}$; 6) $\sqrt{41}$ і $2\sqrt{10}$.

34.10.° Порівняйте числа:

- 1) $\sqrt{33}$ і 6; 3) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$;
2) $3\sqrt{5}$ і $\sqrt{42}$; 4) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

34.11.° Запишіть у порядку спадання числа 8; $\sqrt{62}$; 7,9; $\sqrt{65}$; 8,2.

34.12.° Запишіть у порядку зростання числа $\sqrt{38}$; 6,1; 6; $\sqrt{35}$; 5,9.

34.13.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

- 1) $\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{13}$; 7) $-\sqrt{10}$;
2) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{0,98}$; 8) $-\sqrt{115}$?

34.14.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

- 1) $\sqrt{6}$; 2) $\sqrt{19}$; 3) $\sqrt{29}$; 4) $-\sqrt{30,5}$?

34.15.° Укажіть усі цілі числа, розташовані на координатній прямій між числами:

- 1) 3 і $\sqrt{68}$; 2) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{77}$; 3) $-\sqrt{31}$ і $-2,3$; 4) $-\sqrt{42}$ і 2,8.

34.16.° Укажіть усі цілі числа, розташовані на координатній прямій між числами:

- 1) $\sqrt{3}$ і $\sqrt{13}$; 2) $\sqrt{10}$ і $\sqrt{90}$; 3) $-\sqrt{145}$ і $-\sqrt{47}$.

34.17.° При яких значеннях a виконується рівність:

- 1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

34.18.° При яких значеннях змінних виконується рівність:

- 1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 2) $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$; 3) $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

34.19.° Знайдіть значення виразу, подавши попередньо підкореневий вираз у вигляді добутку квадратів раціональних чисел:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{18 \cdot 32}$; | 4) $\sqrt{75 \cdot 48}$; | 7) $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$; |
| 2) $\sqrt{8 \cdot 98}$; | 5) $\sqrt{288 \cdot 50}$; | 8) $\sqrt{80 \cdot 45}$; |
| 3) $\sqrt{3,6 \cdot 14,4}$; | 6) $\sqrt{4,5 \cdot 72}$; | 9) $\sqrt{33 \cdot 297}$. |

34.20.° Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|-----------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{18 \cdot 200}$; | 3) $\sqrt{14,4 \cdot 0,9}$; | 5) $\sqrt{12,5 \cdot 32}$; |
| 2) $\sqrt{3,6 \cdot 0,4}$; | 4) $\sqrt{13 \cdot 52}$; | 6) $\sqrt{108 \cdot 27}$. |

 **34.21.°** Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|---------------------------|-------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; | 2) $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$; | 3) $\sqrt{\frac{139^2 - 86^2}{98,5^2 - 45,5^2}}$. |
|---------------------------|-------------------------------|--|

34.22.° Знайдіть значення виразу:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; | 2) $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$; | 3) $\sqrt{\frac{98}{228^2 - 164^2}}$. |
|-----------------------------|-------------------------------|--|

34.23.° Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

- | | | | |
|-------------------|------------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\sqrt{b^2}$; | 2) $-0,4 \sqrt{c^2}$; | 3) $\sqrt{a^6}$; | 4) $\sqrt{m^8}$. |
|-------------------|------------------------|-------------------|-------------------|

34.24.° Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

- | | | |
|-----------------------|-------------------|----------------------|
| 1) $1,2 \sqrt{x^2}$; | 2) $\sqrt{y^4}$; | 3) $\sqrt{n^{10}}$. |
|-----------------------|-------------------|----------------------|

34.25.* Спростіть вираз:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$; | 3) $\sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}$; |
| 2) $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2}$; | 4) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{3})^2}$. |

34.26.* Спростіть вираз:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2}$; | 3) $\sqrt{(\sqrt{8} - 3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$; |
| 2) $\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{11})^2}$; | 4) $\sqrt{(2 - \sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6} - 1)^2}$. |

34.27.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^6} = -x$.

34.28.* Спростіть вираз:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$; | 5) $\sqrt{c^{12}}$; |
| 2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$; | 6) $\sqrt{0,25b^{14}}$, якщо $b \leq 0$; |
| 3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geq 0$; | 7) $\sqrt{81x^4y^2}$, якщо $y \geq 0$; |
| 4) $\sqrt{0,36k^2}$, якщо $k \leq 0$; | 8) $\sqrt{0,01a^6b^{10}}$, якщо $a \leq 0$, $b \geq 0$; |

9) $-1,2x\sqrt{64x^{18}}$, якщо $x \leq 0$;

10) $\frac{\sqrt{a^{12}b^{22}c^{36}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $b < 0$;

11) $\frac{3,3a^4}{b^3}\sqrt{\frac{b^{24}}{121a^{26}}}$, якщо $a < 0$;

12) $-0,5m^5\sqrt{1,96m^6n^8}$, якщо $m \leq 0$.

34.29.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{9a^{16}}$;

2) $\sqrt{0,81d^6}$, якщо $d \geq 0$;

3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leq 0$;

4) $-0,1\sqrt{100z^{10}}$, якщо $z \geq 0$;

5) $\sqrt{p^6q^8}$, якщо $p \geq 0$;

6) $\sqrt{25m^{34}n^{38}}$, якщо $m \leq 0$, $n \leq 0$;

7) $ab^2\sqrt{a^4b^{18}c^{22}}$, якщо $b \geq 0$, $c \leq 0$;

8) $-\frac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt{\frac{625k^{30}p^{40}}{144m^6}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

34.30.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-4)^2}$;

2) $\sqrt{(b-15)^2}$, якщо $b \geq 15$;

3) $\sqrt{(c+1)^2}$, якщо $c \leq -1$;

4) $(12-m)\sqrt{\frac{400}{(m-12)^2}}$, якщо $m > 12$;

5) $\frac{n^2-6n+9}{n+3}\sqrt{\frac{(n+3)^4}{(n-3)^2}}$, якщо $n > 3$;

6) $\frac{p^2-1}{(p+2)^2}\sqrt{\frac{p^2+4p+4}{(p+1)^2}}$, якщо $p < -2$.

34.31.* Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $b \geq a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, якщо $c \geq -3$;

3) $\frac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$.

34.32.* При яких значеннях a виконується рівність:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1) $\sqrt{a^2} = a$; | 7) $\sqrt{(a+3)^6} = (a+3)^3$; |
| 2) $\sqrt{a^4} = a^2$; | 8) $\sqrt{(1-a)^4} = (a-1)^2$; |
| 3) $\sqrt{a^6} = a^3$; | 9) $\sqrt{a-3} \cdot \sqrt{a-3} = a-3$; |
| 4) $\sqrt{a^8} = a^4$; | 10) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a-1}$; |
| 5) $\sqrt{a^6} = -a^3$; | 11) $\sqrt{a(a-1)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{1-a}$; |
| 6) $\sqrt{(a-2)^2} = 2-a$; | 12) $\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{2-a}} = \sqrt{\frac{a-1}{2-a}}$? |

34.33.* При яких значеннях a виконується рівність:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $\sqrt{a^{10}} = a^5$; | 6) $\sqrt{(1-a)^{10}} = (1-a)^5$; |
| 2) $\sqrt{a^{10}} = -a^5$; | 7) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = a^2 + 1$; |
| 3) $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$; | 8) $\sqrt{(a-2)(a-3)} = \sqrt{2-a} \cdot \sqrt{3-a}$; |
| 4) $\sqrt{a^2} = (\sqrt{-a})^2$; | 9) $\sqrt{a(a+1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a+1}$? |
| 5) $\sqrt{(a+1)^2} = -a-1$; | |

34.34.* Побудуйте графік функції:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) $y = \sqrt{x^2} - x$, якщо $x \leq 0$; | 3) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} + 3$; |
| 2) $y = 2x + \sqrt{x^2}$; | 4) $y = \sqrt{(x+3)^2} + x$. |

34.35.* Побудуйте графік функції:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1) $y = \sqrt{x^2} + x$, якщо $x \geq 0$; | 3) $y = \sqrt{(x-2)^2} - x$; |
| 2) $y = \sqrt{(x-3)^2}$; | 4) $y = \sqrt{(x+4)^2} - x - 4$. |

34.36.* Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|---------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sqrt{x^2} = x - 4$; | 3) $2\sqrt{x^2} = x + 3$; |
| 2) $\sqrt{x^2} = 6 - x$; | 4) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 5$. |

34.37.* Розв'яжіть рівняння:

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sqrt{x^2} = 6x - 10$; | 3) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x + 1$; |
| 2) $\sqrt{x^2} = x + 8$; | 4) $\sqrt{9 - 6x + x^2} = 2x - 1$. |

34.38.* Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} < 2$; | 2) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq 3$. |
|--------------------------------|-----------------------------------|

34.39.* Розв'яжіть нерівність:

- | | |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} \leq 1$; | 2) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} > 4$. |
|------------------------------------|----------------------------------|

34.40." Зобразіть на координатній площині множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y};$

3) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{y};$

2) $\sqrt{xy} = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y};$

4) $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-y}.$

34.41." Скоротіть дріб:

1) $\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}}, a \neq 0;$

2) $\frac{b + \sqrt{ab}}{\sqrt{-b}},$

3) $\frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{-a} + \sqrt{-b}}.$

34.42." Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2 - 2a + 1 + \sqrt{4a^2 - 12a + 9}},$ якщо $a \leq \frac{3}{2};$

2) $\sqrt{b^2 + 9b + 17 - \sqrt{b^2 + 2b + 1}},$ якщо $b \geq -1;$

3) $\sqrt{b^2 + 4b + \sqrt{9b^4 + 6b^2 + 1}}.$

34.43." Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2 - 11a + 26 + \sqrt{1 - 2a + a^2}},$ якщо $a > 1;$

2) $\sqrt{7b^2 + 6b + \sqrt{4b^4 + 4b^2 + 1}}.$

35. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені

Користуючись теоремою про арифметичний квадратний корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt{48}$. Маємо:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Вираз $\sqrt{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 4 та ірраціонального числа $\sqrt{3}$. Таке перетворення називають **винесенням множника з-під знака кореня**. У даному випадку було винесено з-під знака кореня множник 4.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Таке перетворення називають **внесенням множника під знак кореня**. У даному випадку було внесено під знак кореня множник 4.

ПРИКЛАД 1 Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{72a^8};$ 2) $\sqrt{b^{35}};$ 3) $\sqrt{-b^{35}};$ 4) $\sqrt{a^2b^3},$ якщо $a < 0;$ 5) $\sqrt{a^6b}.$

Розв'язання. 1) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6a^4\sqrt{2}.$

2) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то з умови випливає, що $b \geq 0$. Тоді

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}| \sqrt{b} = b^{17} \sqrt{b}.$$

3) З умови випливає, що $b \leq 0$. Тоді

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}| \sqrt{-b} = -b^{17} \sqrt{-b}.$$

4) З умови випливає, що $a^2 > 0$. Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то отримуємо, що $b \geq 0$. Тоді

$$\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b| \sqrt{b} = -ab \sqrt{b}.$$

5) Зауважимо, що коли $a = 0$, то значення даного виразу дорівнює 0. Якщо $a \neq 0$, то з умови випливає, що $b \geq 0$. Маємо:

$$\sqrt{a^6b} = a^3 \sqrt{b} \text{ при } a > 0;$$

$$\sqrt{a^6b} = -a^3 \sqrt{b} \text{ при } a < 0;$$

$$\sqrt{a^6b} = 0 \text{ при } a = 0. \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 2 Внесіть множник під знак кореня:

$$1) -2\sqrt{7}; \quad 2) a\sqrt{7}; \quad 3) 3b\sqrt{-\frac{b}{3}}; \quad 4) c\sqrt{c^7}.$$

$$\text{Розв'язання. } 1) -2\sqrt{7} = -\sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{28}.$$

2) Якщо $a \geq 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

3) З умови випливає, що $b \leq 0$. Тоді

$$3b\sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2} \cdot \sqrt{-\frac{b}{3}} = -\sqrt{9b^2 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt{3b^3}.$$

4) З умови випливає, що $c \geq 0$. Тоді $c\sqrt{c^7} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{c^7} = \sqrt{c^9}$. $\blacktriangle$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}; \quad 2) (7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5}).$$

Розв'язання

$$1) \text{ Маємо: } \sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9 \cdot 6a} + \sqrt{4 \cdot 6a} - \sqrt{100 \cdot 6a} = 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a} \cdot (-5) = -5\sqrt{6a}.$$

2) Застосовуючи формули скороченого множення (квадрат двочлена й добуток різниці та суми двох виразів), отримуємо:

$$\begin{aligned} (7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5}) &= 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - \\ &- ((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2) = 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10 - 5) = 62 - 42\sqrt{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 4 Розкладіть на множники вираз: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, якщо $b \geq 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$.

Розв'язання. 1) Подавши даний вираз у вигляді різниці квадратів, маємо:

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}).$$

2) Оскільки за умовою $b \geq 0$, то $b - 4 = (\sqrt{b})^2 - 4 = (\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2)$.

3) Застосуємо формулу квадрата різниці:

$$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = (3\sqrt{c})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{c} - \sqrt{5})^2.$$

4) Маємо: $a + \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$.

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3})$. ▲

ПРИКЛАД 5 Скоротіть дріб: 1) $\frac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. 1) Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b})^2 - 1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b} - 1.$$

$$2) \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 3. \quad \blacktriangle$$

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

ПРИКЛАД 6 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу: 1) $\frac{15}{2\sqrt{3}}$; 2) $\frac{14}{5\sqrt{2}-1}$.

Розв'язання. 1) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{3}$, отримуємо:

$$\frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

2) Помноживши чисельник і знаменник даного дробу на вираз $5\sqrt{2}+1$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{14}{5\sqrt{2}-1} &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}+1)} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{(5\sqrt{2})^2 - 1} = \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{50-1} = \\ &= \frac{14(5\sqrt{2}+1)}{49} = \frac{2(5\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{10\sqrt{2}+2}{7}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Розв'язання.
$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) + \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + 2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) =$$

$$= \frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b} \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \sqrt{a} + \sqrt{b}. \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 8 Спростіть вираз: 1) $\sqrt{12+6\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Розв'язання. 1) Подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата суми, отримуємо:

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{9+2 \cdot 3\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = |3+\sqrt{3}| = 3+\sqrt{3}.$$

$$2) \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3}{2}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}. \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 9 Спростіть вираз $\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$, якщо $b \geq 2$.

Розв'язання. Оскільки $b \geq 2$, то $\sqrt{b^2-4} = \sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}$, $b+2 = (\sqrt{b+2})^2$, $b-2 = (\sqrt{b-2})^2$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2} = \frac{\sqrt{b-2+2\sqrt{b^2-4}+b+2}}{\sqrt{(b-2)(b+2)}+(\sqrt{b+2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{b-2})^2+2\sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}+(\sqrt{b+2})^2}}{\sqrt{b-2} \cdot \sqrt{b+2}+(\sqrt{b+2})^2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})^2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})} =$$

$$= \frac{\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2}}{\sqrt{b+2}(\sqrt{b-2}+\sqrt{b+2})} = \frac{1}{\sqrt{b+2}}. \quad \blacktriangle$$

ВПРАВИ

35.1.° Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{32}$; 3) $\sqrt{490}$; 5) $\sqrt{275}$; 7) $\sqrt{0,48}$;
2) $\sqrt{54}$; 4) $\sqrt{500}$; 6) $\sqrt{0,72}$; 8) $\sqrt{450}$.

35.2.° Спростіть вираз:

- 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0,05\sqrt{4400}$.

35.3.° Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{27}$; 4) $\frac{1}{8}\sqrt{96}$; 7) $\frac{3}{7}\sqrt{98}$;
2) $\sqrt{20}$; 5) $-2\sqrt{0,18}$; 8) $10\sqrt{0,03}$;
3) $\sqrt{125}$; 6) $\frac{4}{9}\sqrt{63}$; 9) $0,7\sqrt{1000}$.

35.4.° Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $7\sqrt{2}$; 3) $6\sqrt{a}$; 5) $\frac{1}{8}\sqrt{128a}$; 7) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$;
2) $-2\sqrt{17}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$; 6) $-0,3\sqrt{10b}$; 8) $\frac{2}{9}\sqrt{\frac{27}{28}}$.

35.5.° Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $-11\sqrt{3}$; 2) $12\sqrt{b}$; 3) $-7\sqrt{3c}$; 4) $-\frac{1}{3}\sqrt{18p}$.

35.6.° Спростіть вираз:

- 1) $4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 5\sqrt{a}$; 3) $\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$.
2) $5\sqrt{c} + 3\sqrt{d} - \sqrt{c} + 3\sqrt{d}$;

35.7.° Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{c} + 10\sqrt{c} - 14\sqrt{c}$; 2) $9\sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$.

35.8.° Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{49a}$; 2) $2\sqrt{0,04c} - 0,3\sqrt{16c} + \frac{1}{3}\sqrt{0,81c}$.

35.9.° Спростіть вираз:

- 1) $2\sqrt{4x} + 6\sqrt{16x} - \sqrt{625x}$; 2) $3\sqrt{0,09y} - 0,6\sqrt{144y} + \frac{18}{11}\sqrt{\frac{121}{36}y}$.

35.10.° Спростіть вираз:

- 1) $8\sqrt{2} - \sqrt{32}$; 3) $2\sqrt{500} - 8\sqrt{5}$;
2) $6\sqrt{3} - \sqrt{27}$; 4) $2\sqrt{20} - \frac{1}{3}\sqrt{45} - 0,6\sqrt{125}$.

35.11.° Раціональним чи ірраціональним є значення виразу:

1) $\sqrt{48} - 6 - 4\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{162} - 9\sqrt{2} + \sqrt{27}$?

35.12.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{75} - 6\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{72} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{98}$;
2) $2\sqrt{50} - 8\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{108} + \sqrt{363} - \frac{2}{9}\sqrt{243}$.

35.13.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2}(\sqrt{50} + \sqrt{8})$; 3) $(3\sqrt{5} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5}$;
2) $(\sqrt{3} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{2}\left(3\sqrt{18} - \frac{1}{4}\sqrt{2} + \sqrt{32}\right)$.

35.14.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{28})$; 3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{75} + 4) \cdot 3\sqrt{3}$;
2) $(\sqrt{18} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{2}$; 4) $(\sqrt{600} + \sqrt{6} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6}$.

35.15.° Виконайте множення:

1) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})$; 5) $(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 4\sqrt{2})$;
2) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$; 6) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2$;
3) $(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$; 7) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$;
4) $(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$; 8) $(2 - 3\sqrt{3})^2$.

35.16.° Виконайте множення:

1) $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$; 4) $(\sqrt{19} + \sqrt{17})(\sqrt{19} - \sqrt{17})$;
2) $(\sqrt{p} - q)(\sqrt{p} + q)$; 5) $(m + \sqrt{n})^2$;
3) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)$; 6) $(3 - 2\sqrt{15})^2$.

 **35.17.°** Чому дорівнює значення виразу:

1) $(2 + \sqrt{7})^2 - 4\sqrt{7}$; 2) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 + 6\sqrt{2}$?

 **35.18.°** Знайдіть значення виразу:

1) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt{12} - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{6}$.

35.19.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{18}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; 6) $\frac{24}{5\sqrt{3}}$.

35.20.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{a}{\sqrt{11}}$; 2) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{30}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$.

35.21.° Розкладіть на множники вираз:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $a^2 - 3$; | 9) $b + 6\sqrt{b} + 9$; |
| 2) $4b^2 - 2$; | 10) $3 + 2\sqrt{3c} + c$; |
| 3) $5 - 6c^2$; | 11) $2 + \sqrt{2}$; |
| 4) $a - 9$, якщо $a \geq 0$; | 12) $6\sqrt{7} - 7$; |
| 5) $m - n$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$; | 13) $a - \sqrt{a}$; |
| 6) $16x - 25y$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$; | 14) $\sqrt{b} + \sqrt{3b}$; |
| 7) $a - 2\sqrt{a} + 1$; | 15) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$. |
| 8) $4m - 28\sqrt{mn} + 49n$, якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$; | |

35.22.° Розкладіть на множники вираз:

- | | |
|---|--------------------------------|
| 1) $15 - x^2$; | 6) $m + 2\sqrt{mn} + n$, |
| 2) $49x^2 - 2$; | якщо $m \geq 0$, $n \geq 0$; |
| 3) $36p - 64q$, якщо $p \geq 0$, $q \geq 0$; | 7) $a - 4\sqrt{a} + 4$; |
| 4) $c - 100$, якщо $c \geq 0$; | 8) $5 + \sqrt{5}$; |
| 5) $a - 8b\sqrt{a} + 16b^2$; | 9) $\sqrt{3p} - p$; |
| | 10) $\sqrt{12} + \sqrt{32}$. |

35.23.° Скоротіть дріб:

- | | | |
|--|--|--|
| 1) $\frac{a^2 - 7}{a + \sqrt{7}}$; | 5) $\frac{5\sqrt{a} - 7\sqrt{b}}{25a - 49b}$; | 9) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5 - \sqrt{10}}$; |
| 2) $\frac{\sqrt{3} - b}{3 - b^2}$; | 6) $\frac{100a^2 - 9b}{10a + 3\sqrt{b}}$; | 10) $\frac{13 - \sqrt{13}}{\sqrt{13}}$; |
| 3) $\frac{c - 9}{\sqrt{c} - 3}$; | 7) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$; | 11) $\frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; |
| 4) $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; | 8) $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{10}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$; | 12) $\frac{4b^2 - 4b\sqrt{c} + c}{2b - \sqrt{c}}$. |

35.24.° Скоротіть дріб:

- | | | |
|--|--|---|
| 1) $\frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$; | 4) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$; | 7) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - 2\sqrt{ab} + b}$; |
| 2) $\frac{\sqrt{a} + 2}{a - 4}$; | 5) $\frac{23 - \sqrt{23}}{\sqrt{23}}$; | 8) $\frac{b - 8\sqrt{b} + 16}{\sqrt{b} - 4}$. |
| 3) $\frac{a - 3}{\sqrt{a} + \sqrt{3}}$; | 6) $\frac{\sqrt{24} - \sqrt{28}}{\sqrt{54} - \sqrt{63}}$; | |

35.25.° Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{3a^2}$, якщо $a \geq 0$; 2) $\sqrt{5b^2}$, якщо $b \leq 0$; 3) $\sqrt{12a^4}$; 4) $\sqrt{c^5}$.

35.26.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{18x^{12}}$;

2) $\sqrt{y^9}$.

35.27.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{32}$;

4) $\sqrt{5a} - 2\sqrt{20a} + 3\sqrt{80a}$;

2) $3\sqrt{8} + \sqrt{128} - \frac{1}{3}\sqrt{162}$;

5) $\sqrt{a^3b} - \frac{2}{a}\sqrt{a^5b}$, якщо $a > 0$;

3) $0,7\sqrt{300} - 7\sqrt{\frac{3}{49}} + \frac{2}{3}\sqrt{108}$;

6) $\sqrt{c^5} + 4c\sqrt{c^3} - 5c^2\sqrt{c}$.

35.28.° Спростіть вираз:

1) $0,5\sqrt{12} - 3\sqrt{27} + 0,4\sqrt{75}$;

3) $\sqrt{81a^7} - 5a^3\sqrt{a} + \frac{6}{a}\sqrt{a^9}$.

2) $2,5\sqrt{28b} + \frac{2}{3}\sqrt{63b} - 10\sqrt{0,07b}$;

35.29.° Доведіть, що:

1) $\sqrt{11+4\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 2$;

2) $\sqrt{14+8\sqrt{3}} = \sqrt{8} + \sqrt{6}$.

35.30.° Спростіть вираз:

1) $(2\sqrt{3}-1)(\sqrt{27}+2)$;

4) $(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2$;

2) $(\sqrt{5}-2)^2 - (3+\sqrt{5})^2$;

5) $(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2$.

3) $\sqrt{\sqrt{17}-4} \cdot \sqrt{\sqrt{17}+4}$;

 **35.31.°** Знайдіть значення виразу:

1) $(3\sqrt{2}+1)(\sqrt{8}-2)$;

3) $(10-4\sqrt{6})(2+\sqrt{6})^2$;

2) $(3-2\sqrt{7})^2 + (3+2\sqrt{7})^2$;

4) $(\sqrt{9-4\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}})^2$.

35.32.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;

4) $\frac{x^2-6y}{x^2+6y-x\sqrt{24y}}$;

2) $\frac{\sqrt{28}-2\sqrt{2a}}{6a-21}$;

5) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$;

3) $\frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{a-4b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$;

6) $\frac{m\sqrt{m}-27}{\sqrt{m}-3}$.

35.33.° Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-b}{\sqrt{11b}-\sqrt{11a}}$;

3) $\frac{a-2\sqrt{a}+4}{a\sqrt{a}+8}$.

2) $\frac{2a+10\sqrt{2ab}+25b}{6a-75b}$, якщо $a > 0$, $b > 0$;

35.34.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}; \quad 2) \frac{19}{2\sqrt{5}-1}; \quad 3) \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; \quad 4) \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

35.35.° Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$1) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}; \quad 2) \frac{8}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{9}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}; \quad 4) \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

35.36.* Доведіть рівність:

$$1) \frac{1}{5-2\sqrt{6}} + \frac{1}{5+2\sqrt{6}} = 10; \quad 3) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 4\sqrt{2};$$

$$2) \frac{2}{3\sqrt{2}+4} - \frac{2}{3\sqrt{2}-4} = -8; \quad 4) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}+2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+4}-2} = -4.$$

35.37.* Доведіть, що значенням виразу є раціональне число:

$$1) \frac{6}{3+2\sqrt{3}} + \frac{6}{3-2\sqrt{3}}; \quad 2) \frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}}{\sqrt{11}-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{6}}{\sqrt{11}+\sqrt{6}}.$$

35.38.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{a}{\sqrt{a}-2} - \frac{4\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}-2}; \quad 6) \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a}+2};$$

$$2) \frac{\sqrt{m}+1}{\sqrt{m}-2} - \frac{\sqrt{m}+3}{\sqrt{m}}; \quad 7) \frac{\sqrt{c}-5}{\sqrt{c}} : \frac{c-25}{3c};$$

$$3) \frac{\sqrt{y}+4}{\sqrt{xy}+y} - \frac{\sqrt{x}-4}{x+\sqrt{xy}}; \quad 8) \left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{a-1};$$

$$4) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} - \frac{a}{a-16}; \quad 9) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};$$

$$5) \frac{a}{\sqrt{ab}-b} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}; \quad 10) \left(\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + \frac{12\sqrt{x}}{x-9} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-3\sqrt{x}}.$$

35.39.* Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{a}-3}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}; \quad 4) \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} : \left(\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \right);$$

$$2) \frac{\sqrt{a}+1}{a-\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{ab}-b}; \quad 5) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{4\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1};$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{y-2\sqrt{y}} : \frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}-6}; \quad 6) \frac{a-64}{\sqrt{a}+3} \cdot \frac{1}{a+8\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+8}{a-3\sqrt{a}}.$$

35.40.* Винесіть множник з-під знака кореня:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{-m^9}$; | 7) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$; |
| 2) $\sqrt{96(a-3)^5}$ | 8) $\sqrt{64a^2b^9}$, якщо $a > 0$; |
| 3) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$; | 9) $\sqrt{242m^{11}b^{18}}$, якщо $b < 0$; |
| 4) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$; | 10) $\sqrt{-m^2n^2p^{15}}$, якщо $m > 0, n < 0$; |
| 5) $\sqrt{(a+1)^6(a^2+1)^5}$, якщо $a \leq -1$; | 11) $\sqrt{x^5(y-1)^4}$, якщо $y \neq 1$; |
| 6) $\sqrt{m^7n^7}$, якщо $m \leq 0, n \leq 0$; | 12) $\sqrt{-y^7(x+2)^8}$, якщо $x \neq -2$. |

35.41.* Винесіть множник з-під знака кореня:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sqrt{-m^{19}}$; | 6) $\sqrt{a^9b^9}$; |
| 2) $\sqrt{48(x-1)^7}$; | 7) $\sqrt{27x^{15}y^{34}}$, якщо $y < 0$; |
| 3) $\sqrt{a^{23}b^{24}}$, якщо $b \neq 0$; | 8) $\sqrt{-8c^6n^6p^7}$, якщо $c > 0, n > 0$; |
| 4) $\sqrt{49a^2b}$, якщо $a < 0$; | 9) $\sqrt{a^9(b+2)^8}$, якщо $b \neq -2$; |
| 5) $\sqrt{(b+3)^{10}(b^4+1)^3}$, якщо $b \leq -3$; | 10) $\sqrt{-x^3(y-3)^{12}}$, якщо $y \neq 3$. |

35.42.* Внесіть множник під знак кореня:

- | | |
|--|---|
| 1) $a\sqrt{3}$; | 8) $(x-1)\sqrt{\frac{1}{x^2-2x+1}}$, якщо $x < 1$; |
| 2) $b\sqrt{-b}$; | 9) $(y+3)\sqrt{\frac{5}{y^2+6y+9}}$, якщо $y > -3$; |
| 3) $c\sqrt{c^5}$; | 10) $(m+1)\sqrt{\frac{1}{m+1}}$; |
| 4) $m\sqrt{n}$, якщо $m \geq 0$; | 11) $(2-c)\sqrt{\frac{1}{2c-4}}$; |
| 5) $xy^2\sqrt{xy}$, якщо $x \leq 0$; | 12) $(-x-y)\sqrt{\frac{2}{x+y}}$; |
| 6) $2p\sqrt{\frac{p}{2}}$; | 13) $ab^2\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a \geq 0$. |
| 7) $2p\sqrt{-\frac{p}{2}}$; | |

35.43.* Внесіть множник під знак кореня:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geq 0$; | 3) $p\sqrt{p^3}$; |
| 2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leq 0$; | 4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leq 0$; |

5) $7a\sqrt{\frac{3}{a}};$

8) $(y-4)\sqrt{\frac{1}{12-3y}};$

6) $(3-a)\sqrt{\frac{2}{a^2-6a+9}},$ якщо $a > 3;$

9) $5ab\sqrt{-\frac{a^7}{5b}},$ якщо $a < 0.$

7) $(b+6)\sqrt{\frac{1}{b+6}};$

35.44.** Доведіть, що при $a > 0, b > 0$ і $a^2 - b > 0$ виконується тотожність:

1) $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$

2) $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$

35.45.** Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{8\sqrt{a}}{\sqrt{a}+7} - \frac{15\sqrt{a}}{a+14\sqrt{a}+49}\right) : \frac{8\sqrt{a}+41}{a-49} + \frac{7\sqrt{a}-49}{\sqrt{a}+7} = \sqrt{a}-7;$

2) $\frac{a\sqrt{a}+27}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}-3}{a-3\sqrt{a}+9} - \frac{\sqrt{ab}-9}{a\sqrt{a}+27}\right) = \sqrt{a};$

3) $\left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2\sqrt{xy}}{x-y}\right) = \sqrt{x}+\sqrt{y};$

4) $\frac{\sqrt{x}-2}{4x-16\sqrt{x}+16} : \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-4} - \frac{x-12}{2x-8} - \frac{2}{x+2\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}}{4(\sqrt{x}+2)}.$

35.46.** Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}};$

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right);$

3) $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1\right);$

4) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : (a-b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right);$

$$6) \left(\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 2 \right) \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad a > 0, b > 0.$$

35.47.** Спростіть вираз $\left(\frac{1 + \sqrt{2-a}}{2-a + \sqrt{2-a}} - \frac{1 - \sqrt{2-a}}{2-a - \sqrt{2-a}} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{a}} - 1$, якщо $0 < a < 2$.

35.48.** Спростіть вираз $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$, якщо $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, $a > 0$, $b > 0$.

35.49.** Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{3+2\sqrt{2}}; & 3) \sqrt{11+2\sqrt{30}}; & 5) \sqrt{37-5\sqrt{48}}; \\ 2) \sqrt{7+4\sqrt{3}}; & 4) \sqrt{10-2\sqrt{21}}; & 6) \sqrt{28-\sqrt{108}}. \end{array}$$

35.50.** Спростіть вираз:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt{8+2\sqrt{7}}; & 3) \sqrt{7+2\sqrt{10}}; & 5) \sqrt{18+2\sqrt{45}}; \\ 2) \sqrt{15+6\sqrt{6}}; & 4) \sqrt{6-2\sqrt{5}}; & 6) \sqrt{91-40\sqrt{3}}. \end{array}$$

35.51.** Спростіть вираз:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}; \\ 2) \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{47}}. \end{array}$$

35.52.** Доведіть, що:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{91}+\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{91}-1}{2}.$$

35.53.** Доведіть, що:

$$\begin{array}{l} 1) \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 2; \\ 2) \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 1. \end{array}$$

35.54.** Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) \sqrt{10+8\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}; & 3) \sqrt{8-\sqrt{28}} - \sqrt{8+\sqrt{28}}; \\ 2) \sqrt{22+6\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{48}}}}; & 4) \sqrt{4+\sqrt{15}} - \sqrt{4-\sqrt{15}}. \end{array}$$

35.55.** Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}; \quad 2) \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}.$$

35.56." Доведіть, що є правильною рівність:

$$1) \frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}} + \frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2};$$

$$2) \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

35.57." Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{a+2\sqrt{a-1}};$$

$$2) \sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}};$$

$$3) \sqrt{\frac{x+4}{4}} + \sqrt{x};$$

$$4) \sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}}, \text{ якщо } x \geq 1;$$

$$5) \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-3}}-2-1}{\sqrt{x-3}};$$

$$6) \sqrt{x^2+2+2\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+2-2\sqrt{x^2+1}};$$

$$7) \sqrt{2a+3-2\sqrt{a^2+3a+2}} + \sqrt{a+1}.$$

35.58." Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{a+4\sqrt{a-4}};$$

$$2) \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}};$$

$$3) \sqrt{\frac{a+1}{4}} + \frac{\sqrt{a}}{2};$$

$$4) \sqrt{2x+2\sqrt{x^2-y^2}}, \text{ якщо } x \geq y > 0;$$

$$5) \frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4b^2}}-\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}};$$

$$6) \sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}, \text{ якщо } 0 \leq a \leq 2;$$

$$7) \sqrt{3a-1+2\sqrt{2a^2-a}}, \text{ якщо } a \geq \frac{1}{2}.$$

36. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік

Якщо площа квадрата дорівнює x , то його сторону y можна знайти за формулою $y = \sqrt{x}$. Зміна площі x квадрата спричиняє зміну його сторони y .

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y . Отже, залежність змінної y від змінної x є функціональною, а формула $y = \sqrt{x}$ задає функцію.

Оскільки областю визначення виразу $\sqrt{x}$ є множина всіх невід'ємних чисел, то областю визначення функції $y = \sqrt{x}$ є множина $D(y) = [0; +\infty)$.

Вираз $\sqrt{x}$ не може набувати від'ємних значень, тобто жодне від'ємне число не може належати області значень розглядуваної функції. Покажемо, що функція $y = \sqrt{x}$ може набувати будь-яких невід'ємних значень. Нехай b — довільне невід'ємне число. Тоді $\sqrt{b^2} = |b| = b$. Тобто існує таке значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$, а саме $x = b^2$, що $\sqrt{x} = b$.

Отже, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є множина $E(y) = [0; +\infty)$.

Зазначимо, що коли $x = 0$, то $y = 0$.

Ураховуючи область визначення та область значень функції $y = \sqrt{x}$, можна зробити висновок, що її графік розташований тільки в першій координатній чверті.

У таблиці наведено деякі значення аргументу й відповідні їм значення функції $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
y	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо на координатній площині точки, координати $(x; y)$ яких наведено в таблиці (рис. 36.1).

Чим більше точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, позначити, тим менше отримана фігура відрізнятиметься від графіка функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 36.2).

Якби вдалося позначити на координатній площині всі такі точки, то отримали б фігуру, яку зображено на рисунку 36.3. У старших класах буде доведено, що графіком функції $y = \sqrt{x}$ є фігура, яка дорівнює вітці параболи $y = x^2$.

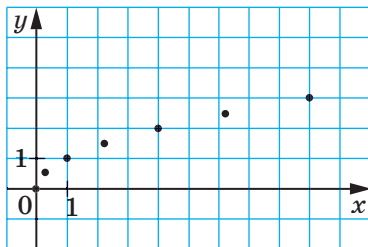


Рис. 36.1

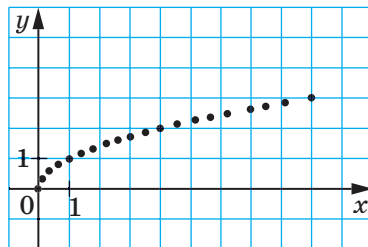


Рис. 36.2

Нехай x_1 і x_2 — два довільних значення аргументу функції $y = \sqrt{x}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді з властивості арифметичного квадратного кореня випливає, що $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Це означає, що більшому значенню аргументу функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більше значення функції. Справедливе й обернене твердження: більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тобто коли $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, то $x_1 < x_2$ (рис. 36.4).

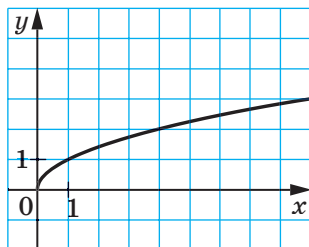


Рис. 36.3

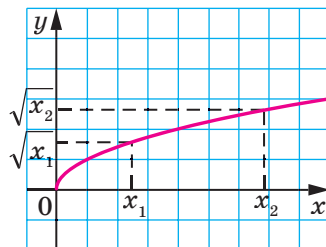


Рис. 36.4

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt{x}$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$D(y) = [0; +\infty)$
Область значень	$E(y) = [0; +\infty)$
Графік	Вітка параболи
Нуль функції (значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0)	$x = 0$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

Розв'язання. В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 6 - x$ (рис. 36.5). Ці графіки перетинаються в точці, абсциса якої дорівнює 4. Перевірка підтверджує, що число 4 є коренем даного рівняння. ▲

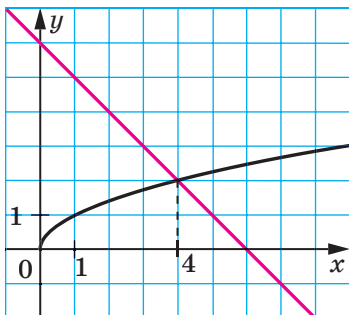


Рис. 36.5

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність: 1) $\sqrt{x} < 3$; 2) $\sqrt{x-1} > 2$; 3) $\sqrt{x+2} > \sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. 1) Запишемо дану нерівність так: $\sqrt{x} < \sqrt{9}$. Оскільки більше значення функції $y = \sqrt{x}$ відповідає більшому значенню аргументу, то можна зробити висновок, що $x < 9$. Ураховуючи, що вираз $\sqrt{x}$ має зміст тільки при $x \geq 0$, отримуємо, що дана нерівність рівносильна системі
$$\begin{cases} x < 9, \\ x \geq 0. \end{cases}$$
 Звідси $0 \leq x < 9$.

Відповідь: $[0; 9)$.

2) Маємо: $\sqrt{x-1} > \sqrt{4}$; $x - 1 > 4$; $x > 5$.

Відповідь: $(5; +\infty)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі
$$\begin{cases} x+2 > 1-3x, \\ 1-3x \geq 0. \end{cases}$$
 Звідси

$$\begin{cases} 4x > -1, \\ 3x \leq 1; \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{1}{4}, \\ x \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. ▲

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз $A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання. Маємо: $A = \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} =$
 $= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| =$
 $= \sqrt{x-1}+1 + |\sqrt{x-1}-1|.$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x-1} \leq 1$. Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x-1 \leq 1, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$ Звідси $1 \leq x \leq 2$.

Отже, якщо $1 \leq x \leq 2$, то $A = \sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}+1 = 2$.

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x-1} > 1$. Маємо: $x-1 > 1$; $x > 2$. Отже, якщо $x > 2$, то $A = \sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2\sqrt{x-1}$.

Відповідь: $A = 2$, якщо $1 \leq x \leq 2$; $A = 2\sqrt{x-1}$, якщо $x > 2$. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = 1.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{x+1-4\sqrt{x+1}+4} = 1;$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+1}-2)^2} = 1;$$

$$|\sqrt{x+1}-1| + |\sqrt{x+1}-2| = 1.$$

Це рівняння рівносильне сукупності трьох систем.

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+1} < 1, \\ -\sqrt{x+1}+1 - \sqrt{x+1}+2 = 1; \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x+1 < 1, \\ \sqrt{x+1} = 1; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq x < 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad \text{Ця система}$$

розв'язків не має.

$$2) \begin{cases} 1 \leq \sqrt{x+1} \leq 2, \\ \sqrt{x+1}-1 - \sqrt{x+1}+2 = 1; \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x+1 \leq 4, \\ 0x = 0; \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ 0x = 0; \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 3.$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{x+1} > 2, \\ \sqrt{x+1}-1 + \sqrt{x+1}-2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x+1 > 4, \\ \sqrt{x+1} = 2; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x = 3. \end{cases} \quad \text{Розв'язків немає.}$$

Відповідь: $[0; 3]$. ▲



1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$?
2. Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$?
3. Чому дорівнює нуль функції $y = \sqrt{x}$?
4. У якій координатній чверті розташований графік функції $y = \sqrt{x}$?
5. Яка фігура є графіком функції $y = \sqrt{x}$?

ВПРАВИ

36.1.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$.

- 1) Чому дорівнює значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,16; 64; 1,44; 3600?
- 2) При якому значенні аргументу значення функції дорівнює: 0,2; 5; 120; -4?

36.2.° Не виконуючи побудови, визначте, через які з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:

$A(36; 6)$, $B(4; -2)$, $C(0,81; 0,9)$, $D(-1; 1)$, $E(42,25; 6,5)$.

36.3.° Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \sqrt{x}$:

- 1) $A(16; 4)$; 2) $B(49; -7)$; 3) $C(3,6; 0,6)$; 4) $D(-36; 6)$?

36.4.° Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і прямої:

- 1) $y = 1$; 2) $y = 0,8$; 3) $y = -6$; 4) $y = 500$.

36.5.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\sqrt{x} \geq 2$; 4) $\sqrt{x+2} \geq 3$; 7) $\sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x-5}$;
- 2) $\sqrt{x} < 4$; 5) $\sqrt{1-2x} < 2$; 8) $\sqrt{|x|-1} \geq 2$;
- 3) $6 \leq \sqrt{x} < 9$; 6) $\sqrt{x+3} > \sqrt{1-4x}$; 9) $\sqrt{|x|-2} < 1$.

36.6.° При яких значеннях x виконується нерівність:

- 1) $\sqrt{x} \leq 8$; 3) $\sqrt{4x-3} \leq 1$; 5) $\sqrt{|x|-3} > 1$;
- 2) $\sqrt{2x+1} > 2$; 4) $\sqrt{3x-1} > \sqrt{x+2}$; 6) $\sqrt{|x|+1} \leq 3$?

36.7.° Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = x$; 3) $\sqrt{x} = x+2$;
- 2) $\sqrt{x} = x^2$; 4) $\sqrt{x} = 1,5 - 0,5x$.

36.8.° Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = -x-1$; 2) $\sqrt{x} = 2-x$; 3) $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.

36.9.* Дано функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

- 1) Знайдіть: $f(-8)$, $f(0)$, $f(9)$.
- 2) Побудуйте графік даної функції.

36.10.* Дано функцію $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

- 1) Знайдіть: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.
- 2) Побудуйте графік даної функції.

36.11.* Знайдіть область визначення, область значень і нулі функції $y = \sqrt{-x}$. Побудуйте графік даної функції.

36.12.* Побудуйте графік функції $y = \frac{x}{\sqrt{x}}$.

36.13.** Побудуйте графік рівняння:

- 1) $x = \sqrt{y}$;
- 2) $(x + \sqrt{y})(y - \sqrt{x}) = 0$.

36.14.** Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x} = a - x$ залежно від значення параметра a ?

36.15.** Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2 - 4\sqrt{a}} + \sqrt{(\sqrt{a}-2)^2 + 8\sqrt{a}}$.

36.16.** Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{a}-6)^2 + 24\sqrt{a}} - \sqrt{(\sqrt{a}+6)^2 - 24\sqrt{a}}$.

36.17.** Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x-1}$;
- 2) $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$;
- 3) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} - \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$;
- 4) $\sqrt{\frac{a+1}{4}} + \frac{\sqrt{a}}{2} + \sqrt{\frac{a+1}{4}} - \frac{\sqrt{a}}{2}$.

36.18.** Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{a+1-4\sqrt{a-3}}$;
- 2) $\sqrt{2a+2+2\sqrt{a^2+2a}} - \sqrt{a}$;
- 3) $\sqrt{\frac{x+4}{4}} + \sqrt{x} + \sqrt{\frac{x+4}{4}} - \sqrt{x}$.

36.19.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}} + \sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}} = 6$;
- 2) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$.

36.20.** Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$$

§ 7

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

37. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — параметри.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають **рівнянням першого степеня**.

Наприклад, кожне з лінійних рівнянь $2x = 3$, $3x = 0$, $\frac{1}{3}x = -7$ є рівнянням першого степеня. А ось лінійні рівняння $0x = 0$, $0x = 2$ не є рівняннями першого степеня.

Параметри a і b називають **коефіцієнтами рівняння першого степеня** $ax = b$.

Рівняння першого степеня завжди має один корінь.

Те, що множина рівнянь першого степеня є підмножиною множини лінійних рівнянь, ілюструє схема на рисунку 37.1.



Рис. 37.1

Ви також вмієте розв'язувати деякі рівняння, які містять змінну в другому степені. Наприклад, ви без зусиль розв'яжете кожне з рівнянь $x^2 = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x^2 + 5x = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$. Кожне із цих рівнянь має вигляд $ax^2 + bx + c = 0$.

Означення. Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a , b , c — параметри, причому $a \neq 0$.

Параметри a , b і c називають **коефіцієнтами квадратного рівняння**. Параметр a називають **першим або старшим коефіцієнтом**, параметр b — **другим коефіцієнтом**, параметр c — **вільним членом**.

Наприклад, квадратне рівняння $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.

Наприклад, $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 3x = 0$ — це зведені квадратні рівняння.

Оскільки у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ старший коефіцієнт не дорівнює нулю, то незведене квадратне рівняння завжди можна перетворити у зведене, рівносильне даному. Розділивши обидві частини рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ на число a , отримуємо зведене квадратне рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один із коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають **неповним квадратним рівнянням**.

Існують три види неповних квадратних рівнянь.

1. При $b = c = 0$ маємо: $ax^2 = 0$.
2. При $c = 0$ і $b \neq 0$ маємо: $ax^2 + bx = 0$.
3. При $b = 0$ і $c \neq 0$ маємо: $ax^2 + c = 0$.

Розв'яжемо неповні квадратні рівняння кожного виду.

1. Оскільки $a \neq 0$, то рівняння $ax^2 = 0$ має єдиний корінь $x = 0$.
2. Рівняння $ax^2 + bx = 0$ подамо у вигляді $x(ax + b) = 0$. Це

рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь $\begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0. \end{cases}$ Звідси

$\begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{cases}$ Отже, розглядуване рівняння має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3. Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$,

то можливі два випадки: $-\frac{c}{a} < 0$ або $-\frac{c}{a} > 0$. Очевидно, що в першому випадку рівняння коренів не має. У другому випадку рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Узагальнимо отримані результати:

Коефіцієнти рівняння $ax^2 + bx + c = 0$	Неповне квадратне рівняння	Корені
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
$b = 0, -\frac{c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0, -\frac{c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},$ $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

ПРИКЛАД При яких значеннях параметра a рівняння

$$x^2 - (a + 1)x + a^2 - 1 = 0$$

має два корені, один з яких дорівнює нулю?

Розв'язання. Число 0 є коренем квадратного рівняння, якщо вільний член цього рівняння дорівнює нулю. Звідси $a^2 - 1 = 0$; $a = 1$ або $a = -1$.

Якщо $a = -1$, то рівняння має єдиний корінь $x = 0$. При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $x^2 - 2x = 0$. Звідси $x = 0$ або $x = 2$.

Відповідь: $a = 1$. ▲



1. Яке рівняння називають лінійним?
2. Яке рівняння називають рівнянням першого степеня?
3. Наведіть приклад лінійного рівняння, яке є рівнянням першого степеня, і приклад лінійного рівняння, яке не є рівнянням першого степеня.
4. Яке рівняння називають квадратним?
5. Як називають коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
6. Яке квадратне рівняння називають зведеним?
7. Яке квадратне рівняння називають неповним?
8. Які існують види неповних квадратних рівнянь? Скільки коренів може мати рівняння кожного виду?

ВПРАВИ

37.1.° Укажіть серед даних рівнянь квадратні та назвіть, чому дорівнюють старший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з них:

- | | | |
|--------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $x = 0$; | 5) $x^2 - 4x + 2 = 0$; | 9) $6 - x^2 + 4x = 0$; |
| 2) $x^2 = 0$; | 6) $3x^3 - x^2 + 6 = 0$; | 10) $-x^2 - 2x + 3 = 0$. |
| 3) $x^2 + x = 0$; | 7) $-2x^2 + 7x - 8 = 0$; | |
| 4) $x^2 + 1 = 0$; | 8) $x^3 - x - 9 = 0$; | |

37.2.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

- старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;
- старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює -8 , а вільний член дорівнює $-\frac{1}{3}$;
- старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює -2 , а вільний член дорівнює 0.

37.3.° Складіть квадратне рівняння, у якому:

- старший коефіцієнт дорівнює -1 , другий коефіцієнт дорівнює -2 , а вільний член дорівнює 1,6;
- старший коефіцієнт і вільний член дорівнюють 2, а другий коефіцієнт дорівнює 0.

37.4.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a , b і c :

- $6x(3 - x) = 7 - 2x^2$;
- $(5x - 1)^2 = (x + 4)(x - 2)$.

37.5.° Подайте дане рівняння у вигляді $ax^2 + bx + c = 0$, укажіть значення коефіцієнтів a , b і c :

- $x(x + 10) = 8x + 3$;
- $(x + 2)^2 = 2x^2 + 4$.

37.6.° Укажіть, які з даних рівнянь є зведеними, і перетворіть незведені рівняння у зведені:

- $x^2 - 5x + 34 = 0$;
- $\frac{1}{3}x^2 + x - 5 = 0$;
- $-x^2 + 8x - 7 = 0$;
- $2x^2 + 6x + 8 = 0$;
- $16 - 6x + x^2 = 0$;
- $-0,2x^2 + 0,8x + 1 = 0$.

37.7.° Перетворіть дане квадратне рівняння у зведене:

- $\frac{1}{6}x^2 - 2x - 3 = 0$;
- $-4x^2 + 20x - 16 = 0$;
- $3x^2 + x + 2 = 0$.

37.8.° Розв'яжіть рівняння:

- $5x^2 - 45 = 0$;
- $2x^2 - 10 = 0$;
- $64x^2 - 9 = 0$;
- $x^2 + 8x = 0$;
- $2x^2 - 10x = 0$;
- $x^2 + 16 = 0$.

37.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x = 0$;

3) $3x^2 - 6 = 0$;

2) $2x^2 - 11x = 0$;

4) $-8x^2 = 0$.

37.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(x + 4) = -4$;

2) $(2x - 1)^2 - 6(6 - x) = 2x$;

3) $(x + 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = x^2 - x$.

37.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 2)(3x + 2) + (4x - 5)^2 = 10x + 21$;

2) $(2x - 1)(x + 8) - (x - 1)(x + 1) = 15x$.

37.12.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 36 більший за менше з них.

37.13.° Знайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 80 більший за більше з них.

37.14.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - 8x}{6} = x$;

2) $\frac{x^2 - 3}{5} - \frac{x^2 - 1}{2} = 2$.

37.15.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 + x}{7} - \frac{x}{3} = 0$;

2) $\frac{x^2 + 1}{6} - \frac{x^2 + 2}{4} = -1$.

37.16.° Складіть квадратне рівняння, один із коренів якого дорівнює 1 та яке буде:

1) повним і незведеним;

3) неповним і незведеним;

2) повним і зведеним;

4) неповним і зведеним.

37.17.° При якому значенні m :

1) число 2 є коренем рівняння $x^2 + mx - 6 = 0$;2) число -3 є коренем рівняння $2x^2 - 7x + m = 0$;3) число $\frac{1}{7}$ є коренем рівняння $m^2x^2 + 14x - 3 = 0$?

37.18.° Доведіть, що один із коренів рівняння $mx^2 - (m + n)x + n = 0$ дорівнює 1.

37.19.° При якому значенні n :

1) число 6 є коренем рівняння $x^2 - nx + 3 = 0$;2) число 0,5 є коренем рівняння $nx^2 - 8x + 10 = 0$?

37.20.° Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне число, більше з них. Знайдіть ці числа.

37.21.° Знайдіть два послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 1.

37.22.* При якому значенні m не є квадратним рівняння:

- 1) $(m - 4)x^2 + mx + 7 = 0$;
- 2) $(m^2 + 8m)x^2 + (m + 8)x + 10 = 0$;
- 3) $(m^2 - 81)x^2 - 6x + m = 0$?

37.23.* Яким числом, додатним чи від'ємним, є відмінний від нуля корінь неповного квадратного рівняння $ax^2 + bx = 0$, якщо:

- 1) $a > 0, b > 0$; 2) $a < 0, b > 0$; 3) $a > 0, b < 0$; 4) $a < 0, b < 0$?

37.24.* Чи має корені неповне квадратне рівняння $ax^2 + c = 0$, якщо:

- 1) $a > 0, c > 0$; 2) $a < 0, c > 0$; 3) $a > 0, c < 0$; 4) $a < 0, c < 0$?

37.25.* Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $3x^2 - 2x + 4 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

- 1) 0 і 4; 2) -1 і 1?

37.26.* Яким многочленом можна замінити зірочку в рівнянні $x^2 + 5x - 1 + * = 0$, щоб утворилося неповне квадратне рівняння, коренями якого є числа:

- 1) 0; -7; 2) -4; 4?

37.27.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 3|x| = 0$; 4) $x^2 - \frac{2x^2}{|x|} = 0$;
- 2) $x^2 + |x| - 2x = 0$; 5) $2x^2 + 5|x| = 0$;
- 3) $x^2 - \frac{|x|}{x} = 0$; 6) $x^2 + \frac{4x^2}{|x|} = 0$.

37.28.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 7|x| = 0$; 3) $2x^2 - \frac{3x^2}{|x|} = 0$;
- 2) $x^2 - 6|x| + x = 0$; 4) $x^2 + \frac{9|x|}{x} = 0$.

37.29.* При якому значенні параметра a рівняння $(a - 2)x^2 + (2a - 1)x + a^2 - 4 = 0$ є:

- 1) лінійним;
- 2) зведеним квадратним;
- 3) неповним незведеним квадратним;
- 4) неповним зведеним квадратним?

37.30.* Визначте, при якому значенні параметра a один із коренів квадратного рівняння дорівнює 0, і знайдіть другий корінь рівняння:

- 1) $x^2 + ax + a - 4 = 0$; 3) $ax^2 + (a + 3)x + a^2 - 3a = 0$.
- 2) $4x^2 + (a - 8)x + a^2 + a = 0$;

37.31.* Визначте, при якому значенні параметра a корені рівняння є протилежними числами, і знайдіть їх:

1) $x^2 + (a - 2)x + a - 6 = 0$; 3) $x^2 + (a - 1)x + a + 8 = 0$.

2) $x^2 + (a + 6)x + a + 4 = 0$;

38. Формула коренів квадратного рівняння

Знаючи коефіцієнти a і b рівняння першого степеня $ax = b$, можна знайти його корінь за формулою $x = \frac{b}{a}$.

Виведемо формулу, яка дає змогу за коефіцієнтами a , b і c квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходити його корені.

Маємо:

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (1)$$

Оскільки $a \neq 0$, то, помноживши обидві частини цього рівняння на $4a$, отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Виділимо в лівій частині цього рівняння квадрат двочлена:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0; \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac. \quad (2)$$

Існування коренів рівняння (2) та їхня кількість залежить від знака значення виразу $b^2 - 4ac$. Це значення називають **дискримінантом квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$ і позначають буквою D , тобто $D = b^2 - 4ac$. Термін «дискримінант» походить від латинського слова *discriminare*, що означає «розрізняти», «розділяти».

Тепер рівняння (2) можна записати так:

$$(2ax + b)^2 = D. \quad (3)$$

Можливі три випадки: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Якщо $D < 0$, то рівняння (3), а отже, і рівняння (1) коренів не має. Справді, при будь-якому значенні x вираз $(2ax + b)^2$ набуває тільки невід'ємних значень.

Висновок: якщо $D < 0$, то квадратне рівняння коренів не має.

2. Якщо $D = 0$, то рівняння (3) набуває вигляду

$$(2ax + b)^2 = 0.$$

Звідси $2ax + b = 0$; $x = -\frac{b}{2a}$.

Висновок: якщо $D = 0$, то квадратне рівняння має один корінь $x = -\frac{b}{2a}$.

3. Якщо $D > 0$, то рівняння (3) можна записати у вигляді

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2.$$

Звідси $2ax + b = -\sqrt{D}$ або $2ax + b = \sqrt{D}$. Тоді $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ або

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Висновок: якщо $D > 0$, то квадратне рівняння має два корені x_1 і x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Застосовують також коротку форму запису:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Цей запис називають **формулою коренів квадратного рівняння** $ax^2 + bx + c = 0$.

Отриману формулу можна застосовувати й у випадку, коли $D = 0$. Маємо:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Під час розв'язування квадратних рівнянь зручно керуватися таким алгоритмом:

- знайти дискримінант D квадратного рівняння;
- якщо $D < 0$, то у відповіді записати, що коренів немає;
- якщо $D \geq 0$, то скористатися формулою коренів квадратного рівняння.

Якщо другий коефіцієнт квадратного рівняння подати у вигляді $2k$, то можна користуватися іншою формулою, яка в багатьох випадках полегшує обчислення.

Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + 2kx + c = 0$.

Знайдемо його дискримінант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Позначимо вираз $k^2 - ac$ через D_1 .

Якщо $D_1 \geq 0$, то за формулою коренів квадратного рівняння отримуємо:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

тобто

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } D_1 = k^2 - ac.$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3x^2 - 2x - 16 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 11 = 0$;
 2) $-0,5x^2 + 2x - 2 = 0$; 5) $5x^2 - 16x + 3 = 0$.
 3) $x^2 + 5x - 3 = 0$;

Розв'язання. 1) Для даного рівняння $a = 3$, $b = -2$, $c = -16$.

Дискримінант рівняння

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) = 4 + 192 = 196.$$

$$\text{Отже, } x_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{6} = \frac{2 - 14}{6} = -2, \quad x_2 = \frac{2 + 14}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь: -2 ; $2\frac{2}{3}$.

2) Маємо:

$$D = 2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Отже, дане рівняння має один корінь:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2.$$

Зауважимо, що дане рівняння можна розв'язати іншим способом. Помноживши обидві частини рівняння на -2 , отримуємо:

$$x^2 - 4x + 4 = 0. \text{ Звідси } (x - 2)^2 = 0; \quad x - 2 = 0; \quad x = 2.$$

Відповідь: 2.

$$3) D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37.$$

$$\text{Рівняння має два корені: } x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

$$4) D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0.$$

Отже, рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає.

5) Подамо дане рівняння у вигляді $5x^2 + 2 \cdot (-8)x + 3 = 0$ і застосуємо формулу коренів для рівняння виду $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49;$$

$$x_1 = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{8 + 7}{5} = 3.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}$; 3. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 + 6\sqrt{x^2} - 16 = 0; \quad 3) 9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}.$$

$$2) x^2 - 10(\sqrt{x})^2 - 24 = 0;$$

Розв'язання. 1) Маємо: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем.

$$а) \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases} \quad \text{Рівняння цієї системи має два корені: } -8 \text{ і } 2.$$

$$\text{Тоді можна записати: } \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 2, \\ x = -8. \end{cases} \quad \text{Звідси } x = 2.$$

$$б) \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 6x - 16 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x = -2, \\ x = 8. \end{cases} \quad \text{Звідси } x = -2.$$

Відповідь: $-2; 2$.2) Областю визначення даного рівняння є проміжок $[0; +\infty)$. Тоді

$$\text{дане рівняння рівносильне системі } \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 10x - 24 = 0. \end{cases} \quad \text{Звідси } \begin{cases} x \geq 0, \\ x = -2, \\ x = 12; \end{cases}$$

 $x = 12$.

Відповідь: 12.

$$3) \text{ Дане рівняння рівносильне системі } \begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases} \quad \text{Звідси}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{1}{9}, \\ x \neq 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{9}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{9}$. ▲**ПРИКЛАД 3** Розв'яжіть рівняння:

$$1) |x^2 - x - 8| = -x; \quad 2) |x + 1| = x^2 + 3x + 1.$$

Розв'язання. 1) Задане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} -x \geq 0, \\ x^2 - x - 8 = -x, \\ x^2 - x - 8 = x. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - 8 = 0, \\ x^2 - 2x - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2\sqrt{2}, \\ x = -2\sqrt{2}, \\ x = 4, \\ x = -2. \end{cases} \quad \text{Отримуємо}$$

$$x = -2\sqrt{2} \text{ або } x = -2.$$

Відповідь: $-2\sqrt{2}$; -2 .

2) Задане рівняння рівносильне сукупності:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x+1 = x^2 + 3x + 1, \\ x+1 < 0, \\ -x-1 = x^2 + 3x + 1. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 2x = 0, \\ x < -1, \\ x^2 + 4x + 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x = 0 \text{ або } x = -2, \\ x < -1, \\ x = -2 + \sqrt{2} \text{ або } x = -2 - \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = -2 - \sqrt{2}. \end{cases}$$

Відповідь: 0 ; $-2 - \sqrt{2}$. ▲

ПРИКЛАД 4 При якому значенні параметра b має єдиний корінь рівняння:

$$1) 2x^2 - bx + 18 = 0; \quad 2) (b+6)x^2 - (b-2)x + 1 = 0?$$

Розв'язання. 1) Дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю. Маємо:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$

$$b^2 - 144 = 0;$$

$$b = -12 \text{ або } b = 12.$$

Відповідь: $b = -12$ або $b = 12$.

2) Звернемо увагу на поширену помилку: вважати таке рівняння квадратним. Насправді це рівняння степеня не вище другого.

При $b = -6$ отримуємо лінійне рівняння $8x + 1 = 0$, яке має один корінь.

При $b \neq -6$ дане рівняння є квадратним. Воно має єдиний корінь, якщо його дискримінант дорівнює нулю:

$$D = (b-2)^2 - 4(b+6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Маємо: $b^2 - 8b - 20 = 0$, звідси $b = -2$ або $b = 10$.

Відповідь: $b = -2$, або $b = 10$, або $b = -6$. ▲

ПРИКЛАД 5 При яких значеннях параметра a рівняння $a(a + 3)x^2 + (2a + 6)x - 3a - 9 = 0$

має більше ніж один корінь?

Розв'язання. При $a = 0$ отримуємо лінійне рівняння $6x - 9 = 0$, яке має єдиний корінь.

При $a = -3$ отримуємо лінійне рівняння $0x = 0$, яке має безліч коренів.

Якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то, поділивши обидві частини рівняння на $a + 3$, отримаємо квадратне рівняння $ax^2 + 2x - 3 = 0$. Дискримінант цього рівняння дорівнює $4(1 + 3a)$. Для виконання умови задачі він має бути додатним, тобто $4(1 + 3a) > 0$. Звідси $a > -\frac{1}{3}$. Проте

проміжок $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ містить значення $a = 0$, при якому задане рівняння має єдиний корінь, що не задовольняє умову задачі. Цей факт слід урахувати при записі відповіді.

Відповідь: $a = -3$, або $-\frac{1}{3} < a < 0$, або $a > 0$. ▲



1. Значення якого виразу називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Як залежить кількість коренів квадратного рівняння від знака дискримінанта?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.
4. Яким алгоритмом зручно користуватися під час розв'язування квадратних рівнянь?



Кілька поколінь учителів і вчительок математики набували педагогічного досвіду, а їхні учні та учениці поглиблювали свої знання, користуючись чудовою книжкою «Квадратні рівняння» блискучого українського педагога й математика Миколи Андрійовича Чайковського.



М. А. Чайковський залишив велику наукову й педагогічну спадщину. Його роботи відомі далеко за межами України.

М. А. Чайковський
(1887–1970)

ВПРАВИ

38.1.° Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів рівняння:

1) $x^2 + 2x - 4 = 0$;

3) $2x^2 - 6x - 3,5 = 0$;

2) $x^2 - 3x + 5 = 0$;

4) $5x^2 - 2x + 0,2 = 0$.

38.2.° Яке з наведених рівнянь має два корені:

1) $x^2 + 4x + 8 = 0$;

3) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$;

4) $2x^2 - 9x + 15 = 0$?

38.3.° Яке з наведених рівнянь не має коренів:

1) $x^2 - 6x + 4 = 0$;

3) $3x^2 + 4x - 2 = 0$;

2) $5x^2 - 10x + 6 = 0$;

4) $0,04x^2 - 0,4x + 1 = 0$?

38.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

9) $3x^2 - 4x - 20 = 0$;

2) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

10) $10x^2 - 7x - 3 = 0$;

3) $x^2 - 4x - 21 = 0$;

11) $-5x^2 + 7x - 2 = 0$;

4) $x^2 + x - 56 = 0$;

12) $-3x^2 + 7x + 6 = 0$;

5) $x^2 - 8x + 12 = 0$;

13) $x^2 - 4x + 1 = 0$;

6) $x^2 + 7x + 6 = 0$;

14) $2x^2 - x - 4 = 0$;

7) $-x^2 + 6x + 55 = 0$;

15) $x^2 - 8x + 20 = 0$.

8) $2x^2 - x - 6 = 0$;

38.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

7) $4x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $x^2 + 12x - 13 = 0$;

8) $-2x^2 + x + 15 = 0$;

3) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

9) $6x^2 + 7x - 5 = 0$;

4) $x^2 - x - 72 = 0$;

10) $18x^2 - 9x - 5 = 0$;

5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

11) $x^2 - 6x + 11 = 0$;

6) $2x^2 - 7x - 4 = 0$;

12) $-x^2 - 8x + 12 = 0$.

38.6.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) многочленів $6x^2 - 2$ і $5 - x$;

2) двочлена $y - 6$ і тричлена $y^2 - 9y + 3$;

3) тричленів $4t^2 + 4t + 2$ і $2t^2 + 10t + 8$?

38.7.° При яких значеннях змінної є рівними значення:

1) двочлена $4x + 4$ і тричлена $3x^2 + 5x - 10$;

2) тричленів $10p^2 + 10p + 8$ і $3p^2 - 10p + 11$?

38.8.° Знайдіть корені рівняння:

- 1) $(2x - 5)(x + 2) = 18$;
- 2) $(4x - 3)^2 + (3x - 1)(3x + 1) = 9$;
- 3) $(x + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 16$;
- 4) $(x - 6)^2 - 2x(x + 3) = 30 - 12x$;
- 5) $(x + 7)(x - 8) - (4x + 1)(x - 2) = -21x$;
- 6) $(2x - 1)(2x + 1) - x(1 - x) = 2x(x + 1)$.

38.9.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 4)^2 = 4x - 11$;
- 2) $(x + 5)^2 + (x - 7)(x + 7) = 6x - 19$;
- 3) $(3x - 1)(x + 4) = (2x + 3)(x + 3) - 17$.

38.10.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$;
- 2) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$;
- 3) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$;
- 4) $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{x^2 + 17}{9} = \frac{5x - 1}{6}$;
- 5) $\frac{2x^2}{3} - \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x + 2}{4} = 3$.

38.11.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 3x\sqrt{2} + 4 = 0$;
- 2) $x^2 - x(\sqrt{3} + 2) + 2\sqrt{3} = 0$;
- 3) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$;
- 4) $\frac{3x^2 + x}{4} - \frac{3x^2 + 17}{10} = \frac{2 - 7x}{5}$.

38.12.° При яких значеннях параметра a число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $a^2x^2 + 4ax - 5 = 0$?

38.13.° При яких значеннях параметра a число 2 є коренем рівняння $x^2 - 0,5ax - 3a^2 = 0$?

38.14.° Доведіть, що коли старший коефіцієнт і вільний член квадратного рівняння мають різні знаки, то рівняння має два корені.

38.15.° Знайдіть натуральне число, квадрат якого на 42 більший за дане число.

38.16.° Знайдіть периметр прямокутника, площа якого дорівнює 70 см^2 , а одна зі сторін на 9 см більша за другу.

38.17.° Добуток двох чисел дорівнює 84. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 8 менше від другого.

 **38.18.°** Добуток двох послідовних натуральних чисел на 89 більший за їхню суму. Знайдіть ці числа.

 **38.19.°** Сума квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 365. Знайдіть ці числа.

38.20.° Від квадратного листа картону відрізали смужку у формі прямокутника завширшки 3 см і завдовжки зі сторону квадрата. Площа решти листа становить 40 см^2 . Якою була довжина сторони квадратного листа картону?

38.21.° Від прямокутного аркуша паперу завдовжки 18 см відрізали квадрат, сторона якого дорівнює ширині аркуша. Площа решти аркуша становить 72 см^2 . Якою була ширина аркуша паперу?

38.22.° Знайдіть три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більший за подвоєну суму другого та третього.

38.23.° Знайдіть чотири послідовних парних натуральних числа, якщо сума першого та третього чисел у 5 разів менша від добутку другого та четвертого чисел.

38.24.° (Стародавня індійська задача.)

На дві зграї розділившись,
Мавпи в гаї веселились.
Одна восьма їх в квадраті
У кущах потішно грали.
А дванадцять на ліанах
То висіли, то стрибали.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

38.25.° У турнірі з футболу було зіграно 36 матчів. Скільки команд брало участь у турнірі, якщо кожна команда зіграла по одному разу з кожною з решти команд?

38.26.° Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 90 діагоналей?

38.27.° При яких значеннях параметра b має єдиний корінь рівняння:

$$1) 2x^2 + 4x - b = 0; \quad 2) 3x^2 - bx + 12 = 0?$$

38.28.° При яких значеннях параметра b має єдиний корінь рівняння:

$$1) 6x^2 - 18x + b = 0; \quad 2) 8x^2 + bx + 2 = 0?$$

38.29.° Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) |x^2 + 7x - 4| = 4; & 7) x^2 + 6|x| + 8 = 0; \\ 2) |x^2 - x - 5| = 1; & 8) x^2 - |x - 5| = 5; \\ 3) x^2 - 4|x| - 21 = 0; & 9) x|2x + 1| - 3x - 4 = 0; \\ 4) 5x^2 - 8|x| + 3 = 0; & 10) x^2 - 8\sqrt{x^2} + 15 = 0; \\ 5) x|x| + 6x - 5 = 0; & 11) x^2 + 4\sqrt{x^2} - 12 = 0; \\ 6) x^2 + \frac{4x^2}{|x|} - 12 = 0; & 12) ||x^2 - 6x + 4| - 3| = 1. \end{array}$$

38.30.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $|x^2 + 10x - 4| = 20$;
- 2) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$;
- 3) $|x^2 - x - 1| = 1$;
- 4) $x|x| + 12x - 45 = 0$;
- 5) $x|x| - 16x + 15 = 0$;
- 6) $3x^2 + 7|x| - 6 = 0$;
- 7) $2x^2 - \frac{13x^2}{|x|} + 6 = 0$;
- 8) $\frac{x^3}{|x|} - 14x - 15 = 0$;
- 9) $x^2 - 8\sqrt{x^2} - 9 = 0$;
- 10) $x^2 + 7\sqrt{x^2} + 12 = 0$;
- 11) $x^2 + |x + 4| = 4$;
- 12) $x|x - 2| - 6x + 8 = 0$.

38.31.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 2x + \frac{3}{x-8} = \frac{3}{x-8} + 80$;
- 2) $x^2 + 8(\sqrt{x})^2 - 33 = 0$;
- 3) $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 5 = 0$;
- 4) $2x^2 + 9(\sqrt{x+1})^2 - 27 = 0$;
- 5) $x^2 - 5x \frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$.

38.32.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6x^2 + 5x - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$;
- 2) $5x^2 - 14(\sqrt{x})^2 - 3 = 0$;
- 3) $x^2 - (\sqrt{x+3})^2 - 8 = 0$;
- 4) $x^2 - 4(\sqrt{x+2})^2 - 13 = 0$;
- 5) $x^2 + 2x + 3 \frac{|x-1|}{x-1} = 0$.

38.33.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x^2 + 2x} + |x^2 - 8x - 20| = 0$;
- 2) $\sqrt{x^2 - 9x + 8} + x^2 - 16x + 64 = 0$.

38.34.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{8x^2 - 7x - 1} = 0$;
- 2) $x^2 + 6x + 9 + |x^2 + x - 6| = 0$;
- 3) $\sqrt{36 - x^2} + |x^2 + 5x - 6| = 0$.

38.35.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(\sqrt{x} - 2)(x^2 + 2x - 24) = 0$;
- 2) $(x^2 + 2x)(\sqrt{x} - 5)(3x^2 - 11x - 4) = 0$.

38.36.* Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x} - 3)(x^2 + 4x - 21) = 0$.**38.37.*** Доведіть, що при будь-якому значенні параметра p має два корені рівняння:

- 1) $4x^2 - px - 3 = 0$;
- 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

38.38.* Доведіть, що при будь-якому значенні параметра m не має коренів рівняння:

1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

38.39.* Доведіть, що при будь-якому значенні параметра b рівняння $x^2 + bx - 7 = 0$ має два корені.

38.40.* При яких значеннях параметра a має два корені рівняння:

1) $x^2 + 3x + a = 0$; 2) $x^2 + 2ax + a^2 - 3a + 1 = 0$?

38.41.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 + x - 3| = x$; 3) $|x - 2| = x^2 - 2x$;
2) $|x^2 + x - 1| = 2x - 1$; 4) $|2x + 1| = x^2 - x - 1$.

38.42.** Розв'яжіть рівняння:

1) $|x^2 - 2x| = 3 - 2x$; 2) $|x - 3| = x^2 - 6x + 3$.

38.43.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$;
3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

38.44.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$; 3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.
2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;

38.45.** При яких значеннях параметра b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$;
2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;
3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$;
4) $(b + 2)x^2 + (b^2 + 2b)x + b + 2 = 0$?

38.46.** При яких значеннях параметра b має єдиний корінь рівняння:

1) $bx^2 + x + b = 0$;
2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$;
3) $(b - 2)x^2 + (4 - 2b)x + 3 = 0$?

38.47.** При яких значеннях параметра a рівняння $ax^2 + 4x + 3 = 0$ має два корені?

38.48.** При яких значеннях параметра a рівняння $a(2a + 4)x^2 - (a + 2)x - 5a - 10 = 0$ має більше ніж один розв'язок?

39. Теорема Вієта

Теорема 39.1 (теорема Вієта). Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення. Умовою теореми передбачено, що дане квадратне рівняння має корені. Тому його дискримінант D не може бути від'ємним.

Нехай $D > 0$. Застосувавши формулу коренів квадратного рівняння, запишемо:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

$$\text{Маємо: } x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Нехай $D = 0$. У цьому разі вважають, що $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Маємо:

$$x_1 + x_2 = 2 \cdot \left(\frac{-b}{2a} \right) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \quad \blacktriangle$$



Франсуа Вієт
(1540–1603)

Французький математик, за фахом юрист. У 1591 р. упровадив буквені позначення не лише для невідомих величин, але й для коефіцієнтів рівнянь, завдяки чому стало можливим виражати властивості рівнянь та їхні корені загальними формулами. Серед своїх відкриттів сам Вієт особливо високо цінив установлення залежності між коренями й коефіцієнтами рівнянь.

Наслідок. Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -b, \\x_1 x_2 &= c.\end{aligned}$$

Іншими словами, сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.

Теорема 39.2 (обернена до теореми Вієта). Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ і $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то ці числа є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Доведення. Розглянемо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Перетворимо його у зведене:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Згідно з умовою теореми це рівняння можна записати так:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0. \quad (*)$$

Підставимо в ліву частину цього рівняння замість x спочатку число α , а потім число β . Отримуємо:

$$\alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta = \alpha^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta = 0;$$

$$\beta^2 - (\alpha + \beta)\beta + \alpha\beta = \beta^2 - \alpha\beta - \beta^2 + \alpha\beta = 0.$$

Таким чином, числа α і β є коренями рівняння (*), а отже, і коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. ▲

Наслідок. Якщо числа α і β такі, що $\alpha + \beta = -b$ і $\alpha\beta = c$, то ці числа є коренями зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$.

Цей наслідок дає змогу розв'язувати деякі квадратні рівняння усно, не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму та добуток коренів рівняння $3x^2 - 15x + 2 = 0$.

Розв'язання. З'ясуємо, чи має дане рівняння корені.

Маємо: $D = (-15)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 225 - 24 > 0$. Отже, рівняння має два корені x_1 і x_2 .

Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{-15}{3} = 5$, $x_1 x_2 = \frac{2}{3}$. ▲

ПРИКЛАД 2 Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа -7 і 4 .

Розв'язання

За теоремою Вієта $b = -(-7 + 4) = 3$, $c = -7 \cdot 4 = -28$. ▲

ПРИКЛАД 3 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють: 1) 4 і $-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ і $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Розв'язання. 1) Нехай $x_1 = 4$ і $x_2 = -\frac{5}{7}$.

$$\text{Тоді } x_1 + x_2 = 4 - \frac{5}{7} = \frac{23}{7}, \quad x_1 x_2 = 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{20}{7}.$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - \frac{23}{7}x - \frac{20}{7} = 0$. Помноживши обидві частини цього рівняння на 7, отримуємо квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами:

$$7x^2 - 23x - 20 = 0.$$

$$2) \text{ Нехай } x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Тоді } x_1 + x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6, \quad x_1 x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}.$$

Отже, x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Звідси шукаємим є рівняння $4x^2 - 24x + 29 = 0$. ▲

ПРИКЛАД 4 Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу: 1) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тоді маємо:

$$1) \quad \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} = -\frac{1}{3}.$$

$$2) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4}.$$

Відповідь: 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{45}{4}$. ▲

ПРИКЛАД 5 Число 4 є коренем рівняння $3x^2 - 10x + n = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення n .

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, причому $x_1 = 4$. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. Тоді $x_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$. Маємо: $\frac{n}{3} = x_1 x_2 = -\frac{8}{3}$; $n = -8$.

Відповідь: $x_2 = -\frac{2}{3}$, $n = -8$. ▲

ПРИКЛАД 6 Складіть квадратне рівняння, корені якого на 4 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 6x - 14 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння, x'_1 і x'_2 — корені шуканого рівняння.

За умовою $x'_1 = x_1 + 4$, $x'_2 = x_2 + 4$.

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -6$, $x_1 x_2 = -14$.

Тоді маємо:

$$x'_1 + x'_2 = x_1 + 4 + x_2 + 4 = (x_1 + x_2) + 8 = -6 + 8 = 2;$$

$$x'_1 x'_2 = (x_1 + 4)(x_2 + 4) = x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = -14 + 4 \cdot (-6) + 16 = 22.$$

Отже, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, шуканим є рівняння $x^2 - 2x - 22 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 2x - 22 = 0$. ▲

ПРИКЛАД 7 При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a = 0$ дорівнює 3?

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — корені даного рівняння. За умовою $x_1^2 + x_2^2 = 3$, тобто $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3$. Застосовуючи теорему Вієта, можна записати: $(-a)^2 - 2a = 3$; $a^2 - 2a - 3 = 0$. Звідси $a = -1$ або $a = 3$.

Здавалося б, розв'язування завершено. Проте теорема Вієта «працює» лише для тих квадратних рівнянь, які мають корені. А задане квадратне рівняння має корені не при всіх значеннях параметра a . Існування коренів визначається умовою $D \geq 0$; для даного рівняння $D = a^2 - 4a$. Отже, знайдені значення $a = -1$ і $a = 3$ мають задовольняти нерівність $a^2 - 4a \geq 0$. Легко встановити, що підходить тільки $a = -1$.

Відповідь: $a = -1$. ▲



1. Сформулюйте теорему Вієта.
2. Сформулюйте наслідок з теореми Вієта.
3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.
4. Сформулюйте наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта.

ВПРАВИ

39.1.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 + 6x - 32 = 0$;

3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$;

2) $x^2 - 10x + 4 = 0$;

4) $10x^2 + 42x + 25 = 0$.

39.2.° Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму та добуток його коренів:

1) $x^2 - 12x - 18 = 0$;

3) $3x^2 + 7x + 2 = 0$;

2) $x^2 + 2x - 9 = 0$;

4) $-4x^2 - 8x + 27 = 0$.

39.3.° Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, установіть, чи є коренями рівняння:

1) $x^2 - 8x + 12 = 0$ числа 2 і 6;

2) $x^2 + x - 56 = 0$ числа -7 і 8;

3) $x^2 - 13x + 42 = 0$ числа 5 і 8;

4) $x^2 - 20x - 99 = 0$ числа 9 і 11.

39.4.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:

1) -8 і 6;

2) 4 і 5.

39.5.° Знайдіть коефіцієнти b і c рівняння $x^2 + bx + c = 0$, якщо його коренями є числа:

1) -2 і 0,5;

2) -10 і -20.

39.6.° Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) 2 і 5;

3) -0,2 і -10;

5) 0 і 6;

2) $-\frac{1}{3}$ і 2;

4) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$;

6) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$.

39.7.° Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) -7 і -8; 2) 5 і -0,4; 3) $\frac{1}{2}$ і $\frac{2}{3}$; 4) $5 - \sqrt{10}$ і $5 + \sqrt{10}$.

39.8.° Число -2 є коренем рівняння $x^2 - 8x + q = 0$. Знайдіть значення q і другий корінь рівняння.

39.9.° Число 7 є коренем рівняння $x^2 + px - 42 = 0$. Знайдіть значення p і другий корінь рівняння.

39.10.° Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $6x^2 - bx + 4 = 0$. Знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

39.11.° Число $-0,2$ є коренем рівняння $4x^2 - 5,6x + m = 0$. Знайдіть значення m і другий корінь рівняння.

39.12.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - 7x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2$.

39.13.° Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $5x^2 + 4x - 13 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

39.14.° При якому значенні b корені рівняння $x^2 + bx - 17 = 0$ є протилежними числами? Знайдіть ці корені.

39.15.° Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$;

4) $x^2 + 2x - 8 = 0$;

2) $x^2 + 5x + 4 = 0$;

5) $2x^2 + 5x + 3 = 0$;

3) $x^2 - 9x + 20 = 0$;

6) $-8x^2 - 19x + 27 = 0$.

39.16.° Застосовуючи теорему, обернену до теореми Вієта, розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

4) $x^2 - x - 2 = 0$;

2) $x^2 + 4x - 5 = 0$;

5) $x^2 - 3x - 18 = 0$;

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

6) $16x^2 - 23x + 7 = 0$.

39.17.° Які з даних рівнянь мають два додатних корені, які — два від'ємних, а які — корені різних знаків:

1) $x^2 - 12x + 14 = 0$;

4) $x^2 + 16x - 10 = 0$;

2) $x^2 + 6x + 2 = 0$;

5) $x^2 - 24x + 0,1 = 0$;

3) $x^2 - 7x - 30 = 0$;

6) $x^2 + 20x + 3 = 0$?

39.18.* Один із коренів рівняння $x^2 - 10x + c = 0$ на 8 менший від другого. Знайдіть значення c і корені рівняння.

39.19.* Корені рівняння $x^2 + 20x + a = 0$ відносяться як $7 : 3$. Знайдіть значення a та корені рівняння.

39.20.* Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 7x + m = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 5x_2 = 28$. Знайдіть корені рівняння та значення m .

39.21.* Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + 4x + n = 0$ задовольняють умову $3x_1 - x_2 = 8$. Знайдіть корені рівняння та значення n .

39.22.* Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 9x + 6 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;

3) $(x_1 - x_2)^2$;

5) $x_1^3 + x_2^3$.

2) $x_1^2 + x_2^2$;

4) $x_1x_2^3 + x_2x_1^3$;

39.23.* Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 5x - 16 = 0$.
Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 2) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; 3) $|x_2 - x_1|$.

39.24.* Складіть квадратне рівняння, корені якого на 2 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

39.25.* Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 12x + 4 = 0$.

39.26.* Складіть квадратне рівняння, корені якого в 3 рази менші від відповідних коренів рівняння $2x^2 - 14x + 9 = 0$.

39.27.* Складіть квадратне рівняння, корені якого у 2 рази більші за відповідні корені рівняння $2x^2 - 15x + 4 = 0$.

39.28.** Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + ax - 7 = 0$ дорівнює $\frac{46}{9}$. Знайдіть значення a .

39.29.** Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - ax + 8 = 0$ задовольняють умову $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Знайдіть значення a .

39.30.** Чи є правильним твердження:

- 1) рівняння $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ має корені різних знаків при будь-якому значенні a ;
- 2) якщо рівняння $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ має корені, то незалежно від значення a вони обидва від'ємні?

39.31.** Знайдіть усі цілі значення b , при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

39.32.** Знайдіть усі цілі значення b , при яких має цілі корені рівняння:

1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

39.33.** Корені рівняння $x^2 + bx + c = 0$ дорівнюють його коефіцієнтам b і c . Знайдіть b і c .

39.34.** При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 + (a^2 + 2a - 3)x + a = 0$ дорівнює нулю?

39.35.** При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$ дорівнює 5?

39.36.** При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ дорівнює їхньому добутку?

39.37.** При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - 5x + a = 0$ на 1 менші від коренів рівняння $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$?

39.38." При яких значеннях параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2 - ax + 2a = 0$ дорівнює 3?

39.39." При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 4x + a = 0$ дорівнює: 1) 12; 2) 6?

39.40." При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ дорівнює 9?

39.41." При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + 2ax - 3 = 0$ є найменшою?

39.42." При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + ax + a^2 - 2 = 0$ є найбільшою?

40. Квадратний тричлен

Означення. **Квадратним тричленом** називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$.

Наведемо приклади многочленів, які є квадратними тричленами:

$$2x^2 - 3x + 5; \quad x^2 + 7x; \quad x^2 - 5; \quad 3x^2.$$

Зазначимо, що ліва частина квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ є квадратним тричленом.

Означення. **Коренем квадратного тричлена** називають значення змінної, при якому значення квадратного тричлена дорівнює нулю.

Наприклад, число 2 є коренем квадратного тричлена $x^2 - 6x + 8$.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Значення виразу $D = b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом квадратного тричлена** $ax^2 + bx + c$.

Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь, якщо $D > 0$ — то два корені.

Розглянемо квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$. Розкладемо його на множники методом групування.

Маємо:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= x^2 - x - 2x + 2 = \\ &= x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Про таке тотожне перетворення говорять, що квадратний тричлен $x^2 - 3x + 2$ розкладено на **лінійні множники** $x - 1$ і $x - 2$.

Зв'язок між коренями квадратного тричлена та лінійними множниками, на які він розкладається, установлює така теорема.

Теорема 40.1. Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ додатний, то даний тричлен можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена.

Доведення. Оскільки числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Тоді

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \blacktriangle \end{aligned}$$

Теорема 40.2. Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнює нулю, то його розклад на множники має такий вигляд:

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Доведення. У даному квадратному тричлені виділимо квадрат двочлена:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

Тепер зрозуміло, що коли $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. $\blacktriangle$

Теорема 40.3. Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то даний тричлен не можна розкласти на лінійні множники.

Доведення. Припустимо, що квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна розкласти на лінійні множники. Тоді існують такі числа k , m і n , при яких виконується рівність $ax^2 + bx + c = k(x - m)(x - n)$. Звідси отримуємо, що m і n — корені даного квадратного тричлена. Отже, його дискримінант невід'ємний, що суперечить умові. $\blacktriangle$

Теорема 40.4. Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ від'ємний, то при всіх x значення цього тричлена мають той самий знак, що й число a , а саме:

якщо $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при всіх x ;

якщо $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ при всіх x .

Доведення. Маємо: $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right)$. Якщо $D < 0$,

то $-\frac{D}{4a^2} > 0$. Тоді $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} > 0$ при всіх x . Отже, знак добутку

$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right)$ залежить тільки від знака числа a . ▲

ПРИКЛАД 1 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 - 14x - 32$; 2) $-x^2 + 17x - 30$; 3) $3x^2 - 7x + 2$.

Розв'язання. 1) Знайдемо корені даного тричлена:

$$x^2 - 14x - 32 = 0;$$

$$x_1 = -2, x_2 = 16.$$

Отже, $x^2 - 14x - 32 = (x + 2)(x - 16)$.

2) Розв'яжемо рівняння $-x^2 + 17x - 30 = 0$. Маємо:

$$x^2 - 17x + 30 = 0;$$

$$x_1 = 2, x_2 = 15.$$

Отже, $-x^2 + 17x - 30 = -(x - 2)(x - 15)$.

3) Розв'яжемо рівняння $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Маємо:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2.$$

Тоді $3x^2 - 7x + 2 = 3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x - 2) = (3x - 1)(x - 2)$. ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність:

1) $-2x^2 + 3x - 3 < 0$; 2) $\sqrt{x}(x^2 - 2x + 3) > 0$.

Розв'язання. 1) Оскільки дискримінант і старший коефіцієнт квадратного тричлена $-2x^2 + 3x - 3$ від'ємні, то даний тричлен набуває від'ємних значень при всіх x . Отже, множиною розв'язків даної нерівності є множина $\mathbb{R}$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

2) Оскільки дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 2x + 3$ від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то $x^2 - 2x + 3 > 0$ при всіх x . Тоді задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x} > 0$. Звідси $x > 0$.

Відповідь: $(0; +\infty)$. ▲

ПРИКЛАД 3 Скоротіть дріб $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником даного дробу. Розв'язавши рівняння $6a^2 - a - 1 = 0$, отримуємо: $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2}$.

Тепер можна записати:

$$6a^2 - a - 1 = 6 \left(a + \frac{1}{3} \right) \left(a - \frac{1}{2} \right) = 3 \left(a + \frac{1}{3} \right) \cdot 2 \left(a - \frac{1}{2} \right) = (3a + 1)(2a - 1).$$

Тоді отримуємо:

$$\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1} = \frac{(3a + 1)(2a - 1)}{(3a + 1)(3a - 1)} = \frac{2a - 1}{3a - 1}.$$

Відповідь: $\frac{2a - 1}{3a - 1}$. ▲

ПРИКЛАД 4 При якому значенні m розклад на множники тричлена $2x^2 + 9x + m$ містить множник $(x + 5)$?

Розв'язання. Оскільки розклад даного тричлена на множники має містити множник $(x + 5)$, то один із коренів цього тричлена дорівнює -5 . Тоді маємо:

$$2 \cdot (-5)^2 + 9 \cdot (-5) + m = 0;$$

$$m = -5.$$

Відповідь: $m = -5$. ▲

ПРИКЛАД 5 Розкладіть на множники многочлен $2x^2 + xy - 6y^2$.

Розв'язання. Розглянемо даний многочлен як квадратний тричлен зі змінною x , вважаючи y параметром. Знайдемо його корені:

$$2x^2 + xy - 6y^2 = 0; \quad x = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 48y^2}}{4}; \quad \begin{cases} x = \frac{-y + 7y}{4}; \\ x = \frac{-y - 7y}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y; \\ x = -2y. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } 2x^2 + xy - 6y^2 = 2(x + 2y) \left(x - \frac{3y}{2} \right) = (x + 2y)(2x - 3y). \quad \blacktriangle$$

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 - 2x + 3 > 0$ виконується при всіх x ?

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то задана нерівність набуває вигляду $-2x + 3 > 0$. Множиною розв'язків цієї нерівності не є множина $\mathbb{R}$.

Якщо $a \neq 0$, то ліва частина заданої нерівності — квадратний тричлен. Щоб він набував додатних значень при всіх x , його дискримінант має бути від'ємним, а старший коефіцієнт — додатним. Тому шукані значення параметра a є розв'язками системи

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4 - 12a < 0. \end{cases} \quad \text{Звідси } a > \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $a > \frac{1}{3}$. ▲



1. Який многочлен називають квадратним тричленом?
2. Що називають коренем квадратного тричлена?
3. Що називають дискримінантом квадратного тричлена?
4. У якому випадку квадратний тричлен не має коренів? має один корінь? має два корені?
5. У якому випадку квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?
6. За якою формулою квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?
7. У якому випадку квадратний тричлен не можна розкласти на лінійні множники?
8. Яких значень набуває квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом?

ВПРАВИ

40.1.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|--|
| 1) $x^2 - 7x + 12$; | 5) $-x^2 + x + 2$; | 9) $\frac{1}{6}b^2 - \frac{5}{6}b + 1$; |
| 2) $x^2 + 8x + 15$; | 6) $6x^2 - 5x - 1$; | 10) $-2x^2 - 0,5x + 1,5$; |
| 3) $x^2 - 3x - 10$; | 7) $4x^2 + 3x - 22$; | 11) $0,4x^2 - 2x + 2,5$; |
| 4) $-x^2 - 5x - 6$; | 8) $-3a^2 + 8a + 3$; | 12) $-1,2m^2 + 2,6m - 1$. |

40.2.° Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|---------------------------------|
| 1) $x^2 - 3x - 18$; | 4) $5x^2 + 8x - 4$; | 7) $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$; |
| 2) $x^2 + 5x - 14$; | 5) $2a^2 - 3a + 1$; | 8) $0,3m^2 - 3m + 7,5$; |
| 3) $-x^2 + 3x + 4$; | 6) $4b^2 - 11b - 3$; | 9) $-0,5x^2 + x + 1,5$. |

40.3.° Скоротіть дріб:

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\frac{3x-15}{x^2-x-20}$; | 4) $\frac{4a^2-9}{2a^2-9a-18}$; | 7) $\frac{m^3-1}{m^2+9m-10}$; |
| 2) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x}$; | 5) $\frac{2b^2-7b+3}{4b^2-4b+1}$; | 8) $\frac{x^2-16}{32-4x-x^2}$; |
| 3) $\frac{x^2+4x}{x^2+2x-8}$; | 6) $\frac{c^2-5c-6}{c^2-8c+12}$; | 9) $\frac{4n^2-9n+2}{2+9n-5n^2}$. |

40.4.° Скоротіть дріб:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\frac{2x+12}{x^2+3x-18}$; | 3) $\frac{4x^2+x-3}{x^2-1}$; | 5) $\frac{a^2+5a+4}{a^2-a-20}$; |
| 2) $\frac{x^2+9x+14}{x^2+7x}$; | 4) $\frac{2y^2+3y-5}{y^2-2y+1}$; | 6) $\frac{3+20b-7b^2}{7b^2-6b-1}$. |

40.5.* Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + x + 1 > 0$;

2) $-x^2 + x - 1 \leq 0$;

3) $(2x - 1)(2x^2 - 3x + 5) < 0$;

4) $\sqrt{x-1}(-5x^2 + 8x - 5) \geq 0$.

40.6.* Розв'яжіть нерівність:

1) $7x^2 - 9x + 3 \geq 0$;

2) $-5y^2 + 11y - 11 < 0$;

3) $(2x+3)(3x^2 - 8x + 6) \geq 0$;

4) $|x+1|(4x^2 - 5x + 2) \leq 0$.

40.7.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4}}{x + 2}$;

2) $y = \frac{1}{\sqrt{5x^2 - 4x + 1}}$.

40.8.* При якому значенні параметра b розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2 - 5x + b$ містить множник $(x - 3)$;

2) $-4x^2 + bx + 2$ містить множник $(x + 1)$;

3) $3x^2 - 4x + b$ містить множник $(3x - 2)$?

40.9.* При якому значенні параметра a розклад на лінійні множники тричлена:

1) $2x^2 - 7x + a$ містить множник $(x - 4)$;

2) $4x^2 - ax + 6$ містить множник $(2x + 1)$?

40.10.* Спростіть вираз:

1) $\frac{9a^2 - 4}{2a^2 - 5a + 2} \cdot \frac{a - 2}{3a + 2} + \frac{a - 1}{1 - 2a}$;

2) $\frac{b - 4}{b^3 - b} : \left(\frac{b - 1}{2b^2 + 3b + 1} - \frac{1}{b^2 - 1} \right)$;

3) $\left(\frac{c + 2}{c^2 - c - 6} - \frac{2c}{c^2 - 6c + 9} \right) : \frac{c^2 + 3c}{(2c - 6)^2}$;

4) $\left(\frac{3}{m - 4} + \frac{2m}{m + 1} + \frac{4m - 6}{m^2 - 3m - 4} \right) \cdot \frac{4m - 16}{2m - 3}$.

40.11.* Доведіть, що при всіх допустимих значеннях a значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $\frac{25a^2 - 36}{10a^2 - 9a + 2} : \frac{5a + 6}{5a - 2} + \frac{9a - 8}{1 - 2a}$;

2) $\left(\frac{2a}{a + 3} + \frac{1}{a - 1} - \frac{4}{a^2 + 2a - 3} \right) : \frac{2a + 1}{a + 3}$.

40.12.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$;

2) $y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

40.13.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$;

2) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

40.14.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^2 - 6xy + 5y^2$;

3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;

2) $a^2 + 5ab - 36b^2$;

4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

40.15.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^2 - 14ab + 40b^2$;

2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

40.16.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{2a^2 + ab - 15b^2}{-2a^2 + 9ab - 10b^2}$;

2) $\frac{6x^2 - 13xy - 5y^2}{12x^2 - 5xy - 3y^2}$.

40.17.** Скоротіть дріб:

1) $\frac{3n^2 + mn - 4m^2}{8m^2 + 18mn + 9n^2}$;

2) $\frac{12u^2 - 4ut - 5t^2}{-5t^2 + 21ut - 18u^2}$.

40.18.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють рівність:

1) $8x^2 - 6xy + y^2 = 0$;

2) $4x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 7y - 2 = 0$.

40.19.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$;

2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

40.20.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64.$$

40.21.** При яких значеннях параметра a нерівність виконується при всіх x :

1) $(a - 1)x^2 - x + 2 > 0$;

2) $ax^2 - (2a - 1)x + a + 1 < 0$?

40.22.* Один із коренів рівняння $x^{12} - abx + a^2 = 0$ більший за 2. Доведіть, що $|b| > 64$.

40.23.* Розв'яжіть рівняння $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$.

40.24.* Розв'яжіть рівняння $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

41. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2+2x}{x-6} = \frac{5x+18}{x-6}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2+2x=5x+18, \\ x-6 \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x^2-3x-18=0, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3, \\ x=6, \\ x \neq 6; \end{cases} \quad x=-3.$$

Відповідь: -3 . ▲

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{5}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x+2} = 0$;

$$\frac{5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)} = 0.$$

Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 5(x+2)-4(x-2)-(x-2)^2=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} 5x+10-4x+8-x^2+4x-4=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-14=0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=7, \\ x=-2, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

$$x=7.$$

Відповідь: 7 . ▲

ПРИКЛАД 3 Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння

$$1 - \frac{3}{x+a-1} = \frac{5a}{(x+a-1)(x+1)}.$$

Розв'язання. $\frac{(x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a}{(x+a-1)(x+1)} = 0$. Це рівняння рівно-

сильне системі $\begin{cases} (x+a-1)(x+1)-3(x+1)-5a=0, \\ x \neq 1-a, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звідси

$$\begin{cases} x^2 + x(a-3) - 4a - 4 = 0, \\ x \neq 1-a, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Квадратне рівняння системи має два корені: $x_1 = 4$, $x_2 = -a - 1$. Ці значення змінної будуть коренями заданого рівняння тільки при виконанні таких умов: $x_1 \neq 1 - a$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 1 - a$, $x_2 \neq -1$. Очевидно, що умови $4 \neq -1$ і $-a - 1 \neq 1 - a$ виконуються завжди.

Якщо $x_1 = 1 - a$, тобто $4 = 1 - a$, то $a = -3$. Отже, при $a = -3$ корінь x_1 є стороннім. Разом з тим для $a = -3$ отримуємо: $x_2 = -a - 1 = 2$, і $x_2 = 2$ є коренем заданого рівняння.

Якщо $x_2 = -1$, тобто $-a - 1 = -1$, то $a = 0$. Отже, при $a = 0$ корінь x_2 є стороннім, а $x_1 = 4$ є коренем.

Зберемо отримані результати у відповідь.

Відповідь: якщо $a = -3$, то $x = 2$; якщо $a = 0$, то $x = 4$; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -3$, то $x = 4$ або $x = -a - 1$. ▲

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі значення параметра b , при яких рів-

няння $\frac{x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - (3b-1)x + 2b^2 - 2 = 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Розв'язавши квадратне рівняння системи, отримуємо:

$$x_1 = 2b - 2, \quad x_2 = b + 1.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли квадратне рівняння системи має єдиний корінь. Для цього треба, щоб $x_1 = x_2$, тобто $2b - 2 = b + 1$. Звідси $b = 3$. Проте при $b = 3$ отримуємо, що $x_1 = x_2 = 4$, тобто ква-

дратне рівняння має єдиний корінь, але він не належить області визначення заданого рівняння.

Тепер розглянемо випадок, коли корені квадратного рівняння системи є різними. Для того щоб x_1 і x_2 були коренями заданого рівняння, мають виконуватися такі умови: $x_1 \neq 4$, $x_1 \neq -1$, $x_2 \neq 4$, $x_2 \neq -1$. Тому, щоб розв'язок був єдиним, знайдемо вимоги, за яких залишається лише один корінь в області визначення заданого рівняння:

$$1) \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 \neq 4, \\ x_2 \neq -1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_2 = 4, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_2 = -1, \\ x_1 \neq 4, \\ x_1 \neq -1. \end{cases}$$

Легко впевнитися (переконайтеся в цьому самостійно), що перша та третя системи розв'язків не мають, а з другої та четвертої відповідно отримуємо: $b = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

Відповідь: $b = \frac{1}{2}$ або $b = -2$. ▲

ВПРАВИ

41.1.° Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1} = 0; & 5) \frac{x^2 - 6x}{x - 3} + \frac{15 - 2x}{x - 3} = 0; \\ 2) \frac{3x^2 - x - 2}{1 - x} = 0; & 6) \frac{5x + 18}{x - 2} = x; \\ 3) \frac{x^2 - 14}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}; & 7) x + 1 = \frac{6}{x}; \\ 4) \frac{x^2 + 4x}{x - 5} - \frac{9x + 50}{x - 5} = 0; & 8) 5 - \frac{8}{x^2} = \frac{18}{x}. \end{array}$$

41.2.° Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 - 5x - 6}{x - 6} = 0; & 5) \frac{x^2 + 12x}{x + 4} - \frac{5x - 12}{x + 4} = 0; \\ 2) \frac{4x^2 - 7x - 2}{x - 2} = 0; & 6) \frac{x^2 - 3x}{x + 6} = 6; \\ 3) \frac{2x^2 + 6}{x + 8} = \frac{13x}{x + 8}; & 7) \frac{2 - 33y}{y - 4} = 7y; \\ 4) \frac{x^2 + 4x}{x + 7} = \frac{5x + 56}{x + 7}; & 8) y - \frac{39}{y} = 10. \end{array}$$

41.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 9} = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - 12x + 35}{x^2 - 10x + 25} = 0;$$

$$2) \frac{3x^2 - 14x - 5}{3x^2 + x} = 0;$$

$$4) \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} = 0.$$

41.4.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 - 9x - 10}{x^2 - 1} = 0;$$

$$2) \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8} = 0.$$

41.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2y}{y-3} = \frac{3y+3}{y};$$

$$3) \frac{5x+2}{x-1} = \frac{4x+13}{x+7};$$

$$2) \frac{3x+4}{x-3} = \frac{2x-9}{x+1};$$

$$4) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x-1} = 3x - 4.$$

41.6.° Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{2x-13}{x-6} = \frac{x+6}{x};$$

$$2) \frac{3x^2 - 4x - 20}{x+2} = 2x - 5.$$

41.7.° Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4};$$

$$5) \frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2-6x} + \frac{x-12}{x^2+6x} = 0;$$

$$2) \frac{x-1}{x+3} + \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+18}{x^2-9};$$

$$6) \frac{x}{x+7} + \frac{x+7}{x-7} = \frac{63-5x}{x^2-49};$$

$$3) \frac{1}{x} - \frac{10}{x^2-5x} = \frac{3-x}{x-5};$$

$$7) \frac{4}{x^2-10x+25} - \frac{1}{x+5} = \frac{10}{x^2-25}.$$

$$4) \frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{1}{x};$$

41.8.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{16}{x^2-4};$$

$$3) \frac{3x}{x^2-10x+25} - \frac{x-3}{x^2-5x} = \frac{1}{x};$$

$$2) \frac{2y+3}{2y+2} - \frac{y+1}{2y-2} + \frac{1}{y^2-1} = 0;$$

$$4) \frac{x-20}{x^2+10x} + \frac{10}{x^2-100} - \frac{5}{x^2-10x} = 0.$$

41.9.° При якому значенні змінної:

$$1) \text{сума дробів } \frac{24}{x-2} \text{ і } \frac{16}{x+2} \text{ дорівнює } 3;$$

$$2) \text{значення дробу } \frac{42}{x} \text{ на } \frac{1}{4} \text{ більше за значення дробу } \frac{36}{x+20}?$$

41.10.° При якому значенні змінної:

- 1) значення дробу $\frac{30}{x+3}$ на $\frac{1}{2}$ менше від значення дробу $\frac{30}{x}$;
 2) значення дробу $\frac{20}{x}$ на 9 більше за значення дробу $\frac{20}{x+18}$?

41.11.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{2x-10}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1}$; 3) $\frac{4x-6}{x+2} - \frac{x}{x+1} = \frac{14}{x^2+3x+2}$;
 2) $\frac{6}{x^2-4x+3} + \frac{5-2x}{x-1} = \frac{3}{x-3}$; 4) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{2}{x^2+5x+6}$.

41.12.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{3x+2}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+39}{x^3-8} = \frac{5}{x-2}$; 2) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{8}{x^2+2x-3}$.

41.13.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 4$;
 2) $\frac{x^2+4x+4}{x+4} - \frac{2x+6}{x+2} = \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{2x+9}{x+3}$;
 3) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} - \frac{x-5}{x+6}$.

41.14.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} = \frac{x+8}{x-2} + \frac{x-8}{x+2}$;
 2) $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-3}{x+3} - \frac{x-4}{x+4}$;
 3) $\frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

41.15.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2-8x+7}{x-a} = 0$; 3) $\frac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6} = 0$.
 2) $\frac{x-a}{x^2-8x+7} = 0$;

41.16.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x}{2a} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x-2a}{2(x-2)}$; 3) $\frac{1}{x+2} - \frac{2a-1}{x^2-2x+4} = \frac{6-4a}{x^3+8}$;
 2) $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2-a^2}$; 4) $\frac{x}{x+a} - \frac{a-2}{x-a} = \frac{4a-2a^2}{x^2-a^2}$;

$$5) \frac{2a^2 + x^2}{a^3 - x^3} - \frac{2x}{ax + a^2 + x^2} + \frac{1}{x - a} = 0.$$

41.17.** Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2};$$

$$3) \frac{x^2 - (2a+1)x + a + a^2}{x(x-2)} = 0;$$

$$2) \frac{x^2 + (3a+1)x + 2a + 2a^2}{(x-1)(x+2)} = 0;$$

$$4) \frac{(a-2)x}{a-1} - 1 = \frac{a+2}{a-1} - \frac{2x^2 + a+1}{(a-1)x}.$$

41.18.** При яких значеннях параметра a має єдиний корінь рівняння:

$$1) \frac{x^2 - ax + 5}{x-1} = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - (a+4)x + 3a + 3}{\sqrt{x-2}} = 0?$$

$$2) \frac{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2}{x^2 - 6x + 5} = 0;$$

41.19.** При яких значеннях параметра a має єдиний корінь рівняння:

$$1) \frac{x^2 - ax + 1}{x+3} = 0;$$

$$3) \frac{x^2 - ax + a - 1}{\sqrt{x+1}} = 0.$$

$$2) \frac{x^2 + (3-2a)x + 4a - 10}{x^2 - 4x + 3} = 0;$$

42. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Розв'язання. Нехай $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Підставивши в задане рівняння замість x^2 і x^4 відповідно t і t^2 , отримаємо квадратне рівняння зі змінною t :

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$. Оскільки $t = x^2$, то розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування сукупності:

$$\begin{cases} x^2 = 4, \\ x^2 = 9. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Відповідь можна записати двома способами: -2 ; 2 ; -3 ; 3 або ± 2 ; ± 3 . ▲

Означення. Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають **біквadratним рівнянням**.

Заміною $x^2 = t$ біквadratне рівняння зводиться до квадратного рівняння $at^2 + bt + c = 0$. Такий спосіб розв'язування рівнянь називають **методом заміни змінної**.

Метод заміни змінної можна використовувати для розв'язування не лише біквadratних рівнянь.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $(2x - 1)^4 + (2x - 1)^2 - 2 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну: $(2x - 1)^2 = t$. Тоді дане рівняння зводиться до квадратного рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0.$$

Звідси $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Тепер треба розв'язати таку сукупність:

$$\begin{cases} (2x-1)^2 = -2, \\ (2x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності коренів не має. Із другого рівняння отримуємо:

$$\begin{cases} 2x-1 = -1, \\ 2x-1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Відповідь: 0; 1. ▲

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $6x + 5\sqrt{x} + 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$. Отримуємо:

$$6t^2 + 5t + 1 = 0.$$

Звідси $t_1 = -\frac{1}{3}$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Отримуємо таку сукупність:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = -\frac{1}{3}, \\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Оскільки $\sqrt{x} \geq 0$, то ця сукупність розв'язків не має, а отже, і задане рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає. ▲

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-3x-6}{x} - \frac{8x}{x^2-3x-6} = -2$.

Розв'язання. Нехай $\frac{x^2-3x-6}{x} = t$. Тоді $\frac{8x}{x^2-3x-6} = \frac{8}{t}$. Отримуємо рівняння $t - \frac{8}{t} = -2$. Це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} t^2 + 2t - 8 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

Звідси $t_1 = -4$, $t_2 = 2$.

Тепер розв'язування заданого рівняння зводиться до розв'язування сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2-3x-6}{x} = -4, \\ \frac{x^2-3x-6}{x} = 2. \end{cases}$$

Розв'яжіть цю сукупність самостійно.

Відповідь: -3 ; -1 ; 2 ; 6 . ▲

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 9 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо це рівняння:

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 10x^2 - 15x + 5 + 4 = 0;$$

$$(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x - 1) + 4 = 0.$$

Нехай $2x^2 + 3x - 1 = t$. Тоді $t^2 - 5t + 4 = 0$.

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

Отже, $2x^2 + 3x - 1 = 1$ або $2x^2 + 3x - 1 = 4$.

Розв'язавши ці два квадратних рівняння, отримуємо відповідь.

Відповідь: -2 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1 . ▲

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 24$.

Розв'язання. Під час розв'язування рівнянь такого виду треба знайти «вигідний» спосіб групування множників. У цьому прикладі він буде таким: $((x - 1)(x + 2))(x(x + 1)) = 24$.

Маємо: $(x^2 + x - 2)(x^2 + x) = 24$. Зробимо заміну: $x^2 + x = t$. Тоді $t(t - 2) = 24$; $t^2 - 2t - 24 = 0$; $t_1 = -4$, $t_2 = 6$. Отримуємо:

$$\begin{cases} x^2 + x = -4, \\ x^2 + x = 6. \end{cases}$$

Відповідь: -3 ; 2 . ▲

У цьому прикладі ми використали заміну змінної, яка застосовна до рівнянь виду

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = f,$$

де $a + d = b + c$.

Це рівняння можна записати так:

$$(x^2 + (a + d)x + ad)(x^2 + (b + c)x + bc) = f$$

і далі зробити заміну $x^2 + (a + d)x = t$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0$.

Розв'язання. Виділимо в лівій частині рівняння квадрат двочлена:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 2 = 0;$$

$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0.$$

Зробивши заміну $x^2 - 4x = t$, отримуємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} t = 2, \\ t = -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4x = 2, \\ x^2 - 4x = -1. \end{cases}$$

Відповідь: $2 + \sqrt{6}$; $2 - \sqrt{6}$; $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$. ▲

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

Розв'язання. За допомогою перевірки легко переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, поділивши обидві частини даного рівняння на x^2 , перейдемо до рівносильного рівняння

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \cdot \frac{2x^2 + 5x + 1}{x} = 9.$$

$$\text{Звідси } \left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right) \left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9.$$

Зробимо заміну: $2x + \frac{1}{x} - 3 = t$. Тоді $t(t + 8) = 9$, звідки $t_1 = 1$,

$$t_2 = -9.$$

З урахуванням заміни отримуємо два рівняння:

$$1) \ 2x + \frac{1}{x} - 3 = 1;$$

$$2) \ 2x + \frac{1}{x} - 3 = -9.$$

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$. ▲

Розглянуте рівняння має вид $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + dx + c) = kx^2$.

Якщо $c \neq 0$, то воно рівносильне рівнянню $\left(ax + \frac{c}{x} + b\right)\left(ax + \frac{c}{x} + d\right) = k$,

для розв'язування якого можна скористатися заміною $ax + \frac{c}{x} = t$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

Розв'язання. Нехай $x + \frac{1}{x} = t$. Тоді $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$. Звідси

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2. \text{ Маємо:}$$

$$\begin{aligned} 7t - 2(t^2 - 2) &= 9; \\ 2t^2 - 7t + 5 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Отже, } x + \frac{1}{x} = 1 \text{ або } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Розв'яжіть ці рівняння самостійно.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2. ▲

Метод, за допомогою якого розв'язано це рівняння, застосовний до рівнянь виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$. У цьому рівнянні коефіцієнти одночленів ax^4 і a , bx^3 і bx рівні. Таке рівняння називають **зворотним рівнянням четвертого степеня**. Воно рівносильне рівнянню $ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$. Звідси

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Далі застосовуємо заміну $x + \frac{1}{x} = t$.

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що число 0 не є коренем даного рівняння. Тоді, розділивши обидві частини рівняння на x^2 , отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} &= 0; \\ x^2 + \frac{16}{x^2} - 3\left(x - \frac{4}{x}\right) - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Нехай $x - \frac{4}{x} = t$. Тоді $x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 + 8$. Звідси $t^2 + 8 - 3t - 8 = 0$;

$$t(t - 3) = 0; \begin{cases} t = 0, \\ t = 3. \end{cases} \text{ Далі маємо: } \begin{cases} x - \frac{4}{x} = 0, \\ x - \frac{4}{x} = 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: -2; 2; -1; 4.

Рівняння, розв'язане в прикладі 10, є рівнянням виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$. Його називають **узагальненим зворотним рівнянням четвертого степеня**. Воно зводиться до квадратного рівняння за допомогою заміни $x + \frac{k}{x} = t$.

ПРИКЛАД 11 Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 2x + 2)^2 + 3x(x^2 - 2x + 2) = 10x^2$.

Розв'язання. За допомогою перевірки можна переконатися, що число 0 не є коренем даного рівняння.

Отже, можна розділити обидві частини рівняння на x^2 . Отримаємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2} + \frac{3(x^2 - 2x + 2)}{x} = 10.$$

Заміна $\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = t$ приводить до квадратного рівняння

$$t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $2 - \sqrt{2}$; $2 + \sqrt{2}$; -1; -2. ▲

Якщо в розглянутому рівнянні зробити заміни $x^2 - 2x + 2 = u$, $x = v$, то отримаємо:

$$u^2 + 3uv - 10v^2 = 0.$$

Усі одночлени в лівій частині цього рівняння мають однаковий степінь, а його права частина дорівнює нулю. Таке рівняння називають **однорідним рівнянням другого степеня** відносно u і v .

Для його розв'язування спочатку треба перевірити, які розв'язки рівняння $v = 0$ є коренями заданого рівняння.

При $v \neq 0$ задане рівняння рівносильне такому:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 3\frac{u}{v} - 10 = 0.$$

Далі заміна $\frac{u}{v} = t$ стає очевидною.

ПРИКЛАД 12 Розв'яжіть рівняння $(x + 1)^4 + (x + 5)^4 = 32$.

Розв'язання. Нехай $t = x - \frac{-1+(-5)}{2}$, тобто $x = t - 3$. Тоді $x + 1 = t - 2$, $x + 5 = t + 2$, а задане рівняння набуває такого вигляду:

$$(t - 2)^4 + (t + 2)^4 = 32.$$

Після піднесення до степеня і зведення подібних доданків отримуємо рівняння $t^4 + 24t^2 = 0$. Звідси $t = 0$, а отже, $x = -3$.

Відповідь: -3 . ▲

У рівнянні виду $(x - a)^4 + (x - b)^4 = c$ заміна $t = x - \frac{a+b}{2}$ завжди приводить до бікватратного рівняння відносно t .

ПРИКЛАД 13 Розв'яжіть рівняння $\frac{2x}{x^2 - 4x + 2} + \frac{3x}{x^2 + x + 2} = -\frac{5}{4}$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем даного рівняння, то, поділивши чисельник і знаменник кожного з дробів лівої частини рівняння на x , отримуємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\frac{2}{x - 4 + \frac{2}{x}} + \frac{3}{x + 1 + \frac{2}{x}} = -\frac{5}{4}.$$

Зробимо заміну: $x + \frac{2}{x} = t$. Тоді $\frac{2}{t - 4} + \frac{3}{t + 1} + \frac{5}{4} = 0$; $\frac{t^2 + t - 12}{4(t - 4)(t + 1)} = 0$;

$$\begin{cases} t^2 + t - 12 = 0, \\ (t - 4)(t + 1) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} t = -4, \\ t = 3. \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x + \frac{2}{x} = -4, \\ x + \frac{2}{x} = 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 4x + 2 = 0, \\ x^2 - 3x + 2 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $-2 + \sqrt{2}$; $-2 - \sqrt{2}$; 1; 2. ▲

ПРИКЛАД 14 Розв'яжіть рівняння $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$.

Розв'язання. Виділимо квадрат різниці в лівій частині рівняння:

$$x^2 - \frac{18x^2}{x+9} + \frac{81x^2}{(x+9)^2} + \frac{18x^2}{x+9} = 40;$$

$$\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40;$$

$$\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} = 40.$$

Нехай $\frac{x^2}{x+9} = t$. Тоді $t^2 + 18t - 40 = 0$, звідки $t = -20$ або $t = 2$.

$$\text{Маємо: } \begin{cases} \frac{x^2}{x+9} = -20, \\ \frac{x^2}{x+9} = 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 20x + 180 = 0, \\ x^2 - 2x - 18 = 0. \end{cases}$$

Відповідь: $1 + \sqrt{19}$; $1 - \sqrt{19}$. ▲

Може виникнути запитання: чому під час розв'язування прикладів 1–14 ми не пробували спростити рівняння за допомогою тотожних перетворень?

Річ у тім, що, виконавши тотожні перетворення, ми стикнулися б із необхідністю розв'язувати рівняння виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (ви можете перекоонатися в цьому самостійно). При $a \neq 0$ таке рівняння називають **рівнянням четвертого степеня**, при $a = 0$ і $b \neq 0$ — **рівнянням третього степеня**. Окремим видом цього рівняння при $b = 0$ і $d = 0$ є біквадратне рівняння.

У загальному випадку для розв'язування рівнянь третього й четвертого степенів необхідно знати формули знаходження їхніх коренів. З історією відкриття цих формул ви можете ознайомитися в оповіданні після цього пункту.

ВПРАВИ

42.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

2) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;

3) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$;

4) $x^4 + 14x^2 - 32 = 0$;

5) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$;

6) $3x^4 + 8x^2 - 3 = 0$.

42.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$;

2) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$;

3) $x^4 - 2x^2 - 24 = 0$;

4) $x^4 + 3x^2 - 70 = 0$;

5) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;

6) $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

42.3.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 - 4 = 0$;
- 2) $(2x+1)^4 - 10(2x+1)^2 + 9 = 0$;
- 3) $(6x-7)^4 + 4(6x-7)^2 + 3 = 0$;
- 4) $(x-4)^4 + 2(x-4)^2 - 8 = 0$.

42.4.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(3x-1)^4 - 20(3x-1)^2 + 64 = 0$;
- 2) $(2x+3)^4 - 24(2x+3)^2 - 25 = 0$.

42.5.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$;
- 2) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;
- 3) $8\sqrt{x} + x + 7 = 0$;
- 4) $8x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$.

42.6.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$;
- 2) $x - 5\sqrt{x} - 50 = 0$;
- 3) $2x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

42.7.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

- 1) $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$;
- 2) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
- 3) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3$;
- 4) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 4) = -5$.

42.8.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

- 1) $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2 - \frac{6(2x-1)}{x} + 5 = 0$;
- 2) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{3x-1} = 3\frac{1}{3}$.

42.9.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x^2 - 6x)^2 + (x^2 - 6x) - 56 = 0$;
- 2) $(x^2 + 8x + 3)(x^2 + 8x + 5) = 63$;
- 3) $\frac{x^4}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} - 5 = 0$;
- 4) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{x-3}{x+4} = \frac{3}{2}$.

42.10.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$;
- 2) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6}$;
- 3) $\frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 4 + 2x + x^2$;
- 4) $\frac{3x^2 - 9x}{2} - \frac{12}{x^2 - 3x} = 3$;
- 5) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$.

42.11.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$;
- 2) $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2$;

$$3) \frac{3}{1+x+x^2} = 3-x-x^2;$$

$$4) \frac{x^2+x-3}{2} - \frac{3}{2x^2+2x-6} = 1;$$

$$5) \frac{6}{(x+1)(x+2)} + \frac{8}{(x-1)(x+4)} = 1.$$

42.12.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) (8x^2 - 3x + 1)^2 = 32x^2 - 12x + 1;$$

$$2) (x^2 - 5x + 7)(x - 2)(x - 3) = 2.$$

42.13.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2 + x + 1)^2 - 3x^2 - 3x - 1 = 0;$$

$$2) (x^2 - 5x)(x + 3)(x - 8) + 108 = 0.$$

42.14.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680;$$

$$2) x(x + 3)(x + 5)(x + 8) = 100.$$

42.15.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x - 4)(x + 2)(x + 8)(x + 14) = 1204;$$

$$2) (x + 3)(x + 1)(x + 5)(x + 7) = -16.$$

42.16.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 24x + 5 = 0;$$

$$2) x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0;$$

$$3) 10x^2(x - 2)^2 = 9(x^2 + (x - 2)^2).$$

42.17.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) (2x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 7x + 2) = -20x^2;$$

$$2) (x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2.$$

42.18.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4(x + 5)(x + 6)(x + 10)(x + 12) - 3x^2 = 0;$$

$$2) (x - 4)(x + 5)(x + 10)(x - 2) = 18x^2.$$

42.19.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47;$$

$$4) \frac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9};$$

$$2) 2\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{3}\right) = \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{18} + \frac{4}{3};$$

$$5) x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0.$$

$$3) 12x^2 + \frac{1}{3x^2} + 10\left(2x + \frac{1}{3x}\right) + 11 = 0;$$

42.20." Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 16$;

3) $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{625}{112}$;

2) $x^2 + \frac{36}{x^2} = \frac{112}{5} \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x} \right)$;

4) $4x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 4 = 0$.

42.21." Розв'яжіть рівняння:

1) $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$;

2) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$.

42.22." Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 + 5x^2(x + 1) = 6(x + 1)^2$;

2) $(x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 4(x - 1)^2$.

42.23." Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^4 + (x + 1)^4 = 16$;

2) $x^4 + (x - 1)^4 = 97$.

42.24." Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^4 + (x - 3)^4 = 1$;

2) $(x - 6)^4 + (x - 4)^4 = 82$.

42.25." Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$;

3) $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{7}{2}$.

2) $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$;

42.26." Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x}{x^2 + 1 - 4x} - \frac{2x}{x^2 + 1 + x} = \frac{8}{3}$;

3) $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 7x + 4} + \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + x + 4} + \frac{13}{3} = 0$.

2) $\frac{2x}{x^2 - 2x + 5} + \frac{3x}{x^2 + 2x + 5} = \frac{7}{8}$;

42.27." Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$;

3) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 90$;

2) $x^2 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2$;

4) $x^2 + \frac{25x^2}{(5+2x)^2} = 104$.

42.28." Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 3$;

3) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$.

2) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 = \frac{40}{9}$;

Таємна зброя Сципіона дель Ферро



Ви легко розв'яжете кожне з таких рівнянь третього степеня:

$$x^3 - 8 = 0, \quad x^3 + x^2 = 0, \quad x^3 - x = 0.$$

Усі вони є окремими видами рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c і d — параметри, причому $a \neq 0$. Вивести формулу його коренів — задача складна. Недарма появу цієї формули вважають видатним математичним відкриттям XVI століття.

Першим винайшов розв'язання рівняння виду $x^3 + px = q$, де p і q — додатні числа, італійський математик Сципіон дель Ферро (1465–1526). Знайдену формулу він зберігав у секреті. Це було зумовлено тим, що кар'єра вченого того часу багато в чому залежала від його виступів у публічних математичних турнірах. Тому було вигідно зберігати відкриття в таємниці, розраховуючи використати їх у математичних змаганнях як секретну зброю.

Після смерті дель Ферро його учень Фіоре, володіючи секретною формулою, викликав на математичний двобій талановитого математика-самоучку Нікколо Тарталья. За кілька днів до турніру Тарталья сам вивів формулу коренів рівняння третього степеня. Диспут, на якому Тарталья здобув переконливу перемогу, відбувся 20 лютого 1535 року.

Уперше секретну формулу було опубліковано в книзі відомого італійського вченого Джероламо Кардано «Велике мистецтво». У цій роботі також описано метод розв'язування рівняння четвертого степеня, відкритий Лодовіко Феррарі (1522–1565).



**Нікколо
Тарталья**
(1499–1557)



**Джероламо
Кардано**
(1501–1576)



**Нільс Хенрік
Абель**
(1802–1829)

У XVII–XVIII ст. зусилля багатьох провідних математиків зосередилися на пошуку формули для розв’язання рівнянь п’ятого степеня. Отриманню результату сприяли роботи італійського математика Паоло Руффіні (1765–1822) та норвезького математика Нільса Хенріка Абеля. Сам результат виявився цілком несподіваним: було доведено, що не існує формули, за допомогою якої можна виразити корені будь-якого рівняння п’ятого або вищого степеня через коефіцієнти рівняння, використовуючи лише чотири арифметичні дії та дію добування кореня.

43. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій

У п. 20 ви вже ознайомилися із задачами, у яких раціональні рівняння слугували математичними моделями реальних ситуацій. Тепер, коли ви навчилися розв’язувати квадратні рівняння, можна істотно розширити коло задач, які розглядаються.

ПРИКЛАД 1 Із пункту А виїхав велосипедист, а через 45 хв після цього в тому самому напрямку виїхала вантажівка, яка наздогнала велосипедиста на відстані 15 км від пункту А. Знайдіть швидкість велосипедиста та швидкість вантажівки, якщо швидкість вантажівки на 18 км/год більша за швидкість велосипедиста.

Розв’язання. Нехай швидкість велосипедиста дорівнює x км/год, тоді швидкість вантажівки становить $(x + 18)$ км/год. Велосипедист проїжджає 15 км за $\frac{15}{x}$ год, а вантажівка — за $\frac{15}{x+18}$ год. Різниця

$\frac{15}{x} - \frac{15}{x+18}$ показує, на скільки годин вантажівка проїжджає 15 км швидше, ніж велосипедист. Оскільки вантажівка проїхала 15 км на 45 хв, тобто на $\frac{3}{4}$ год, швидше, ніж велосипедист, то отримуємо

$$\text{рівняння } \frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} = \frac{3}{4}.$$

Розв’яжемо це рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{15}{x} - \frac{15}{x+18} &= \frac{3}{4}; \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{x+18} &= \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$\frac{20x + 360 - 20x - x^2 - 18x}{4x(x+18)} = 0;$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 360 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

Розв'язавши квадратне рівняння системи, отримаємо $x = 12$ або $x = -30$.

Корінь -30 не задовольняє умову задачі.

Отже, швидкість велосипедиста дорівнює 12 км/год, а швидкість вантажівки становить: $12 + 18 = 30$ (км/год).

Відповідь: 12 км/год, 30 км/год. ▲

ПРИКЛАД 2 Одна бригада працювала на ремонті дороги 7 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 2 год їхньої спільної роботи ремонт було закінчено. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій для цього потрібно на 4 год більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай перша бригада може самостійно відремонтувати дорогу за x год, тоді другій для цього потрібно $(x - 4)$ год.

За 1 год перша бригада ремонтує $\frac{1}{x}$ частину дороги, а друга — $\frac{1}{x-4}$ частину дороги. Перша бригада працювала 9 год і відремонтувала $\frac{9}{x}$ дороги, а друга бригада працювала 2 год і відремонтувала від-

повідно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Оскільки в результаті було відремонтовано

всю дорогу, то можна скласти рівняння $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Отримане рівняння має два корені $x_1 = 12$ і $x_2 = 3$ (переконайтеся в цьому самостійно). Другий корінь не задовольняє умову задачі, оскільки тоді друга бригада мала б відремонтувати дорогу за $3 - 4 = -1$ (год), що не має змісту.

Отже, перша бригада може відремонтувати дорогу за 12 год, а друга — за 8 год.

Відповідь: 12 год, 8 год. ▲

ПРИКЛАД 3 Водний розчин солі містив 120 г води. Після того як до розчину додали 10 г солі, її концентрація збільшилася на 5 %. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

Розв'язання. Нехай початковий розчин містив x г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x + 120)$ г, а концентрація солі становила $\frac{x}{x+120}$. Після того як до розчину додали 10 г солі, її маса в розчині склала $(x + 10)$ г, а маса розчину — $(x + 130)$ г. Тепер концентрація солі становить $\frac{x+10}{x+130}$, що на 5 %, тобто на $\frac{1}{20}$, більше, ніж $\frac{x}{x+120}$. Звідси можна записати: $\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}$.

Отримане рівняння має два корені: $x_1 = 30$ і $x_2 = -280$ (переконайтеся в цьому самостійно), з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 30 г солі.

Відповідь: 30 г. ▲

ВПРАВИ

- 43.1.*** Перші 150 км дороги з міста A до міста B автомобіль проїхав з певною швидкістю, а решту 240 км — зі швидкістю на 5 км/год більшою. Знайдіть початкову швидкість автомобіля, якщо на весь шлях із міста A до міста B він витратив 5 год.
- 43.2.*** Перший мотоцикліст проїжджає 90 км на 18 хв швидше за другого, оскільки його швидкість на 10 км/год більша за швидкість другого мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста.
- 43.3.*** З одного міста в друге, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус рухався зі швидкістю на 20 км/год меншою, ніж автомобіль, і прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість автобуса.
- 43.4.*** Поїзд запізнювався на 10 хв. Щоби прибути на станцію призначення вчасно, він за 80 км від цієї станції збільшив швидкість на 16 км/год. Знайдіть початкову швидкість поїзда.
- 43.5.*** Із села Вишневе в село Яблуневе, відстань між якими дорівнює 15 км, вершник проскакав з певною швидкістю. Повертався він зі швидкістю на 3 км/год більшою і витратив на зворотний шлях на 15 хв менше, ніж на шлях із Вишневого до Яблунєвого. Знайдіть початкову швидкість вершника.

- 43.6.* Оператор комп'ютерного набору мав за деякий час набрати 180 сторінок тексту. Проте він виконав цю роботу на 5 год раніше строку, оскільки набирав щогодини на 3 сторінки більше, ніж планував. Скільки сторінок він набирав щогодини?
- 43.7.* Перший насос перекачує 90 м^3 води на 1 год швидше, ніж другий перекачує 100 м^3 . Скільки кубічних метрів води щогодини перекачує кожен насос, якщо перший перекачує за годину на 5 м^3 води більше, ніж другий?
- 43.8.* Робітник мав за певний час виготовити 72 деталі. Проте щодня він виготовляв на 4 деталі більше, ніж планував, і закінчив роботу на 3 дні раніше строку. За скільки днів він виконав роботу?
- 43.9.* Катер пройшов 16 км за течією річки та 30 км проти течії, витративши на весь шлях 1 год 30 хв. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 1 км/год.
- 43.10.* Човен проплив 15 км за течією річки й повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть швидкість човна за течією річки, якщо швидкість течії становить 2 км/год.
- 43.11.* За течією річки від пристані відплив пліт. Через 4 год від цієї пристані в тому самому напрямку відчалив човен, який наздогнав пліт на відстані 15 км від пристані. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість човна становить 12 км/год.
- 43.12.* Катер пройшов 45 км за течією річки та 28 км проти течії, витративши на весь шлях 4 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера становить 18 км/год.
- 43.13.* Турист проплив $\frac{5}{8}$ усього шляху на катері, а решту проїхав на автомобілі. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість катера. Автомобілем він їхав на 1 год 30 хв менше, ніж плів катером. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість катера, якщо всього турист подолав 160 км.
- 43.14.* Міжміський автобус мав проїхати 72 км. Після того як він проїхав 24 км, його затримали біля залізничного переїзду на 12 хв. Потім він збільшив швидкість на 12 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість автобуса.
- 43.15.* Група школярів виїхала на екскурсію з міста А до міста В автобусом, а повернулася до міста А залізницею, витративши

на зворотний шлях на 30 хв більше, ніж на шлях до міста B . Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 20 км/год менша, ніж швидкість автобуса, довжина шосе між містами A і B становить 160 км, а довжина залізничної колії — 150 км.

43.16.* Турист проплив на байдарці 4 км по озеру і 5 км за течією річки за той самий час, за який він проплив би 6 км проти течії. З якою швидкістю турист плив по озеру, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год?

43.17.* Теплохід пройшов 16 км по озеру, а потім 18 км по річці, яка бере початок із цього озера, за 1 год. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год.

43.18.* Знаменник звичайного дробу на 3 більший за його чисельник. Якщо чисельник цього дробу збільшити на 4, а знаменник — на 8, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{6}$ більший за даний.

Знайдіть даний дріб.

43.19.* Чисельник звичайного дробу на 5 менший від його знаменника. Якщо чисельник цього дробу зменшити на 3, а знаменник збільшити на 4, то отриманий дріб буде на $\frac{1}{3}$ менший від даного.

Знайдіть даний дріб.

43.20.* Два робітники, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 20 днів. За скільки днів може виконати це завдання кожен із них, працюючи самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 днів більше, ніж другому?

43.21.* Одному маляру потрібно на 5 год більше, ніж другому, щоби пофарбувати фасад будинку. Коли перший маляр пропрацював 3 год, а потім його змінив другий, який пропрацював 2 год, то виявилось, що пофарбовано 40 % площі фасаду. За який час може пофарбувати фасад кожний маляр, працюючи самостійно?

43.22.* Першого дня тракторист орав поле 6 год. Другого дня до нього приєднався другий тракторист, і через 8 год спільної роботи вони закінчили оранку. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи самостійно, якщо першому для цього потрібно на 3 год менше, ніж другому?

43.23.* До розчину, який містив 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація солі зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

- 43.24.*** Зливкок сплаву міді та цинку, який містив 10 кг цинку, сплавили з 10 кг міді. Відсотковий вміст міді в одержаному сплаві виявився на 5 % більшим, ніж у початковому. Скільки кілограмів міді містив початковий зливкок сплаву?
- 43.25.**** Через 2 год 40 хв після відправлення плота від пристані А за течією річки назустріч йому від пристані В відійшов катер. Знайдіть швидкість течії річки, якщо пліт і катер зустрілися на відстані 14 км від пристані А, швидкість катера в стоячій воді дорівнює 12 км/год, а відстань між пристанями А і В становить 32 км.
- 43.26.**** До басейну підведено дві труби. Через одну трубу воду наливають у басейн, а через другу зливають, причому для зливу води потрібно на 1 год більше, ніж для наповнення басейну. Якщо ж відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться водою за 30 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн водою через першу трубу?
- 43.27.**** Для наповнення басейну через першу трубу потрібно стільки ж часу, як і для наповнення через другу й третю труби одночасно. Через першу трубу басейн наповнюється на 2 год швидше, ніж через другу, і на 8 год швидше, ніж через третю. Скільки часу потрібно для наповнення басейну через кожную трубу?
- 43.28.**** Автобус мав проїхати відстань між двома містами, яка дорівнює 400 км, з деякою швидкістю. Проїхавши 2 год із запланованою швидкістю, він зупинився на 20 хв і, щоби прибути в пункт призначення вчасно, збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?
- 43.29.**** Робітник за певний час мав виготовити 360 деталей. Перші 5 днів він щоденно виготовляв заплановану кількість деталей, а потім щодня виготовляв на 4 деталі більше, і вже за день до строку виготовив 372 деталі. Скільки деталей щодня мав виготовляти робітник за планом?
- 43.30.**** Щоб виконати певне виробниче завдання, першому робітникові потрібно на 12 год менше, ніж другому, і на 4 год більше, ніж обом робітникам для спільного виконання завдання. За скільки годин може виконати це завдання перший робітник?

44. Ділення многочленів

Ви вмієте додавати, віднімати та множити многочлени. У цьому пункті ми домовимося про дію ділення многочленів.

Ви знаєте, що ціле число a ділиться націло на ціле число b ($b \neq 0$), якщо існує таке ціле число c , що $a = bc$. Ґрунтуючись на цих міркуваннях, прийнемо таке означення.

Означення. Говорять, що многочлен $A(x)$ **ділиться націло** на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.

Многочлен $A(x)$ називають **діленим**, многочлен $B(x)$ — **дільником**, многочлен $Q(x)$ — **часткою**.

Якщо многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, то це позначають так: $A(x) : B(x)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Многочлен $x^3 + 1$ ділиться націло на многочлен $x + 1$. Справді, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Тут роль частки виконує многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ділиться націло на многочлен $2x^2 - x + 1$. Справді, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення куточком аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 1 & x + 1 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} & x^2 - x + 1 \\
 -x^2 + 1 & \\
 \underline{-(x^2 - x)} & x + 1 \\
 x + 1 & \\
 \underline{-(x + 1)} & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x & 2x^2 - x + 1 \\
 \underline{-(6x^4 - 3x^3 + 3x^2)} & 3x^2 - x \\
 -2x^3 + x^2 - x & \\
 \underline{-(-2x^3 + x^2 - x)} & 0
 \end{array}$$

Якщо $A(x) : B(x)$, тобто $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, і многочлен $A(x)$ ненульовий, то степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$. Тому для ділення націло многочленів необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця умова не є достатньою. Так, многочлен $x^3 + 1$ не ділиться націло на многочлен $x - 1$. Справді, якби існував многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконувалася рівність

$x^3 + 1 = (x - 1) Q(x)$, то при $x = 1$ отримали б неправильну рівність $1^3 + 1 = 0$.

Якщо одне ціле число не ділиться націло на друге, то можна розглядати ділення з остачею. Введемо поняття ділення многочленів з остачею.

Теорема 44.1. Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де ступінь многочлена $R(x)$ менший від ступеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен.

У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають **неповною часткою**, а многочлен $R(x)$ — **остачею**.

Ви зможете довести цю теорему на заняттях математичного гуртка.

Розглянемо многочлени $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ і $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Знайдемо для цих многочленів неповну частку й остачу. Це можна зробити за допомогою ділення куточком:

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 3x + 2 \\ \underline{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} & 2x^2 + 5x + 12 \quad (\text{неповна частка}) \\ 5x^3 - 3x^2 - 1 & \\ \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x} & \\ 12x^2 - 10x - 1 & \\ \underline{12x^2 - 36x + 24} & \\ 26x - 25 & (\text{остача}) \end{array}$$

Тепер можна записати:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \quad (1)$$

Розглянемо раціональний дріб $\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$. За допомогою

рівності (1) можна записати:

$$\frac{2x^4 - x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 5x + 12 + \frac{26x - 25}{x^2 - 3x + 2}.$$

Права частина цієї рівності є сумою многочлена та дробу. У чисельнику дробу записано многочлен, ступінь якого менший від ступеня многочлена, який записано в знаменнику. Такий дріб називають **правильним**. Подання раціонального дробу у вигляді суми многочлена та правильного дробу називають **виділенням цілої частини з раціонального дробу**.



1. У якому випадку говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$?
2. Яка необхідна умова ділення многочленів націло?
3. Сформулюйте теорему про ділення многочленів з остачею.
4. Як називають многочлени $Q(x)$ і $R(x)$ у записі
$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$
якщо степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$?
5. Подання в якому вигляді раціонального дробу називають виділенням цілої частини з раціонального дробу?

ВПРАВИ

44.1.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = x^2 - 7x + 6$, $B(x) = x - 6$;
- 2) $A(x) = x^4 - 1$, $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$;
- 3) $A(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3x - 1$, $B(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

44.2.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = x^3 - 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
- 2) $A(x) = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1$, $B(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
- 3) $A(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^2 - x + 1$.

44.3.° Поділивши куточком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

- 1) $A(x) = 2x^5 + 5x^3 + 6x - 7$, $B(x) = x^3 + x$;
- 2) $A(x) = x^4 + x + 1$, $B(x) = x^2 + x + 1$;
- 3) $A(x) = x^4 + x^2 + 1$, $B(x) = x + 5$.

44.4.° Поділивши куточком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

- 1) $A(x) = x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$, $B(x) = x^2 - x + 1$;
- 2) $A(x) = x^7 - 1$, $B(x) = x^3 + x + 1$;
- 3) $A(x) = x^3 + 5x^2 - 6x - 6$, $B(x) = x - 2$.

44.5.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ не ділиться націло на многочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = x^2 + 1$, $B(x) = x - 1$;
- 2) $A(x) = x^3 + x - 1$, $B(x) = x + 1$;
- 3) $A(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 1$, $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

44.6.° Доведіть, що $(x^n - a^n) : (x^k - a^k)$, якщо $n : k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

44.7.* Виділіть цілу частину з раціонального дробу:

$$1) \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 1}; \quad 3) \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + x - 2}.$$

$$2) \frac{2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

44.8.* Виділіть цілу частину з раціонального дробу:

$$1) \frac{2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^2 - x}; \quad 3) \frac{x^5 - 3x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 1}.$$

$$2) \frac{5x^4 - 3x^5 + 3x - 1}{x + 1 - x^2};$$

45. Корені многочлена. Теорема Безу

Означення. Число α називають **коренем многочлена** $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Зрозуміло, що корінь многочлена $A(x)$ — це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Легко знайти множину коренів рівняння

$$(3x - 7)(5x + 1)(2x - 9)(x + 1) = 0.$$

Проте, якщо ліву частину рівняння подати у вигляді многочлена $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63$, то задача пошуку його коренів стає непростою.

Тому для розв'язування рівнянь виду $A(x) = 0$, де $A(x)$ — многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати многочлен у вигляді добутку $A(x) = (x - \alpha)B(x)$, де $B(x)$ — деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $A(x)$.

Цьому значною мірою сприятиме така теорема.

Теорема 45.1 (теорема Безу). *Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.*

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - \alpha$) дорівнює 1, то степінь остачі має дорівнювати нулю або остача має бути нульовим многочленом, тобто шукана остача — це деяке число r . Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$A(x) = (x - \alpha)Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = \alpha$, отримаємо:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r.$$

Звідси $A(\alpha) = r$. ▲

Теорема 45.2. Для того щоб число α було коренем многочлена $A(x)$, необхідно і достатньо, щоб многочлен $A(x)$ ділився націло на двочлен $x - \alpha$.

Доведення. Нехай $A(\alpha) = 0$. Доведемо, що $A(x) : (x - \alpha)$.

За теоремою Безу $A(\alpha)$ є остачею від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$. Проте $A(\alpha) = 0$, отже, $A(x) : (x - \alpha)$.

Нехай тепер $A(x) : (x - \alpha)$. Доведемо, що $A(\alpha) = 0$.

Оскільки $A(x) : (x - \alpha)$, то остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює 0, тобто $A(\alpha) = 0$. ▲

Наслідок 1. Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

Доведення. Якщо α_1 — корінь многочлена $A(x)$, то за теоремою 45.2 маємо: $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x)$. Покладемо в цій рівності $x = \alpha_2$. Отримаємо: $(\alpha_2 - \alpha_1) Q_1(\alpha_2) = 0$. Отже, α_2 — корінь многочлена $Q_1(x)$. Тоді за теоремою 45.2 маємо: $Q_1(x) = (x - \alpha_2) Q_2(x)$. Отримуємо: $A(x) = (x - \alpha_1) Q_1(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) Q_2(x)$.

Застосовуючи аналогічні перетворення для коренів $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$, отримаємо: $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$. ▲

Наслідок 2. Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.

Доведення. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — корені многочлена $A(x)$, степінь якого дорівнює n . Тоді згідно з наслідком 1 можна записати:

$$A(x) : (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{n+1}) \cdot Q(x).$$

Проте ця рівність неможлива, оскільки в лівій частині записано многочлен степеня n , а в правій — вираз, який тотожно дорівнює многочлену, степінь якого більший за n . ▲



Етьєн Безу □
(1730–1783)

Французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

Наслідок 3. Якщо множина коренів многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що вираз $A(x) = (x-2)^{100} + (x-1)^{50} - 1$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 - 3x + 2$.

Розв'язання. Маємо: $B(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Оскільки $A(1) = A(2) = 0$, то за теоремою 45.2 многочлен $A(x)$ ділиться націло на $(x-1)(x-2)$, тобто ділиться націло на многочлен $x^2 - 3x + 2$. ▲

ПРИКЛАД 2 Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x-2$ і $x-3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $x^2 - 5x + 6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більший за 1. Тому остача — це многочлен виду $ax + b$.

Маємо: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + ax + b$;

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b.$$

Підставимо по черзі в цю рівність $x=2$ і $x=3$. Отримуємо:

$$P(2) = 2a + b, \quad P(3) = 3a + b.$$

Застосовуючи теорему Безу, маємо: $P(2) = 5$ і $P(3) = 7$. Тоді отримуємо систему
$$\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$$

Звідси $a = 2$, $b = 1$. Тоді шуканою остачею є многочлен $2x + 1$.

Відповідь: $2x + 1$. ▲

ПРИКЛАД 3 При яких натуральних n многочлен $f(x) = x^n + a^n$ ділиться націло на двочлен $x + a$?

Розв'язання. Маємо: $x + a = x - (-a)$. З'ясуємо, при яких натуральних n виконується рівність $f(-a) = 0$, тобто $(-a)^n + a^n = 0$. Очевидно, ця рівність виконується тільки при всіх непарних n . ▲

ПРИКЛАД 4 Доведіть тотожність

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1 = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$. Зазначимо, що вираз $f(x)$, записаний в лівій частині рівності, яку треба довести, тотожно дорівнює многочлену, степінь якого не більший за 2.

Легко перевірити, що $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Отримуємо, що многочлен степеня, не вищого за 2, має три різних корені. Отже, цей многочлен тотожно дорівнює нулю. ▲



1. Що називають коренем многочлена?
2. Сформулюйте теорему Безу.
3. Сформулюйте необхідну і достатню умови для того, щоб число α було коренем многочлена $A(x)$.
4. Яку найбільшу кількість елементів може містити множина коренів многочлена n -го степеня?
5. Що можна сказати про многочлен степеня n , якщо множина його коренів містить більше ніж n елементів?

ВПРАВИ

45.1.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$, $B(x) = x - 1$;
- 2) $A(x) = 2x^4 - 4x^3 - x - 1$, $B(x) = x + 2$.

45.2.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = 2x^3 - 7x^2 + x + 3$, $B(x) = x - 4$;
- 2) $A(x) = 6x^4 - 5x^3 - 53x^2 + 45x - 9$, $B(x) = x + 1$.

45.3.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;
- 2) $A(x) = 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, $B(x) = x - 2$;
- 3) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$;
- 4) $A(x) = x^6 - 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x - 3$, $B(x) = x - 3$.

45.4.° Доведіть, що вираз $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ ділиться націло на вираз $x(x + 1)(2x + 1)$, де $n \in \mathbb{N}$.

45.5.° Доведіть, що вираз $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$ ділиться націло на многочлен $x^2 - x$, де $n \in \mathbb{N}$.

45.6.° Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

- 1) $A(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$, $B(x) = x^2 - x - 2$;
- 2) $A(x) = x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42$, $B(x) = x^2 + x - 2$;
- 3) $A(x) = x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 18x^2 - 27x + 27$, $B(x) = x^2 - 4x + 3$.

45.7.° При якому значенні параметра a остача від ділення многочлена:

- 1) $x^4 + ax^3 - 2x^2 + x - 1$ на двочлен $x - 1$ дорівнює 5;
- 2) $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3?

45.8.* При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$?

45.9.* При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$:

1) $A(x) = 2x^3 - x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 1$;

2) $A(x) = 6x^4 - x^3 + ax^2 + bx + 4$, $B(x) = x^2 - 4$?

45.10.* При яких значеннях параметрів a і b многочлен $A(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10$ ділиться націло на многочлен $B(x) = x^2 + x - 2$?

45.11.* При яких значеннях параметрів a , b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?

45.12.* При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при діленні на $x - 2$ дає в остачі 15, а при діленні на $x + 1$ дає в остачі 0?

45.13.* Остачі від ділення многочлена $A(x)$ на двочлени $x - 3$ і $x - 1$ відповідно дорівнюють 6 і 4. Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на многочлен $x^2 - 4x + 3$.

45.14.** Доведіть, що вираз $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ділиться націло на вираз $(a - b)(b - c)(c - a)$.

45.15.** Доведіть, що:

1) вираз $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ ділиться націло на вираз $a + b$;

2) вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$.

45.16.** Доведіть тотожність:

1) $a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$;

2) $a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$.

45.17.* Числа 1 і 5 є коренями многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 2010$, де $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ — цілі числа. Чи існує таке ціле число x_0 , що $P(x_0) = 1000$?

46. Ціле раціональне рівняння

Означення. Рівняння виду $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — параметри, називають **цілим раціональним рівнянням**.

Число a_0 називають **вільним членом** цього рівняння.

Теорема 46.1. *Якщо ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.*

Доведення. Нехай x_0 — цілий корінь рівняння

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — цілі числа. Тоді виконується рівність

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Звідси $a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1} x_0^{n-1} - \dots - a_1 x_0$;

$$a_0 = x_0 (-a_n x_0^{n-1} - a_{n-1} x_0^{n-2} - \dots - a_1).$$

Отже, ціле число a_0 дорівнює добутку двох цілих чисел, одне з яких дорівнює x_0 . Тоді $a_0 : x_0$. ▲

Зауваження. З доведеної теореми не випливає, що дільник вільного члена цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами обов'язково є коренем рівняння. У теоремі йдеться лише про те, що цілі корені цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами треба шукати серед дільників вільного члена.



Рис. 46.1

Іншими словами, для того щоб ціле число було коренем цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами, необхідно, щоб воно було дільником вільного члена (рис. 46.1). Однак ця умова не є достатньою.

Наприклад, числа -2 і 2 є дільниками вільного члена рівняння $3x^2 - 5x - 2 = 0$. Проте тільки одне з них є коренем рівняння.

Також зазначимо, що теорема 46.1 допомагає розв'язувати ті цілі раціональні рівняння із цілими коефіцієнтами, які мають цілі корені. Переконаємося в цьому на такому прикладі.

ПРИКЛАД Розв'яжіть рівняння

$$2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0.$$

Розв'язання. Щоб перевірити наявність цілих коренів у цього рівняння, випишемо всі дільники його вільного члена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Отже, многочлен $f(x)$, який стоїть у лівій частині рівняння, ділиться націло на двочлен $x + 1$, тобто $f(x) = (x + 1)g(x)$.

Многочлен $g(x)$ можна знайти, виконавши ділення куточком многочлена $f(x)$ на двочлен $x + 1$. Проте існує ще інший спосіб.

Оскільки $f(x) = (x + 1)g(x)$, то многочлен $f(x)$ можна записати в такому вигляді, щоб можна було винести за дужки спільний множник $x + 1$. Подамо многочлен $f(x)$ у вигляді суми двочленів, кожний з яких ділиться на $x + 1$. Маємо:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 &= 2x^4 + \underbrace{2x^3 - 7x^3}_{=-5x^3} - \underbrace{7x^2 + 5x^2}_{=-2x^2} + \underbrace{5x - 6x}_{=-x} - 6 = \\ &= 2x^3(x + 1) - 7x^2(x + 1) + 5x(x + 1) - 6(x + 1) = \\ &= (x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 5x - 6). \end{aligned}$$

Отже, $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x - 6$.

З'ясуємо, чи має цілі корені рівняння $2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 0$. Випишемо дільники вільного члена: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.

Перевіркою встановлюємо, що число 3 є коренем цього рівняння. Тоді $g(x) = (x - 3)h(x)$. Знайдемо многочлен $h(x)$. Для цього подамо многочлен $g(x)$ у вигляді суми двочленів, кожний з яких ділиться націло на $x - 3$:

$$2x^3 - 7x^2 + 5x - 6 = 2x^3 - \underbrace{6x^2 - x^2}_{=-7x^2} + \underbrace{3x + 2x}_{=5x} - 6 =$$

$$= 2x^2(x - 3) - x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(2x^2 - x + 2).$$

Отже, $h(x) = 2x^2 - x + 2$.

Очевидно, що рівняння $h(x) = 0$ коренів не має. Таким чином, задане рівняння має два корені -1 і 3.

Відповідь: -1; 3. ▲



1. Яке рівняння називають цілим раціональним?
2. Яку властивість мають цілі корені цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами?
3. Яке співвідношення між множиною дільників вільного члена цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами та множиною його цілих коренів?

ВПРАВИ

46.1.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
- 2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
- 3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
- 4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$;
- 5) $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$;
- 6) $x^5 + 8x^4 + 24x^3 + 35x^2 + 28x + 12 = 0$.

46.2.* Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
- 2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
- 3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
- 4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$;
- 5) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$;
- 6) $3x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 9x + 10 = 0$.

46.3.** Доведіть, що коли ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь, то він є цілим числом.

46.4.** Доведіть, що коли ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

має раціональний корінь $x_0 = \frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ — нескоротний дріб, то

p — дільник вільного члена a_0 , q — дільник старшого коефіцієнта a_n .

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Деякі з них — продовження та розвиток вправ цього підручника (такі вправи в тексті підручника помічено значком «», а тут указано номер відповідної вправи).

Завдання, які потребують використати калькулятор, виконуйте за допомогою мікрокалькулятора або стандартної програми «калькулятор», що є на вашому комп'ютері.

Тим, хто цікавиться інформатикою, пропонуємо завдання на складання алгоритмів і програм, у яких можна використати отримані математичні знання. Ці завдання помічено зірочкою. Поки ви не опанували на потрібному рівні яку-небудь мову програмування, достатньо придумати алгоритм і записати його словами або у вигляді блок-схеми. Зауважимо, що вміння складати алгоритми (послідовності дій) стане вам у пригоді не лише в програмуванні, а й в інших галузях діяльності.

Крім того, існує багато програм, створених спеціально для школярів та школярок і призначених для того, щоб допомогти опанувати математику. Ви зможете знайти їх на просторах Інтернету.

А може, ви й самі придумаєте корисні програми для вивчення математики?

До п. 2 «Функція. Графік функції. Лінійна функція»

2.3, 2.4. Складіть алгоритм для розв'язування цієї задачі. У якому вигляді зручно подати задане число?

2.16. Складіть шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Зробіть так, щоб значення функції для заданого значення аргументу обчислювалось автоматично.

Понад 70 років у нашій державі діє Мала академія наук України (МАН), у наукових відділеннях і численних секціях якої учні та учениці можуть проводити дослідницьку та практичну роботу за найрізноманітнішими напрямками. Ви можете брати участь у роботі її секцій та позашкільному навчанні, турнірах і конкурсах фахової майстерності, всеукраїнських учнівських олімпіадах з базових і спеціальних дисциплін, представляти свої роботи на Всеукраїнському конкурсі-захисті науково-дослідницьких робіт учнів і учениць — членів МАН.

До п. 4 «Множина та її елементи»

Знайдіть за допомогою Інтернету які-небудь цікаві факти та опишіть їх, використовуючи слова «множина», «елемент множини», «порожня множина». Задайте яку-небудь із розглянутих множин переліком елементів і заданням характеристичної властивості.

За допомогою якої структури даних у програмуванні зручно задавати числову множину?

4.7. Нехай дано числову множину та деяке число. Запишіть алгоритм, який визначає, чи є дане число елементом даної множини.

4.14. Нехай дано дві числові множини. Запишіть алгоритм, який визначає, чи є дані множини рівними.

До п. 5 «Підмножина. Операції над множинами»

Задайте яке-небудь сполучення слів і виконайте пошук в Інтернеті за цим сполученням. Виконайте пошук за кожним словом із цього сполучення окремо. Занотуйте кількість вибраних результатів. Опишіть характеристичні властивості множин, отриманих у результаті кожного пошуку. Опишіть у термінах операцій над множинами, як співвідносяться між собою результати пошуку в кожному з випадків. Зробіть висновки, наскільки важливо точно задавати умову пошуку.

5.5. Нехай дано дві числові множини. Запишіть алгоритм, який визначає, чи є: 1) друга множина підмножиною першої; 2) одна з множин власною підмножиною іншої.

5.19, 5.28. Нехай дано дві числові множини. Запишіть алгоритм, який формує множину, що є: 1) об'єднанням даних множин; 2) перерізом даних множин; 3) різницею першої та другої множин.

До п. 6 «Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність»

6.11, 6.13, 6.16, 6.17, 6.18, 6.20. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

До п. 7 «Нескінченні множини. Злічені множини»

Користуючись Інтернетом, ознайомтеся з двійковою системою числення. Які задачі цього пункту легко розв'язати, користуючись цією системою?

До п. 8 «Подільність націло та її властивості»

Чи можна стверджувати, що одне число ділиться націло на друге, виконавши ділення за допомогою калькулятора? Чому?

Які із задач цього пункту можна розв'язати методом перебору? Запишіть алгоритми для розв'язування кількох із цих задач.

До п. 9 «Ділення з остачею. Конгруенції та їхні властивості»

Запишіть алгоритм, вхідними даними для якого є два натуральних числа, а вихідними — неповна частка та остача при діленні першого числа на друге. Які окремі випадки потрібно розглянути? Як треба змінити цей алгоритм, якщо ділене є цілим числом?

Чи є у вибраній вами мові програмування операція, яка дає змогу знайти неповну частку й остачу при діленні двох натуральних чисел?

9.42, 9.43. Запишіть алгоритм для розв'язування цих задач методом перебору.

9.45, 9.46. Завдяки якій властивості ділення з остачею ці задачі можна розв'язати методом перебору? Запишіть алгоритм для розв'язування однієї з них.

До п. 10 «Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Взаємно прості числа»

Запишіть алгоритм для визначення того, чи є одне натуральне число дільником другого. Урахуйте, що ділення великих чисел може виконуватися неточно.

Запишіть алгоритми для визначення найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного двох чисел. Розгляньте два варіанти: з використанням тільки означення та з використанням теорем цього пункту.

Запишіть алгоритм, який визначає, чи є два числа взаємно простими.

10.18. Напишіть програму для розв'язування цієї задачі.

10.25. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору.

До п. 11 «Ознаки подільності»

Запишіть алгоритми, що реалізують ознаки подільності на 3, на 9, на 11. Число, що перевіряється, задано такими вхідними даними: кількість цифр у цьому числі та запис числа у вигляді послідовності цифр (масив або змінна типу «символьний рядок»).

Запишіть алгоритми, які реалізують ознаки подільності на 2^n , 5^n , 10^n , де n є вхідним даним.

11.9–11.18. Запишіть алгоритм для розв'язування однієї із цих задач методом перебору.

11.20*, 11.28.* Користуючись Інтернетом, ознайомтеся з поняттям рекурсії. Запишіть алгоритм для розв'язування цієї задачі методом перебору, використовуючи рекурсію.

До п. 12 «Прості та складені числа»

Запишіть алгоритм визначення того, чи є задане натуральне число простим.

Запишіть алгоритм для отримання канонічного розкладу натурального числа.

Напишіть програму для отримання перших n простих чисел. Оцініть часові характеристики її роботи. Яке максимальне натуральне число можна представити у вибраній вами мові програмування та які обмеження це накладає на можливості вашої програми?

Знайдіть у мережі Інтернет інформацію про прості числа, про історію складання таблиць простих чисел і про те, які результати досягнуто на поточний момент.

До п. 14 «Раціональні дробі»

Навчіться обчислювати значення дробового виразу за допомогою калькулятора. У яких випадках неможливо обчислити значення дробового виразу? Чи завжди можна отримати точне значення дробового виразу?

14.2–14.4. Виконайте які-небудь із цих завдань за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета.

До п. 15 «Основна властивість раціонального дробу»

15.27–15.29. Побудуйте графік якої-небудь із заданих функцій за допомогою графічного редактора. Який інструмент потрібен, щоби з графіка функції $y = x$ отримати графік функції $y = x - 2$?

До п. 16 «Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками»

16.7, 16.8. Виберіть який-небудь приклад із цих завдань. Знайдіть значення виразу двічі: спочатку без його перетворень, потім — попередньо спростивши його. Обчислення виконуйте за допомогою калькулятора або спеціалізованого математичного пакета. Наскільки зменшилася кількість дій після спрощення виразу? Чи можна після спрощення виконати обчислення усно?

До п. 18 «Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня»

18.18, 18.19. Виконайте які-небудь приклади із цих завдань за допомогою калькулятора. Який висновок можна зробити про обчислення з дробами, зроблені за допомогою комп'ютера?

До п. 21 «Раціональні рівняння з параметрами»

Зобразіть хід розв'язування якого-небудь рівняння з параметрами у вигляді блок-схеми.

До п. 22 «Степінь із цілим від'ємним показником»

Чи існує в калькуляторі та в інших програмах, якими ви користуєтеся для обчислень, спосіб подання числа в стандартному вигляді? Опануйте цей інструмент.

Ознайомтеся з різними типами даних, які пропонує вибрана вами мова програмування для подання дробових чисел. Як зберігаються ці дані в пам'яті комп'ютера? Як впливає спосіб зберігання на точність, з якою подаються ці дані?

22.34–22.36. Виконайте яке-небудь із цих завдань, створивши таблицю в табличному редакторі. Використайте засоби автоматичного сортування. Побудуйте на основі отриманої таблиці діаграму. Наскільки наочною вона виявилася? Чому?

До п. 23 «Властивості степеня із цілим показником»

23.1. Обчисліть значення якого-небудь виразу з прикладів 5–8 цього завдання, виконуючи дії за допомогою калькулятора в тому порядку, у якому їх записано в прикладі (без попереднього спрощення). Чи отримали ви той самий результат, що й під час розв'язування прикладу на папері? Чому результати можуть відрізнятися? Який висновок із цього можна зробити?

23.13, 23.14. Яким чином використання стандартного вигляду числа спрощує обчислення?

Дізнайтеся, у який спосіб у пам'яті комп'ютера подаються дані у форматі «з плаваючою крапкою»; за якими алгоритмами виконуються дії з такими числами; як цей спосіб подання даних впливає на точність обчислень.

До п. 24 «Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік»

24.4, 24.5. Заповніть шукану таблицю за допомогою табличного редактора. Побудуйте за допомогою засобів табличного редактора графік функції, яка є математичною моделлю задачі. Як треба вдосконалити таблицю, щоб отримати точніший графік?

До п. 25 «Числові нерівності та їхні властивості»

Знайдіть у мережі Інтернет правила дорожнього руху. Виберіть із дорожніх знаків ті, які задають гранично допустимі значення яких-небудь числових величин. Запишіть відповідні нерівності.

Зобразіть у графічному редакторі координатну пряму. Продемонструйте наочно, що менше число знаходиться на координатній прямій лівіше більшого.

Збережіть рисунок координатної прямої у файлі для використання в наступних вправах.

До п. 26 «Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу»

Яким чином наочно проілюструвати теореми про почленне додавання та множення нерівностей? оцінювання значення виразу? Створіть відповідні зображення у графічному редакторі.

До п. 28 «Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки»

Знайдіть у графічному редакторі інструменти, за допомогою яких зручно зображати числові проміжки на координатній прямій.

28.3. Завантажте в графічний редактор із файлу зображення координатної прямої, створене під час вивчення п. 25. Зобразіть на цій координатній прямій множину розв'язків яких-небудь строгої та нестрокої нерівностей цієї задачі.

До п. 29 «Системи та сукупності лінійних нерівностей з однією змінною»

Проілюструйте за допомогою графічного редактора процес розв'язування системи нерівностей; сукупності нерівностей (на прикладі будь-якого завдання цього пункту).

До п. 31 «Функція $y = x^2$ та її графік»

31.8–31.11. Виберіть яку-небудь функцію із цих завдань і побудуйте її графік двома способами. *Перший спосіб:* визначте, з яких геометричних фігур складається цей графік, і зобразіть ці фігури на координатній площині за допомогою графічного редактора. *Другий спосіб:* складіть таблицю, яка містить набір значень аргументу та відповідних їм значень функції, і побудуйте графік за цією таблицею за допомогою відповідних інструментів автоматичної побудови графіків, вибравши зовнішній вид графіка, у якому задані точки сполучаються відрізками. Який графік точніше зображає задану функцію? Як треба врахувати особливості цієї функції під час вибору множини значень аргументу для таблиці?

До п. 32 «Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь»

Навчіться добувати квадратний корінь за допомогою калькулятора та інших програм, якими ви користуєтеся для обчислень.

32.15. Виконайте завдання двома способами: 1) спростивши вираз на папері; 2) обчисливши його значення за допомогою калькулятора без попереднього спрощення. Зробіть висновки.

32.42. Виконайте завдання за допомогою графічного редактора. Освойте нові інструменти для зафарбовування частини площини.

До п. 33 «Множина дійсних чисел»

Для кожної із числових множин уведіть у калькуляторі кілька елементів цієї множини. Чи будь-яке раціональне число ви можете ввести з усіма його цифрами? Чи можна ввести ірраціональне число? Наскільки точно подає калькулятор ці числа? Зробіть висновок.

Як у калькуляторі можна задати число π ?

Придумайте вираз, у якому змінні будуть раціональними числами, які можна задати точно, а результатом буде дійсне або ірраціональне число, яке калькулятор відображає наближено. Обчисліть значення цього виразу за допомогою калькулятора.

Зробіть висновки: коли операції з дійсними числами можуть не давати очікуваного результату? Як у таких випадках потрібно домагатися бажаного результату?

Знайдіть за допомогою калькулятора наближене значення числа $\sqrt{5}$ з точністю до 0,01: 1) за нестачею; 2) за надлишком.

До п. 34 «Властивості арифметичного квадратного кореня»

34.21. Виконайте обчислення за допомогою калькулятора, не спрощуючи попередньо вираз. Який спосіб розв'язування виявився простішим — на папері або за допомогою калькулятора?

До п. 35 «Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені»

Обчисліть значення кількох виразів, наведених у задачах 35.17, 35.18, 35.31, за допомогою калькулятора без попереднього спрощення виразів. Чи буде отримано точний результат?

До п. 36 «Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік»

За допомогою табличного редактора побудуйте таблицю, яка містить набір значень аргументів і відповідних їм значень функції $y = \sqrt{x}$. Побудуйте графік за цією таблицею.

До п. 37 «Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь»

Запишіть алгоритм для розв'язування неповних квадратних рівнянь залежно від їхнього виду.

До п. 38 «Формула коренів квадратного рівняння»

Запишіть алгоритм, який за коефіцієнтами a , b і c рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ знаходить його корені. Які окремі випадки потрібно розглянути?

38.18, 38.19. Запишіть алгоритми для розв'язування цих задач методом перебору. Яка інформація в умовах цих задач дає змогу зробити висновки, що тут, на відміну від задач 38.22 і 38.23, можна застосувати метод перебору?

До п. 39 «Теорема Вієта»

Придумайте два числа, десятковий запис кожного з яких містить кілька цифр до та після коми. Використовуючи наслідок з теореми, оберненої до теореми Вієта, складіть квадратне рівняння, для якого дані числа є коренями. Для обчислень використайте калькулятор.

До п. 40 «Квадратний тричлен»

Запишіть алгоритм для розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

До п. 42 «Розв'язування рівнянь методом заміни змінної»

Запишіть алгоритм, який визначає, чи є рівняння бікватратним, зворотним рівнянням четвертого степеня, узагальненим зворотним рівнянням четвертого степеня, однорідним рівнянням другого степеня, і залежно від цього видає рекомендацію щодо способу його розв'язування.

Запишіть алгоритм для розв'язування бікватратних рівнянь. Можна використати як підпрограму алгоритм, який ви уклали для розв'язування квадратних рівнянь (див. завдання до п. 38).

До п. 43 «Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій»

Чи можна для різних задач цього пункту створити одну й ту саму математичну модель? Спробуйте знайти такі задачі та скласти спільний алгоритм для їхнього розв'язування.

До п. 44 «Ділення многочленів»

Запишіть алгоритм для ділення двох многочленів. Використайте спосіб подання многочленів і алгоритми, створені вами в 7 класі під час вивчення теми «Додавання і віднімання многочленів».

До п. 46 «Ціле раціональне рівняння»

Запишіть алгоритм для пошуку цілих коренів цілого раціонального рівняння із цілими коефіцієнтами.

Протягом навчального року в рубриці «Дружимо з комп'ютером» вам було запропоновано багато завдань для розв'язування методом перебору. Проаналізуйте ці завдання та зробіть висновок, чому англійською мовою метод перебору носить назву «*brute force*».

Відомості з курсу алгебри 7 класу

ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Тотожно рівні вирази. Тотожності

- ✓ Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, називають тотожно рівними.
- ✓ Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.
- ✓ Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають тотожним перетворенням.
- ✓ Для доведення тотожностей використовують такі прийоми (методи):
 - тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;
 - тотожно перетворюють кожную із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;
 - показують, що різниця лівої й правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.

2. Степінь з натуральним показником

- ✓ Степенем числа a з натуральним показником n , більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a .
- ✓ Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.
- ✓ Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

- ✓ Для будь-якого числа a , відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що $m > n$, справджується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

- ✓ Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

- ✓ Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

3. Одночлени

- ✓ Вирази, які є добутками чисел, змінних та їхніх степенів, називають одночленами.

- ✓ Одночлен, який містить тільки один відмінний від нуля числовий множник, що стоїть на першому місці, та у якого всі інші множники — степені з різними основами, називають стандартним виглядом одночлена. До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їхні степені.
- ✓ Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, називають нуль-одночленами. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.
- ✓ Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.
- ✓ Одночлени, які мають однакові буквені складові, називають подібними.
- ✓ Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.
- ✓ Вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

4. Многочлени

- ✓ Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.
- ✓ Одночлени, з яких складено многочлен, називають членами многочлена.
- ✓ Многочлен, який складається з двох членів, називають дво-членом, а той, який складається з трьох членів, — тричленом. Одночлен є окремим випадком многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.
- ✓ Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають подібними членами многочлена.
- ✓ Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.
- ✓ Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена й отримані добутки додати.
- ✓ Щоб помножити многочлен на многочлен, можна кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого й отримані добутки додати.

5. Формули скороченого множення

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

- ✓ Многочлен $a^2 - ab + b^2$ називають неповним квадратом різниці. Многочлен $a^2 + ab + b^2$ називають неповним квадратом суми.

МОДУЛЬ ЧИСЛА**6. Модуль числа**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

РІВНЯННЯ**7. Рівняння з однією змінною**

- ✓ Коренем (розв'язком) рівняння називають значення змінної, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність.
- ✓ Розв'язати рівняння — це означає знайти всі його корені або переконатися, що їх узагалі немає.

8. Лінійне рівняння з однією змінною

- ✓ Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

9. Рівняння з двома змінними

- ✓ Пару значень змінних, яка перетворює рівняння з двома змінними в правильну рівність, називають розв'язком рівняння з двома змінними.

- ✓ Розв'язати рівняння з двома змінними — це означає знайти всі його розв'язки або показати, що воно не має розв'язків.
- ✓ Графіком рівняння з двома змінними називають геометричну фігуру, що складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких (пари чисел) є розв'язками даного рівняння.
- ✓ Коли якась фігура є графіком рівняння, то виконуються дві умови:
 - 1) усі розв'язки рівняння є координатами точок, які належать графіку;
 - 2) координати будь-якої точки, що належить графіку, — це пара чисел, яка є розв'язком даного рівняння.

10. Властивості рівнянь

- ✓ Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.
- ✓ Якщо дане рівняння не має коренів, то, додавши до обох його частин одне й те саме число, отримаємо рівняння, яке теж не має коренів.
- ✓ Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.
- ✓ Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, яке має ті самі корені, що й дане.

11. Схема розв'язування задач на складання рівнянь

- 1) За умовою задачі скласти рівняння (сконструювати математичну модель задачі);
- 2) розв'язати отримане рівняння;
- 3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

ФУНКЦІЇ

12. Функція. Область визначення і область значень функції

- ✓ Правило, за допомогою якого для кожного значення незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної, називають функцією, а відповідну залежність однієї змінної від другої — функціональною.

- ✓ Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x , залежну — буквою y , функцію (правило) — буквою f . Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x , то цей факт позначають так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).
- ✓ Незалежну змінну ще називають аргументом функції.
- ✓ Значення залежної змінної називають значенням функції. Значення функції f , яке відповідає значенню x_0 аргументу x , позначають $f(x_0)$.
- ✓ Усі значення, яких набуває аргумент, утворюють область визначення функції. Усі значення, яких набуває залежна змінна, утворюють область значень функції.
- ✓ Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за допомогою якого можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.
- ✓ Способи задання функції: за допомогою опису, за допомогою формули, табличний, графічний.
- ✓ Якщо функцію задано формулою, права частина якої — цілий вираз, і при цьому не вказано область її визначення, то вважають, що областю визначення такої функції є всі числа.

13. Графік функції

- ✓ Графіком функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f .
- ✓ Коли якась фігура є графіком функції f , то виконуються дві умови:
 - 1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ обов'язково належить графіку;
 - 2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f , тобто $y_0 = f(x_0)$.
- ✓ Фігура, зображена на координатній площині, може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше ніж одну спільну точку.

14. Лінійна функція, її графік і властивості

- ✓ Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа, x — незалежна змінна, називають лінійною.
- ✓ Графіком лінійної функції, область визначення якої — усі числа, є пряма.
- ✓ Лінійну функцію, задану формулою $y = kx$, де $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.
- ✓ Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.
- ✓ Якщо у формулі $y = kx + b$ покласти $k = 0$, то отримаємо $y = b$. Графіком такої функції є пряма, яка паралельна осі абсцис.
- ✓ Системи лінійних рівнянь із двома змінними

15. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік

Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні, a, b, c — деякі числа.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0, a$ і c — будь-які	Невертикальна пряма
$ax + by = c$	$b = 0, a \neq 0, c$ — будь-яке	Вертикальна пряма
$ax + by = c$	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
$ax + by = c$	$a = b = 0, c \neq 0$	— (рівняння розв'язків не має)

16. Системи рівнянь із двома змінними

- ✓ Якщо треба знайти всі спільні розв'язки кількох рівнянь, то говорять, що треба розв'язати систему рівнянь.
- ✓ Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, які перетворюють кожне рівняння в правильну рівність.
- ✓ Розв'язати систему рівнянь — це означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує.

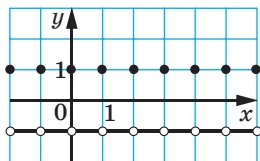
- ✓ Графічний метод розв'язування системи рівнянь полягає в такому:
 - побудувати на одній координатній площині графіки рівнянь, що входять до системи;
 - знайти координати всіх точок перетину побудованих графіків;
 - отримані пари чисел і будуть шуканими розв'язками.
- ✓ Якщо графіками рівнянь, що входять до системи лінійних рівнянь, є прямі, то кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розміщення двох прямих на площині:
 - якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
 - якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;
 - якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

17. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

- ✓ Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом підстановки, треба:
 - 1) виразити з будь-якого рівняння системи одну змінну через другу;
 - 2) підставити в друге рівняння системи замість цієї змінної вираз, отриманий на першому кроці;
 - 3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
 - 4) підставити знайдене значення змінної у вираз, отриманий на першому кроці;
 - 5) обчислити значення другої змінної;
 - 6) записати відповідь.
- ✓ Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь методом додавання, треба:
 - 1) дібравши «вигідні» множники, перетворити одне чи обидва рівняння системи так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
 - 2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь, отриманих на першому кроці;
 - 3) розв'язати рівняння з однією змінною, отримане на другому кроці;
 - 4) підставити знайдене на третьому кроці значення змінної в будь-яке з рівнянь вихідної системи;
 - 5) обчислити значення другої змінної;
 - 6) записати відповідь.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

- 1.2. 1) 1; 2) $\frac{19}{34}$. 1.16. b — будь-яке число. 1.23. 1) $x^{n+5} - x^{n+1}$; 2) $x^{2n+2} - 7x$. 1.24. 1) $5x^{n+1}$; 2) $x^{n+4} - x^{2n+2} + x^n$. 1.37. 4) $(a+b)^2 + (a-b)^2$. 1.38. 1) $x = -1$, $y = 0,5$; 2) таких значень не існує. 1.45. 7 або -7 . 1.46. 4 або -4 . 1.50. 1. *Вказівка.* $x^6 + 3x^2y^2 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) + 3x^2y^2$. 1.51. 8. 1.54. *Вказівка.* Подайте даний многочлен у вигляді суми кубів. 1.56. *Вказівка.* Помножьте обидві частини другої рівності на 3. 1.58. 2^{171} . 1.59. $171 = \frac{(171^9)^9}{(171^8)^{10}}$. 1.61. 1) 6; 2) 1; 3) 9. 1.62. 3) $31^{11} < 17^{14}$. *Вказівка.* $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56}$. 1.63. 2. *Вказівка.* $2x^4 + 3x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 + y^4 + y^2 = 2x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) + y^2$. 1.64. 8. 1.66. *Вказівка.* Позначимо $1002 = n$. Тоді даний вираз набуває вигляду $(n-3)(n-1)(n+1)(n+3) + 16$. Покажіть, що отриманий вираз тотожно дорівнює $(n^2 - 5)^2$. 1.67. *Вказівка.* Позначимо $1000 = n$. Тоді даний вираз набуває вигляду $n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2$. Покажіть, що отриманий вираз тотожно дорівнює $(n^2 + n + 1)^2$. 1.69. *Вказівка.* Помножьте й поділіть вираз, що стоїть у лівій частині рівності, на $1 + 2 + 2^2$. 1.70. 5) *Вказівка.* $m^5 + m^4 + 1 = m^5 + m^4 + m^3 - m^3 + 1$. 1.71. 5) *Вказівка.* $x^8 + x^7 + 1 = x^8 + x^7 + x^6 - x^6 - x^5 - x^4 + x^5 + x^4 + x^3 - x^3 + 1$. 1.72. 1) *Вказівка.* $x^4 - 8x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4 - 4x^2$. 1.75. 0. *Вказівка.* Задану рівність подайте у вигляді $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$. 1.76. *Вказівка.* Розгляньте вираз $(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$. 1.77. *Вказівка.* $x^4 - x + \frac{1}{2} = x^4 - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2})$. 1.78. 59. 1.80. 2 або -2 . *Вказівка.* $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$. 1.81. *Вказівка.* $a^2 + b^2 + 3c^2 + 2ab + 4ac + 4bc = a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab + 4ac + 4bc - c^2$. 1.83. *Вказівка.* Маємо: $a + b = -c$, звідки $(a+b)^3 = -c^3$.
- 2.4. Так. Усі натуральні числа. 2.11. $S(x) = 40(40-x)$. Область визначення: усі такі числа x , що $0 < x < 40$. 2.12. $V(x) = (100-2x)^2 \cdot x$. Область визначення: усі такі числа x , що $0 < x < 50$. 2.13. $y = 4x + 1$. 2.14. $y = x^3 + x$. 2.22. Див. рисунок. 2.40. Можна. *Вказівка.* Покажіть, що при будь-якому k графіки перетинаються в точці $M(-1; 2)$.
- 3.9. (3; 3). 3.10. (4; -4). 3.11. -12. 3.12. -4. 3.13. $a = 7$, $b = -3$. 3.16. 1) $a = 3$,



До задачі 2.22

$b = -2,5$; 2) $a = 4$, $b = -6$. **3.17.** $a = 3$, $b = 5$. **3.19.** 1) При $a \neq 17$; 2) при $a = -10$. **3.21.** 1) $(-2; 2)$; $(1; 1)$; 2) $(1; -1)$; $(3; 3)$; 3) $(1; 1)$; $(-3; 3)$. **3.22.** 1) $(8; 6)$; 2) $(-5; -4)$. **3.23.** 1) $(1; -1)$; 2) $(14; 2)$. **3.24.** 1) $(-3; -4)$; 2) $(2; -2)$. **3.25.** 1) $(-0,6; -3,2)$; 2) $(1; 3)$. **3.26.** $a = 5,6$, $b = 0,8$. **3.27.** 1) $y = -0,4x + 1,8$; 2) $y = -x + 2$. **3.28.** 1) $(3; -3)$; 2) $(1,5; 0,75)$; 3) $\left(4; -\frac{2}{3}\right)$; 4) $(-5; 6)$; 5) $(-2,4; -4)$. **3.29.** 1) $(10; 5)$; 2) $(0,5; 1,5)$; 3) $(-8; -28)$.

4.13. Якщо точки A , B і C не лежать на одній прямій, то шукана множина складається з однієї точки — центра описаного кола трикутника ABC . Якщо точки A , B і C лежать на одній прямій, то шукана множина порожня. **4.15.** $A = C$. **4.18.** Вказівка. $3k - 1 = 3k - 1 + 3 - 3 = 3(k - 1) + 2$; $3n + 2 = 3n + 2 - 3 + 3 = 3(n + 1) - 1$.

5.29. 2) Множина всіх натуральних чисел, крім 1; 3) множина, яка складається з усіх непарних чисел і числа 2.

6.4. 6 днів. **6.11.** Більше тих чисел, усі цифри яких непарні. **6.13.** Однакова кількість. Вказівка. Установіть взаємно однозначну відповідність між множиною менших сторін прямокутників одного виду та множиною менших сторін прямокутників другого виду.

6.14. Вказівка. Нехай $B \subseteq A$. Множині B поставимо у відповідність таку множину C , що $C \cap B = \emptyset$ і $C \cup B = A$. Очевидно, що числа n (B)

і n (C) мають різну парність. **6.16.** Більше тих чисел, у яких друга цифра менша від першої та третьої. Вказівка. Числа, у яких друга цифра найбільша, назовемо числами першого виду, а ті, у яких друга цифра найменша, — числами другого виду. Зрозуміло, що жодне із чисел першого виду не починається із цифри 9. Кожному числу $\overline{abc}$ першого виду поставимо у відповідність число $999 - \overline{abc}$,

яке є числом другого виду. **6.17.** Вказівка. «Щасливому» квитку з номером $\overline{abcdef}$ поставте у відповідність квиток з номером $999999 - \overline{abcdef}$. Доведіть, що він є теж «щасливим».

6.18. Однакова кількість. Вказівка. Доведіть, що довжини сторін трикутників, периметр яких дорівнює 1000, більші за 1. Тоді трикутнику зі сторонами a , b , c і периметром, який дорівнює 1000, відповідає трикутник зі сторонами $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ з периметром, який дорівнює 997. **6.19.** Многокутників, які містять вершину A_1 , більше. Вказівка. Кожному n -кутнику з вершиною A_1 при $n \geq 4$ можна поставити у відповідність $(n - 1)$ -кутник, який отримано видаленням точки A_1 із числа вершин. Таким чином можна отримати всі многокутники, які не містять вершину A_1 . Проте для трикутників

з вершиною A_1 відповідних пар не існує. **6.20.** Однакова кількість.

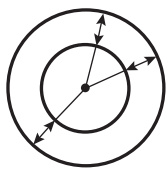
Вказівка. Кожному числу виду $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ такому, що $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$, поставте у відповідність число $\overline{a_1 (a_2 - 1) (a_3 - 2) (a_4 - 3) (a_5 - 4)}$.

6.21. Вказівка. Якщо пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком рівняння $x^2 + y^2 = n$, то пара $(x_0 - y_0; x_0 + y_0)$ — розв'язок рівняння $x^2 + y^2 = 2n$. Якщо пара $(x_1; y_1)$ — розв'язок рівняння $x^2 + y^2 = 2n$, то числа x_1 і y_1 мають однакову парність і пара $\left(\frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{y_1 - x_1}{2}\right)$ є розв'язком

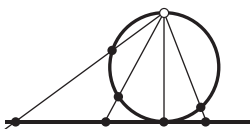
рівняння $x^2 + y^2 = n$. **6.22. Вказівка.** Розглянемо елемент $a \in A$. Кожній підмножині B множини A такій, що $a \notin B$, поставимо у відповідність підмножину $C = B \cup \{a\}$. Зрозуміло, що числа $n(B)$ і $n(C)$ мають різну парність. Зазначимо, що це розв'язання не залежить від парності кількості елементів множини A . Тому задачу 6.14 можна розв'язати також і цим способом.

7.6. Показнику степеня числа 2^n можна поставити у відповідність кількість нулів, які використано в записі десяткового дробу.

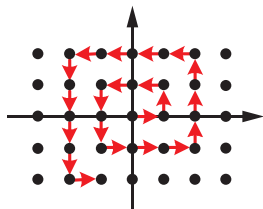
7.8. Див. рисунок. **7.10. Вказівка.** Пронумеруємо елементи заданої зліченої множини. Нехай елементи даної підмножини мають номери $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$. Множина цих номерів є або скінченною, або зліченою. **7.11.** Кожний із заданих відрізків містить щонайменше одну точку із цілою координатою, а оскільки відрізки не перетинаються, то всі ці точки різні. Тепер можна скористатися результатом задачі 7.10. **7.12.** Див. рисунок.



До задачі 7.8



До задачі 7.12



До задачі 7.16

7.13. 1) Кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA можна поставити у відповідність точку $N(5x_0)$ відрізка OB ; 2) кожній точці $M(x_0)$ відрізка OA (крім точки O) можна поставити у відповідність точку $N\left(\frac{1}{x_0}\right)$ променя AB . **7.15. Вказівка.** Можна скористатися двійковою

системою запису натуральних чисел. **7.16.** Схему нумерації елемен-

тів даної множини наведено на рисунку. **7.17. Вказівка.** Якщо ввести систему координат, то кожний із зазначених квадратів міститиме точку із цілими координатами. Оскільки квадрати не перетинаються, то ці точки різні. Далі скористайтеся результатами задач 7.16 і 7.10.

8.15. Вказівка. Скористайтеся задачею 8.7. **8.18. Вказівка.** $(ab - mn) - (am - bn) = (a + n)(b - m)$. **8.20.** 1) Розв'язків немає; 2) (1; 5); (9; -3); (-1; -3); (-9; 5); (3; 1); (-3; 1); 3) (2; 1); (5; -2); (0; -2); (-3; 1); 4) (0; 1); (0; -1); (-4; -1); (4; 1). **Вказівка.** $x^2 - 4xy + 3y^2 = (x - y)(x - 3y)$; 5) (4; -1); (-4; 1); (3; 1); (-3; -1); 6) (4; -3); (-11; -3); (3; -1); (-6; -1). **Вказівка.** $x^2 - 2xy - 3y^2 + x + y = (x + y)(x - 3y) + (x + y) = (x + y)(x - 3y + 1)$. **8.21.** 1) (3; 1); (3; -1); (-3; 1); (-3; -1); 2) (5; 1); (1; 3); (1; -5); (5; -15); 3) розв'язків немає; 4) (0; 1); (0; -1); (-1; 1); (1; -1). **8.22.** 1) (0; 0); (2; 2). **Вказівка.** Подайте рівняння у вигляді $(x - 1)(y - 1) = 1$; 2) (9; 2); (-5; 0); (3; 8); (1; -6). **8.23.** (2; 0); (1; -2). **8.24. Вказівка.** Запишіть даний вираз у вигляді $(1^n + 9^n) + (2^n + 8^n) + (3^n + 7^n) + (4^n + 6^n) + 5^n$. **8.26.** Не існує. **Вказівка.** Якщо припустити супротивне, то $(P(9) - P(1)) : (9 - 1)$ (див. приклад 5 п. 39), а це не так. **8.27.** Усі двоцифрові числа, крім 10 і 40, для яких виконується одна з умов: $\overline{a - b} = 1$ або $\overline{a - b} = 4$. **8.28.** Не існує. **8.29.** Не існує. **Вказівка.** $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37(a + b + c)$. Далі скористайтеся тим, що $a + b + c \leq 27$. **8.30. Вказівка.** $19(x + y) - 2(3x + 8y) = 13x + 3y$. **8.32. Вказівка.** $(3x + 10y) + (3y + 10x) = 13(x + y) : 13$. Звідси випливає, що $(3y + 10x) : 13$. **8.35. Вказівка.** $(\overline{abc} + \overline{bac} + \overline{cab}) : 37$. **8.36. Вказівка.** $\overline{aba} = 101a + 10b = 10(a + b) + 91a$. **8.37.** Не може. **Вказівка.** Сума непарної кількості непарних доданків — число непарне. **8.38.** 2^2 . **Вказівка.** $3^{2n+1} + 1 = 4(3^{2n} - 3^{2n-1} + \dots - 3 + 1)$. Слід зауважити, що в дужках маємо суму непарної кількості непарних доданків, яка дорівнює непарному числу. **8.39. Вказівка.** Усі дільники числа n^2 , крім одного, можна розбити на пари виду $\left(d; \frac{n^2}{d}\right)$, де $d \neq \frac{n^2}{d}$. **8.9. Вказівка.** $10A - B = 99999a$. Переконайтеся, що $99999 : 41$. **8.42. Вказівка.** Доведіть, що в записі даного числа є три однакові цифри. Тоді можна закреслити решту 16 цифр. **8.43. Вказівка.** Припустимо, що $x_0 \in \mathbb{Z}$ таке, що $P(x_0) = 0$. Тоді $P(x_0) - P(a) = P(x_0) - P(b) = P(x_0) - P(c) = 1$. Звідси 3 різних числа $x_0 - a$, $x_0 - b$, $x_0 - c$ є дільниками числа 1.

9.10. 0, 6, 12. **9.12.** 9. **9.14.** 0, 1, 2. **9.19.** Не існує. *Вказівка.* Розгляньте остачу при діленні даного числа на 18. **9.22.** *Вказівка.* $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$. Покажіть, що $4n(n + 1) \equiv 0 \pmod{8}$. **9.23.** 0, 1, 6. **9.24.** 0, 1, 8. **9.29.** Усі рівняння розв'язків не мають. *Вказівка.* Скористайтесь результатами задач 9.20, 9.21, 9.23, 9.24 відповідно. **9.30.** *Вказівка.* Скористайтесь результатами задач 9.20, 9.21, 9.23 і прикладу 3 з п. 9. **9.33.** 1) 2. *Вказівка.* $5^2 \equiv 1 \pmod{3}$; 2) 1; 3) 5; 4) 0. **9.34.** 1) 4; 2) 1; 3) 1. **9.35.** 2, 5, 8. *Вказівка.* $n = 3k_1 + r_1$, $n = 6k_2 + r_2$, $n = 9k_3 + r_3$, де $r_1 \leq 2$, $r_2 \leq 5$, $r_3 \leq 8$. Звідси $r_1 + r_2 + r_3 \leq 15$. З урахуванням того, що $r_1 + r_2 + r_3 = 15$, маємо: $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $r_3 = 8$. **9.36.** *Вказівка.* $4^n + 4^m \equiv 2 \pmod{3}$. Далі скористайтесь результатами задачі 9.20. **9.37.** *Вказівка.* Скористайтесь результатами задачі 9.21. **9.38.** *Вказівка.* Якщо припустити, що всі числа є непарними, то із задачі 9.22 випливає, що $m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 \equiv 5 \pmod{8}$. **9.39.** *Вказівка.* Нехай $p = 2n + 1$, $q = 2k + 1$. Тоді дискримінант даного рівняння $4n(n + 1) - 8(k + 1) + 5 \equiv 5 \pmod{8}$. **9.40.** *Вказівка.* Скористайтесь прикладом 3 п. 9. **9.41.** *Вказівка.* $1 + n + n^2 + n^3 = (1 + n)(1 + n^2)$, але $1 + n^2$ не ділиться націло на 3. **9.42.** 665. *Вказівка.* Дільник дорівнює 9. **9.43.** 233. **9.44.** 17. *Вказівка.* Це всі натуральні числа виду $6k + 3$, які менші від 100. **9.45.** 30; 60. *Вказівка.* $n = 9q_1 + q_1 = 10q_1$, $q_1 \leq 8$, $n = 14q_2 + q_2 = 15q_2$, $q_2 \leq 13$. Звідси $n \leq 80$ і $n : 30$. **9.46.** 270; 59. **9.47.** 1) *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, числа виду $7n + 3$; 2) *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, числа виду $9n + 5$. **9.48.** *Вказівка.* Розгляньте числа 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{2010} . **9.49.** *Вказівка.* Розгляньте числа 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\dots 1}_{n+1 \text{ цифра}}$. Якісь два з них дають при діленні на n рівні остачі.

9.50. *Вказівка.* Доведіть, що числа a , b і c дають однакові остачі при діленні на 3.

10.1. 1) 23; 2) 47. **10.2.** 1) 29; 2) 67. **10.5.** 1) 1 або 2; 2) 1 або 3. **10.13.** 2) Не існують. *Вказівка.* $(a^3 - a) : 6$. **10.14.** 3) *Вказівка.* Подайте чисельник дробу у вигляді $(n - 2) \cdot (n - 1) n (n + 1) (n + 2)$. **10.16.** 1) $m = 35$, $n = 15$; 2) $m = 8$, $n = 22$; 3) $m = 3$, $n = 39$ або $m = 39$, $n = 3$; 4) $m = 7$, $n = 1001$, або $m = 77$, $n = 91$, або $m = 1001$, $n = 7$, або $m = 91$, $n = 77$. **10.18.** 3 мм. *Вказівка.* Довжина сторони останнього квадрата дорівнює НСД (324; 141). **10.19.** *Вказівка.* Серед вибраних чисел є два послідовних. **10.20.** *Вказівка.* Оскільки $\text{НСК}(a; b) = 2^4 \cdot \text{НСД}(a; b)$, то $a = 2^k \cdot \text{НСД}(a; b)$, $b = 2^m \cdot \text{НСД}(a; b)$. **10.22.** $x = 54$, $y = 2$ або $x = 24$, $y = 8$. *Вказівка.* Оскільки

НСД $(y; (y+1)^2) = 1$, то $\frac{243}{(y+1)^2}$ — ціле число. **10.23. Вказівка.** Оскільки

ки $\text{НСК}(m; n) \cdot \text{НСД}(m; n) = mn$, то $\text{НСД}(m; n)$ і $\text{НСК}(m; n)$ — корені рівняння $x^2 - (m+n)x + mn = 0$. **10.24. Вказівка.**

$$\frac{n^4 + 4n^2 + 3}{n^4 + 6n^2 + 8} = \frac{(n^2 + 1)(n^2 + 3)}{(n^2 + 2)(n^2 + 4)}.$$

$\text{НСД}(n^2 + 1; n^2 + 2) = \text{НСД}(n^2 + 3; n^2 + 2) =$

$= \text{НСД}(n^2 + 3; n^2 + 4) = 1$. Оскільки $(n^2 + 4) - (n^2 + 1) = 3$, то $\text{НСД}(n^2 + 1; n^2 + 4) \leq 3$. Проте числа $n^2 + 1$ і $n^2 + 4$ мають різну парність і $n^2 + 1$ не ділиться націло на 3. **10.25. $n = 122$. Вказівка.** Доведіть, що один із множників ділиться націло на 125, звідки $n \geq 121$. **10.26. $m = 2$, $n = 6$ або $m = 6$, $n = 2$. Вказівка.**

Оскільки $mn = \text{НСК}(m; n) \cdot \text{НСД}(m; n)$, то $\text{НСК}(m; n) - \text{НСД}(m; n) =$

$$= \frac{\text{НСК}(m; n) \text{НСД}(m; n)}{3}.$$

Позначивши $\text{НСК}(m; n) = x$, $\text{НСД}(m; n) = y$, розгляньте рівняння $3x - 3y = xy$. **10.27. Ні. Вказівка.** Зазначені операції зберігають НСД записаних на картці чисел.

11.14. 2 834 645. **11.17.** 51. **11.18.** 1 023 457 896. **11.20. Вказівка.** Це число кратно 3, але не кратно 9. **11.21.** Не може. **Вказівка.** Числа виду $\overline{x66}$ і $\overline{x06}$ кратні 2, але не кратні 4. **11.23. 1. Вказівка.** $28^{101} \equiv 1 \pmod{9}$. **11.24. 1) 977. Вказівка.** $S(n) \leq 27$. Крім того,

скористайтесь тим, що $n \equiv S(n) \equiv 2 \pmod{3}$; 2) розв'язків немає. **Вказівка.** $n^2 \equiv (S(n))^2 \equiv 1 \pmod{3}$ або $n^2 \equiv (S(n))^2 \equiv 0 \pmod{3}$.

11.25. 1) 982; 2) розв'язків немає. Вказівка. $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod{3}$. **11.26. Вказівка.** $S(5n) \equiv 5n \pmod{9}$, $S(n) \equiv n \pmod{9}$, отже, $4n \equiv 0 \pmod{9}$. **11.27. Вказівка.** Число $n^2 + 1$ не кратно 9.

11.28. Ні. Вказівка. Нехай $n = \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ — шукане число.

$$|P(n)| = |(a_0 + a_2 + a_4) - (a_1 + a_3 + a_5)| \leq |(4 + 5 + 6) - (1 + 2 + 3)| = 9.$$

Доведіть також, що $P(n)$ — непарне число. **11.29. Вказівка.** Доведіть, що дане число ділиться націло на 11. **11.30. 1, 3 і 9. Вказівка.** Розгляньте числа $a = \underbrace{111\dots12}_{n-2 \text{ цифри}}$ і $b = \underbrace{111\dots121}_{n-3 \text{ цифри}}$, $S(a) = S(b) = n$,

а тому за умовою кожне із цих чисел кратно n . Тоді різниця $b - a = 9$ також кратна n .

12.10. 1. 12.11. 2. 12.12. 1) 2; 2) 2. Вказівка. $4n^2 + 5n - 21 = (4n - 7)(n + 3)$; 3) 1. **12.13. 1) 1; 2) 2; 3) 1. 12.14. Вказівка.** Скористайтесь результатом задачі 12.9. **12.16. 3. Вказівка.** Скористай-

теся тим, що числа p , $p + 26$ і $p + 28$ дають різні остачі при діленні на 3. **12.17.** 3. **12.20.** Вказівка. $a^2 + 9ab + b^2 = (a - b)^2 + 11ab$. **12.22.** 3. **12.23.** 3. **12.25.** Вказівка. $\underbrace{800 \dots 027}_{10 \text{ нулів}} = (2 \cdot 10^4)^3 + 3^3$.

12.26. Вказівка. $999\,999\,973 = (10^3)^3 - 3^3$. **12.27.** $p = 3$, $q = 2$. Вказівка. Число $p^2 - 1$ кратне 8. **12.28.** $p = 3$, $q = 11$. Вказівка. Якщо $p \neq 3$, то $(p^2 + 2) : 3$. **12.29.** 2. Вказівка. Нехай $4p + 1 = m^2$. Доведіть, що число $m^2 - 1$ ділиться націло на 8. **12.30.** 5. Вказівка. Число $2(n + 12) - (2n - 1) = 25$ кратне p . **12.31.** 7. **12.32.** 2. Вказівка. Якщо $n = 2^k$, $k > 1$, то число $2^n - 1$ складене. Якщо $n \neq 2^k$, то складеним є число $2^n + 1$. **12.33.** 1. Вказівка. $n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2$. **12.36.** 5. Вказівка. Для шуканого числа p можна записати дві рівності: $p = q_1 + 2$, $p = q_2 - 2$, де q_1 і q_2 — прості числа. Далі доведіть, що одне із чисел p , q_1 , q_2 кратне 3. **12.37.** Вказівка. За малою теоремою Ферма число $(a^{13} - a) + (b^{13} - b) + (c^{13} - c)$ кратне 13. **12.39.** Вказівка. $24^{24} - 1 = (24^6)^4 - 1 = (24^4)^6 - 1$. **12.41.** 3. Вказівка. $p^2 + 11 = (p^2 - 1) + 12$. Якщо $p > 3$, то $((p^2 - 1) + 12) : 12$ (див. задачу 12.14), а отже, має більше ніж 6 дільників. **12.42.** $991 \cdot 997 \cdot 1009$. Вказівка. Нехай $997 = x$. Тоді $989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320 = (x - 8)(x + 10) \times (x + 4) + 320 = x^3 + 6x^2 - 72x$. **12.43.** Вказівка. Значення кожного з виразів $42^{47} + 1$ і $47^{42} - 1$ кратне 43. **12.44.** Вказівка. Кожне із чисел $p^q - p$ і $q^p - q$ ділиться націло на pq .

13.5. 3) Вказівка. $5 \cdot 25^n + 13 \cdot 13^{2n} = 5^{2n+1} + 13^{2n+1}$; 4) Вказівка. $21^n + 4^{n+2} = 21^n - 4^n + 17 \cdot 4^n$. **13.8.** 1) Вказівка. $2^{1234} + 1 = (2^2)^{617} + 1$. **13.9.** 1) Вказівка. Помножте вирази, які записано в обох частинах рівності, на вираз $x - 1$. **13.10.** 1) 3^{100} . Вказівка. Помножте даний вираз на $3 - 2 = 1$; 2) $\frac{4^{21} + 3^{21}}{7}$. **13.11.** $a = 2$. **13.13.** 1) 0; 2) 0; -1.

13.14. 1) Вказівка. $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n + 12 \cdot 6^n = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n$.

14.7. 6) $D(y) = \{x \mid x \neq -1 \text{ і } x \neq 0\}$.

15.21. 0,3. **15.22.** 5. **15.24.** $\frac{1}{32}$. **15.25.** 1) $-\frac{1}{8}$; 2) -12,5. **15.30.** 1) x —

будь-яке число, крім -1; 2) коренів немає; 3) коренів немає. **15.31.** 1) Коренів немає; 2) -7. **15.32.** 1) Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{a}$; 2) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число;

якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = 6$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 6$, то $x = a - 6$; 4) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -2$ і $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a+2}$. **15.33.**

1) Якщо $a = -3$, то коренів немає; якщо $a \neq -3$, то $x = \frac{3}{a+3}$; 2) якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо $a = 9$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 9$, то $x = \frac{a-9}{a}$. **15.37.** 3) *Вказівка.* Подайте чисельник

дроби у вигляді $b^3 + (b+1)^3$; 5) $a^2 - 2a + 2$; 9) $b^{24} + 1$. *Вказівка.* Помножимо чисельник і знаменник дроби на $b - 1$. Маємо:

$$\frac{(b-1)(b^{47} + b^{46} + \dots + b + 1)}{(b-1)(b^{23} + b^{22} + \dots + b + 1)} = \frac{b^{48} - 1}{b^{24} - 1} = b^{24} + 1.$$
 15.38. 4) $z^2 - z + 4$; 6) $a^{40} - a^{20} + 1$.

15.39. *Вказівка.* Скористайтесь результатом задачі 15.36. **15.40.** 1) -1 ;

2) $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* $2a^4 + 14a^2 - 17a + 3 = 2a(a^3 + 7a - 9) + a + 3$.

15.41. $x^3 - x^2 + 1$. *Вказівка.* Подайте вираз $x^5 + x + 1$ у вигляді

$(x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1)$. **15.42.** *Вказівка.* $a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1 = \frac{a^{10} - 1}{a^2 - 1} = \frac{(a^5 - 1)(a^5 + 1)}{(a - 1)(a + 1)}$.

16.9. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{m+2}$; 3) $\frac{1}{1-k}$. **16.10.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{a-5}{a+5}$. **16.11.** 1) $\frac{1}{1-a}$;

2) $\frac{3}{b-2}$; 3) $\frac{m}{n-5}$; 4) 1. **16.12.** 1) $\frac{1}{(x-7)^2}$; 2) $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a-2b)^2}$; 3) $\frac{y+6}{y+2}$.

16.20. 2) 5; 3) $4\frac{1}{4}$. **16.21.** 2) -3 ; 3) $-4,5$. **16.22.** 1) $\{1, 2, 3, 6\}$;

2) $\{1, 2, 7, 14\}$; 3) $\{1, 2, 8\}$. **16.23.** 1) $\{1, 3, 9\}$; 2) $\{1, 2, 4, 8\}$; 3) $\{2\}$.

16.25. 1) $\{-10, -4, -2, 4\}$; 2) $\{-15, 1, 3, 19\}$. **16.26.** 1) *Вказівка.* $n^3 - 2n + 1 = (n^3 + n^2 - n) - (n^2 + n - 1)$. **16.27.** *Вказівка.* $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2ab - 2bc - 2ac$.

17.11. 6) $\frac{5}{p-5}$; 7) $\frac{16}{16y-y^3}$; 8) $\frac{2b+1}{12b-6}$. **17.12.** 5) $\frac{1}{x}$; 6) $\frac{8}{y+2}$.

17.15. 2) 4. **17.16.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2,5; 3) 0,1. **17.17.** 1) 0,8; 2) $\frac{7}{17}$. **17.20.**

2) $\frac{3}{b^2 - 3b + 9}$. **17.21.** 1) $\frac{2n^3}{9m^2 - n^2}$; 2) $\frac{2-2b}{8b^3 + 1}$. **17.23.** 1) $-\frac{a+b}{ab}$; 2) $\frac{1}{2x}$;

3) $\frac{100b^2}{(a^2 - 25b^2)^2}$; 4) $\frac{1}{y-2}$. 17.27. $\frac{35}{36}$. 17.29. 1) $\frac{3}{(a-1)(a-4)}$. Вказівка.

Подайте кожний із доданків у вигляді різниці двох дробів. Наприклад, $\frac{1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1}$; 2) $\frac{4}{a(a+12)}$. 17.30. 1) $\frac{3}{(a-7)(a-1)}$;

2) $\frac{5}{x(x+5)}$. 17.34. Вказівка. До кожного з дробів лівої частини рів-

ності додайте 1, а до правої частини додайте 3. 17.35. Вказівка. Розгляньте різницю лівої та правої частин даної рівності. 17.36. 12. Вказівка. Покажіть, що з першої рівності випливає, що $(a-b)(a+b+c) = 0$. Також цю задачу можна розв'язати, скориставшись результатом задачі 15.36. 17.37. 12. Вказівка. Скористайтесь результатом задачі 15.36. 17.38. Вказівка. Доведіть, що виконується одна з рівностей $a+b=0$, $b+c=0$ або $c+a=0$. 17.39. 2.

Вказівка. Можна записати $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{xy+1} = \frac{1}{xy+1} - \frac{1}{y^2+1}$. Звідси

$$\frac{x(y-x)}{(x^2+1)(xy+1)} = \frac{y(y-x)}{(y^2+1)(xy+1)}.$$

З урахуванням $x \neq y$ можна показати, що $xy = 1$. 17.40. Вказівка. Доведіть, що $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} =$

$$= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

17.41. 1) $\frac{89}{60}$. Вказівка. Скориставшись результатом задачі 17.40, покажіть, що $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{1}{30}$, і відніміть

від обох частин цієї рівності 3; 2) $\frac{91}{60}$. Вказівка. Додайте 3 до обох

частин рівності, наведеної у вказівці до першого прикладу задачі 17.41. 17.42. $\frac{9}{4}$. Вказівка. Скористайтесь результатом задачі 17.25.

17.43. Вказівка. $\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} = \frac{abc}{c^3} + \frac{bca}{a^3} + \frac{cab}{b^3} = abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$. Далі

скористайтесь тотожністю, доведеною в задачі 1.43. 17.44. -1 або 8. Вказівка. До кожної частини подвійної рівності додайте 2.

17.45. 1. Вказівка. $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{xy}{xy+xyz+x^2yz}.$

- 18.18. 1) 0,9; 2) -5; 3) -3,2. 18.19. 1) $\frac{40}{21}$; 2) $\frac{4}{11}$. 18.20. 1) ac^3b ;
 2) $\frac{a^n - b^n}{a^{2n} - a^n b^n + b^{2n}}$. 18.21. 1) $x^2 y^{n+1} z^{n+1}$; 2) $\frac{x^n + 2y^n}{x^{2n} + 2x^n y^n + 4y^{2n}}$. 18.22. 83.
 18.23. 10. 18.24. 7 або -7. 18.25. 2 або -2. 18.26. 1) 1; 2) 1.
 18.27. 1) $\frac{(a-5)^2}{(a+5)^2}$; 2) 1. 18.30. 1) $\frac{a+b-1}{a-b+1}$; 2) $\frac{(x+3)(x+7)}{(x-3)(x-7)}$. 18.31.
 1) $\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^2$; 2) $a^2 - 1$.
 19.1. 1) $\frac{3}{1-a}$; 2) $\frac{2}{b-3}$; 3) $\frac{1}{a-2b}$; 4) $\frac{2}{a+5}$; 5) $\frac{x-3}{x+3}$. 19.2. 1) $\frac{2}{3-b}$;
 2) $x + y$; 3) $\frac{a+2}{a-2}$. 19.3. 1) $\frac{x+8}{x-8}$; 2) $\frac{1}{b}$; 3) $\frac{a-1}{a}$; 4) 2;
 5) $a - 2$. 19.4. 1) $\frac{7+x}{7-x}$; 2) $c - 5$; 3) -2; 4) $\frac{y+2}{6}$. 19.7. 1) Не залежить;
 2) залежить. 19.9. 1) $\frac{1}{a}$; 2) $a - 3$; 3) $\frac{a+1}{a}$; 4) $\frac{a+b}{a}$. 19.10. 1) $\frac{a^2 + b^2}{b^2}$;
 2) $-a$. 19.11. 1) $-\frac{a+b}{2ab}$; 2) $\frac{1}{a}$; 3) $a + b$. 19.12. 1) $-y$; 2) $\frac{a+b}{a-b}$. 19.15.
 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) 1; 3) $b + a$. 19.16. 1) $\frac{a+2}{(a-2)(a-1)}$; 2) $\frac{1}{x+y}$; 3) $0,5a(a + c - b)$.
 19.18. $\frac{x+2}{2}$. 19.20. $\frac{1}{a^3 b^3}$. 19.21. $\frac{b-a}{a^4 b^4}$. 19.22. 1,9. *Вказівка.* Розглянь-
 те добуток $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$. 19.23. *Вказівка.* Розгляньте
 добуток $\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$. 19.24. 1. *Вказівка.*
 Шукана сума має вигляд $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{2+a}$.

20.9. 3) Може звужитися на число -1, тобто може бути загубле-
 но корінь $x = -1$. Якщо $-1 \notin D(f)$ або $f(-1) = 1$, то множина коре-
 нів не зміниться; 4) якщо $-1 \in D(f) \cap D(g)$ і $f(-1) = g(-1)$, то буде
 отримано сторонній корінь $x = -1$; якщо $-1 \notin D(f) \cap D(g)$ або $f(-1) \neq$
 $g(-1)$, то множина коренів не зміниться. 20.10. 1) $\frac{13}{4}$; 2) коренів

немає; 3) 7; 4) 0; -2; 5) коренів немає; 6) -17; 7) 0; 8) коренів немає. **20.11.** 1) 10; 2) -0,5; 3) -3; 4) -4; 4) 5) коренів немає; 6) -5. **20.12.** 2 км/год. **20.13.** 29 км/год. **20.14.** 15 год, 10 год. **20.15.** 10 год, 40 год. **20.16.** 9 км/год. **20.17.** 1) Коренів немає; 2) 9; 3) 0. **20.18.** 1) 0,6; 2) 0.

21.1. 1) Якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 1$, то $x = a$; 2) якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a \neq -2$, то $x = -2$; 4) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 3; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 3$, то $x = a$; якщо $a = 3$, то коренів немає; 6) якщо $a = 0$, то x — будь-яке число, крім 0; якщо $a = 4$, то коренів немає; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 4$, то $x = 4$. **21.2.** 3) Якщо $b = -\frac{1}{2}$, то коренів немає; якщо $b \neq -\frac{1}{2}$, то $x = 3b$.

21.3. 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = 1$ або $x = -1$; 2) якщо $a \neq -2$, то $x = a$ або $x = 0$; якщо $a = -2$, то $x = 0$; 3) якщо $a \neq 7$, то $x = a$ або $x = 6$; якщо $a = 7$, то $x = 6$; 4) якщо $a \neq 4$ і $a \neq -2$, то $x = 4$ або $x = -2$; якщо $a = 4$, то $x = -2$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; 7) якщо $a = 5$ або $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq 5$ і $a \neq 0$, то $x = -a$; 8) якщо $a = 0$, то $x = 2$; якщо $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 1$, то $x = a$ або $x = 2$. **21.4.** 2) Якщо $b = -4$ або $b = 1$, то коренів немає; якщо $b \neq -4$ і $b \neq 1$, то $x = -b$; 4) якщо $b = 0$, то $x = 3$; якщо $b = 3$, то $x = -6$; якщо $b \neq 0$ і $b \neq 3$, то $x = 3$ або $x = -2b$. **21.5.** 1) Якщо $a = 2$, то коренем є будь-яке число, крім $x = 2$; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 1$; 2) якщо $a = 2$ або $a = 3$, то коренів немає; якщо $a \neq 2$ і $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{3-a}$; 3) якщо $a = 3$ або

$a = 7$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq 7$, то $x = \frac{a-5}{2}$; 4) якщо

$a = \frac{1}{3}$ або $a = 0$, то коренів немає; якщо $a \neq \frac{1}{3}$ і $a \neq 0$, то $x = 3a$;

5) якщо $a = 0$ або $a = 1$, то коренів немає; якщо $a = -3$, то коренем є будь-яке число, крім чисел -2 і -3 ; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$ і $a \neq -3$, то $x = a - 3$; 6) якщо $a = -2$, то x — будь-яке число, крім $x = 2$; якщо $a = 2$, або $a = \frac{5}{2}$, або $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 2$, $a \neq \frac{5}{2}$, $a \neq 1$,

$a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a-2}$. **21.6.** 2) Якщо $b = \frac{1}{2}$ або $b = -\frac{5}{2}$, то коренів немає;

якщо $b \neq \frac{1}{2}$ і $b \neq -\frac{5}{2}$, то $x = \frac{4(b+1)}{3}$; 3) якщо $b = 0$, або $b = -3$, або

$b = -1$, то коренів немає; якщо $b \neq 0$, $b \neq -3$ і $b \neq -1$, то $x = \frac{b^2-b}{b+1}$;

4) якщо $b = 3$, або $b = \frac{8}{3}$, або $b = \frac{13}{4}$, то коренів немає; якщо $b = -3$,

то x — будь-яке число, крім 3 і -4 ; якщо $b \neq 3$, $b \neq \frac{8}{3}$, $b \neq \frac{13}{4}$ і $b \neq -3$,

то $x = \frac{1}{3-b}$. **21.7.** 3) $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -1$; 4) $a = 1$, або $a = 0$,

або $a = 2$; 5) $a = -3$ або $a = -\frac{1}{3}$; 6) $a = 1$, або $a = -1$, або $a = 2$, або

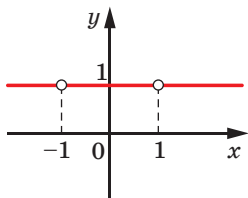
$a = -2$, або $a = 0$. **21.8.** 1) $b = -8$ або $b = 3$; 2) $b = 0$, або $b = -1$, або $b = \frac{1}{2}$; 3) $b = -\frac{1}{2}$ або $b = -2$; 4) $b = -1$, або $b = \frac{3}{5}$, або $b = 0$, або $b = 5$,

або $b = -3$. **21.9.** 2) $a = 0$ або $a = 2$; 3) $a = 0$ або $a = 3$; 5) $a = 1$; 6) $a = -1$; 7) $a = 0$; 8) $a = 0$ або $a = 1$. **21.10.** 1) $\{b \mid b \neq -4\}$; 2) $b = -1$ або $b = -3$; 3) $b = 0$; 4) $b = 2$; 5) таких значень b не існує.

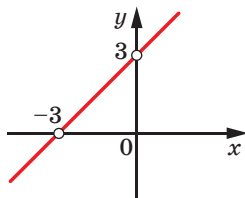
22.21. 1) 2,7; 2) $9\frac{47}{125}$. **22.30.** 5. **22.31.** 6.

23.5. 6) $-\frac{1}{6}$; 7) $\frac{4}{9}$; 8) $\frac{4}{7}$. **23.6.** 5) 16; 6) 144. **23.15.** 8 хв.

23.16. 5,34 кг. **23.17.** У 81 раз. **23.21.** 3) Див. рисунок; 5) див. рисунок.



До задачі 23.21 (3)



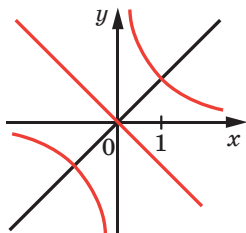
До задачі 23.21 (5)

23.25. 1) -3 ; 2) -5 ; 3) -2 ; 4) -7 ; 5) 0; 6) 2. **23.26.** 1) 4; 2) 1; 3) -1 ; 4) 6. **23.27.** 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-4b^2$; 3) $15c^3 + 5$; 4) $-\frac{1}{m^4}$; 5) $\frac{a}{a+b}$.

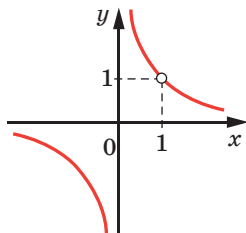
23.28. 1) $\frac{2a^2}{3a^2-1}$; 2) $\frac{1-6b}{2}$; 3) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **23.29.** 1) -1 або 0; 2) 3 або 4; 3) 4 або 5; 4) 2 або 3. **23.30.** 1) 6 або 7; 2) 4 або 5; 3) 4 або 5; 4) 4 або 5.

24.20. 1) 2; 2) -1 ; 3) коренів немає. **24.21.** 1) 2; 4) 2) -1 ; 1; 3) коренів немає. **24.30.** Якщо $a = 0$, то коренів немає; якщо

$a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь. **24.36.** 3) Див. рисунок. **24.37.** 3) Див. рисунок.



До задачі 24.36 (3)



До задачі 24.37 (3)

24.38. Вказівка. Функція f така, що $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$. **24.41.** $f(x) = -\frac{2}{x}$.

Вказівка. Замінивши в даній рівності x на $-x$, отримуємо:

$3f(-x) + 2f(x) = \frac{2}{x}$; $f(-x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - 2f(x)\right)$. Тепер можна знайдений

вираз для $f(-x)$ підставити в рівність, задану в умові. Зробіть перевірку. **24.42.** $f(x) = -\frac{3}{x}$.

25.20. 3) Порівняти неможливо.

26.17. 1) $a \geq 1$; 2) $a \leq 2$; 3) $-1 \leq a \leq 1$.

28.16. 2) $(-\infty; -5]$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 5) $(-\infty; 7,5]$;

6) $(-\infty; +\infty)$; 7) $\emptyset$; 8) $(-\infty; +\infty)$; 9) $(-\infty; 0)$. **28.17.** 1) $[-6; +\infty)$; 2) $\emptyset$;

3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-3,5; +\infty)$. **28.18.** 1) -8 ; 2) -1 . **28.19.** 1) -6 ; 2) -3 .

28.20. 5 розв'язків. **28.21.** 8 розв'язків. **28.24.** 12 км. **28.25.** Таких

чисел не існує. **28.26.** 18 кульок. **28.27.** 21. **28.32.** 3) При $a > -1$

і $a \neq 1$. **28.33.** 2) При $m < 7$ і $m \neq 0$. **28.34.** 1) $a = 3$; 2) $a = -1$. **28.35.**

1) $a = -7$; 2) $a = -4$ і $a = 4$. **28.36.** 1) Якщо $a > 0$, то $x > 0$; якщо $a < 0$,

то $x < 0$; якщо $a = 0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a > 0$, то $x < \frac{1}{a}$;

якщо $a < 0$, то $x > \frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; 3) якщо

$a > 0$, то $x \geq 1$; якщо $a < 0$, то $x \leq 1$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке

число; 4) якщо $a > 2$, то $x > a + 2$; якщо $a < 2$, то $x < a + 2$; якщо

$a = 2$, то розв'язків немає; 5) якщо $a > -3$, то $x \leq a - 3$; якщо $a < -3$,

то $x \geq a - 3$; якщо $a = -3$, то x — будь-яке число; 6) якщо $a < 2$, то

$x < -2$; якщо $a > 2$, то $x > -2$; якщо $a = 2$, то розв'язків немає.

28.37. 1) Якщо $a \neq 0$, то $x \leq 0$; якщо $a = 0$, то x — будь-яке число;

2) якщо $a > -4$, то $x > \frac{1}{a+4}$; якщо $a < -4$, то $x < \frac{1}{a+4}$; якщо $a = -4$,

то розв'язків немає; 3) якщо $a > -1$, то $x < \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a < -1$,

то $x > \frac{2-a}{a+1}$; якщо $a = -1$, то x — будь-яке число. **28.38.** 1) $a \leq \frac{6}{5}$;

2) $a \leq \frac{12}{5}$; 3) $a < -1$; 4) $a \leq 0$; 5) $a \geq 0$. **28.39.** 1) $a = \frac{6}{5}$; 2) таких зна-

чень a не існує; 3) $a = -\frac{3}{2}$; 4) $a = 3$; 5) $a = 0$; 6) $a = 0$ або $a = \frac{2}{3}$.

29.22. 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4, 2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0, 8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$;

6) $(-\infty; -4]$; 7) $\emptyset$; 8) $\emptyset$. **29.23.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\emptyset$;

4) $(-\infty; +\infty)$. **29.24.** 1) $-3; -2; -1; 0$; 2) $7; 8; 9; 10$; 11. **29.25.** 1) 4 роз-
в'язки; 2) 6 розв'язків. **29.26.** 1) $-0,5 < x < 6,5$; 2) $14 \leq x \leq 17$.

29.27. 1) $-1,5 \leq x < 2,5$; 2) $0 \leq x < \frac{1}{3}$. **29.28.** 2) $(1,5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$.

29.29. 1) $\emptyset$; 2) $(1; 3)$. **29.30.** 3 см, 5 см або 4 см, 4 см. **29.34.**
 $(-\infty; +\infty)$. **29.36.** 1) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $[-2; +\infty)$; 3) $[2; +\infty) \cup \{0\}$;

4) $(-\infty; 0) \cup (0; 2)$; 5) $(-\infty; -2] \cup \{0\}$; 6) $(-\infty; 2]$. **29.37.** 1) $(-3; 1) \cup (1; +\infty)$;
2) $[-3; +\infty)$; 3) $\{1\} \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1) \cup (1; 3)$; 5) $(-\infty; -3] \cup \{1\}$; 6) $(-\infty; 3]$.

29.38. 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$;

4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$. **29.39.** 1) При $a > 3$; 2) при $a \leq 3$. **29.40.** 1) При
 $a \leq 4$; 2) при $a > 1$. **29.41.** 1) При $a \leq -1$; 2) при $a = 1$. **29.42.** Якщо

$a < 2$, то $x \leq a$, якщо $a \geq 2$, то $x < 2$. **29.43.** Якщо $a < -3$, то
 $a < x < -3$; якщо $a \geq -3$, то розв'язків немає. **29.44.** При $10 < a \leq 11$.

29.45. При $1 < b \leq 2$. **29.46.** При $8 \leq a < 9$. **29.47.** При $-6 \leq b < -5$.

29.48. $a = 1$. **29.49.** $a = 6$. **29.50.** 1) Якщо $a > 1$, то $(1; a) \cup (a; +\infty)$;

якщо $a \leq 1$, то $(1; +\infty)$; 2) якщо $a \geq 1$, то $[1; +\infty)$; якщо $a < 1$, то
 $[1; +\infty) \cup \{a\}$; 3) якщо $a \leq 1$, то $(-\infty; a)$; якщо $a > 1$, то $(-\infty; -1) \cup (1; a)$;

4) якщо $a < 1$, то $(-\infty; a] \cup \{1\}$; якщо $a \geq 1$, то $(-\infty; a]$. **29.51.** 1) Якщо
 $a \geq 1$, то $(-1; +\infty)$; якщо $a < 1$, то $(-1; -a) \cup (-a; +\infty)$; 2) якщо $a \leq 1$,

то $[-1; +\infty)$; якщо $a > 1$, то $[-1; +\infty) \cup \{-a\}$; 3) якщо $a \geq 1$, то $(-\infty; -a)$; якщо $a < 1$, то $(-\infty; -1) \cup (-1; -a)$; 4) якщо $a \leq 1$, то $(-\infty; -a]$; якщо $a > 1$, то $(-\infty; -a] \cup \{-1\}$.

30.13. Вказівка. Скористайтесь геометричною інтерпретацією.

30.14. 1) 4; 2) 5. **30.15.** Розв'язків немає. Вказівка. Запишіть перше рівняння системи у вигляді $|x - 3 + y - 1| = \pi$. **30.16.** 1) -4 ; 0;

4; 2) розв'язків немає. **30.17.** 1) -4 ; -2 ; 2 ; 4 ; 2) 0 . **30.18.** 1) -3 ; $-\frac{1}{5}$;

2) 2 ; $\frac{1}{3}$. **30.19.** 1) 1 ; 2) розв'язків немає; 3) $-\frac{2}{5}$. **30.20.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 0 ; 1 ;

3) 2 . **30.21.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $(-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$.

30.22. 1) $(3; +\infty)$; 2) $[-\frac{1}{2}; +\infty)$; 3) $(-\infty; \frac{1}{5}] \cup [3; +\infty)$; 4) $(-\infty; \frac{1}{3})$. **30.23.**

1) $\frac{3}{2}$; $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{11}{5}$; 7; 3) 1 ; 4) розв'язків немає; 5) -1 ; $\frac{2}{3}$; 6) $[0; 6]$; 7) $[3; +\infty)$;

8) $[\frac{3}{7}; +\infty)$; 9) $(2; +\infty)$; 10) $[2; 3]$. **30.24.** 1) -8 ; 12 ; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -1 ; 4) -4 ;

4; 5) $[-5; 8]$; 6) $[2; +\infty)$; 7) $(-\infty; \frac{11}{7}]$; 8) $[3; 6)$; 9) $(0; 2]$. **30.25.** 1) $(-\infty; -1)$;

2) $[\frac{3}{2}; +\infty)$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **30.26.** 1) $(-\infty; -6) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$; 2) $\emptyset$;

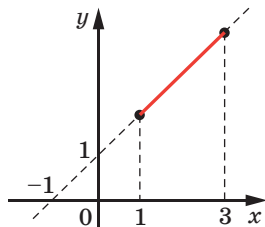
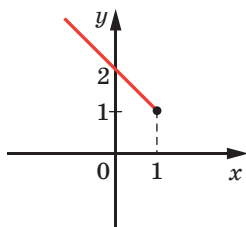
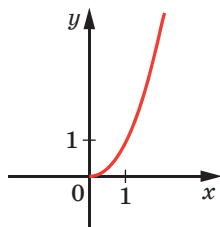
3) $[-3; 1]$; 4) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$. **30.29.** 1) Якщо $a < -\frac{4}{3}$, то розв'язків

немає; якщо $a = -\frac{4}{3}$, то один розв'язок; якщо $a > -\frac{4}{3}$, то два

розв'язки. Вказівка. Запишіть рівняння у вигляді $|3x - 4| - x = a$ і побудуйте графік функції $y = |3x - 4| - x$; 2) якщо $a \neq 1$, то один розв'язок; якщо $a = 1$, то безліч розв'язків. **30.30.** 1) Якщо $a < 2$, то розв'язків немає; якщо $a = 2$, то безліч розв'язків; якщо $a > 2$, то два розв'язки; 2) якщо $a < -4$ або $a > 4$, то розв'язків немає; якщо $a = -4$ або $a = 4$, то безліч розв'язків; якщо $-4 < a < 4$, то один розв'язок. **30.31.** $-2 < a \leq -1$. Вказівка. Скористайтесь геометричною інтерпретацією. **30.32.** $4 \leq a < 6$.

31.4. 1) Коренів немає; 2) -1 ; 3) 2 . **31.5.** 1) -3 ; -1 ; 2) коренів немає; 3) -1 . **31.15.** $k = -3,5$. **31.21.** 1) Графік складається з двох точок: $(0; 0)$ і $(1; 1)$; 2) графік складається з двох точок: $(0; 0)$ і $(-2; -4)$.

- 32.14.** 1) -10 ; 2) 25 ; 3) $-23,8$; 4) 13 ; 5) 216 ; 6) -20 .
32.15. 1) $13,4$; 2) 21 ; 3) -20 . **32.16.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; +\infty)$; 3) $\{0\}$; 6) $(-\infty; +\infty)$. **32.17.** 2) $(-\infty; 0]$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0]$; 5) $\{0\}$; 6) $(0; +\infty)$.
32.18. 4) $[3; +\infty)$; 5) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$; 7) $\{3\}$. **32.19.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) $[4; 4,5) \cup (4,5; +\infty)$. **32.20.** 6) -10 ; 10. **32.21.** 4) -7 ; 7. **32.24.** 1) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 2) $(-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$; 3) $[0; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $[0; +\infty)$; 5) $\{0\}$; 6) $\emptyset$; 7) $\{0\}$; 8) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 11) $\{0\}$. **32.25.** 1) $[0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; +\infty)$; 4) $\{2\}$. **32.26.** 4) $(-\infty; +\infty)$; 6) $[-5; 2)$. **32.27.** 1) $[-7; 7]$; 2) $(-3; -2] \cup [2; +\infty)$. **32.28.** 1) 167 ; 2) 2116 ; 3) коренів немає. **32.29.** 1) 4900 ; 2) коренів немає. **32.30.** 2) *Вказівка.* $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$. **32.31.** *Вказівка.* $-x^2 + 6x - 12 = -(x - 3)^2 - 3$. **32.32.** Вираз 2). **32.33.** 1) 0 ; 2) $[0; +\infty)$; 3) 0 ; 4) коренів немає; 5) коренів немає; 6) 1 ; 7) -2 ; 8) -1 ; 1; 9) 1 ; 10) 2 ; 11) 2 ; 1; 12) -1 ; 13) -1 . **32.34.** 1) 0 ; 2) 0 ; 3) $[0; +\infty)$; 4) коренів немає; 5) 1 ; 6) 3 ; 7) 1 ; 8) 1 ; 9) 3 ; 4; 10) -2 ; -1 . **32.35.** 1) $a > -1$; 2) $a = -1$; 3) $a < -1$. **32.36.** 1) $[-0,5; +\infty)$; 2) $\{-0,5\}$; 3) $\emptyset$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $[0; +\infty)$; 6) $\{0\}$. **32.37.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $\emptyset$; 3) $\{1\}$. **32.38.** 3) Див. рисунок; 6) див. рисунок; 8) див. рисунок.



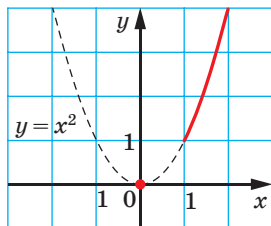
До задачі 32.38 (3)

До задачі 32.38 (6)

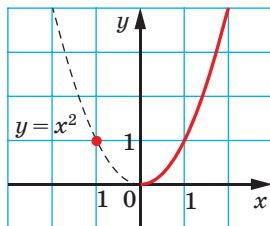
До задачі 32.38 (8)

- 32.40.** 5) $(5; 4)$; $(5; -4)$; $(-5; 4)$; $(-5; -4)$. **32.42.** 3) Координатні осі та всі точки першої та третьої чверті; 4) координатні осі та всі точки першої та другої чверті. **32.43.** 1) Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то a і b — числа однакового знака; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 3) якщо $b \neq 0$, то $a \geq 0$; якщо $b = 0$, то a — будь-яке число; 5) якщо $a \neq 0$, то $b \leq 0$; якщо $a = 0$, то b — будь-яке число. **32.44.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $\emptyset$; 4) $\{0\}$; 5) $(0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$; 7) $(-1; 0)$; 8) $(-1; 0]$. **32.45.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty) \cup \{0\}$;

3) $(0; 1)$; 4) $[0; 1]$; 5) $(1; +\infty)$; 6) $(1; +\infty)$; 7) $\emptyset$; 8) $\emptyset$. **32.46.** Див. рисунок. *Вказівка.* $D(y) = \{0\} \cup [1; +\infty)$. **32.47.** Див. рисунок.



До задачі 32.46



До задачі 32.47

32.48. 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. **32.49.** 1) $a < 0$ або $a = 1$; 2) $a \leq 1$. **32.50.** $0 \leq a < 4$ або $a > 4$. **32.51.** 1) $a = -9$ або $a > 0$; 2) $a \leq 0$ або $a = 1$; 3) $a = 0$ або $a \geq 1$. **32.52.** $a < 0$ або $a = 16$. **32.53.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geq 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 2) якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 0$; 3) якщо $a = 0$, то $x \geq 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 2$; 4) якщо $a < 0$, то немає коренів; якщо $a \geq 0$, то $x = a^2 + 2$; 5) якщо $a < 1$, то $x = 1$ або $x = a$; якщо $a \geq 1$, то $x = a$; 6) якщо $a = 2$, то $x \geq 2$; якщо $a \neq 2$, то $x = 2$.

33.11. *Вказівка.* Нехай $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ — дані раціональні числа. Тоді

їх сума дорівнює $\frac{mq+np}{nq}$, тобто є числом виду $\frac{s}{t}$, де $s \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{N}$.

33.12. *Вказівка.* Якщо припустити, що дана сума є числом раціональним, то із цього випливає, що дане ірраціональне число можна подати у вигляді різниці двох раціональних чисел. **33.13.** 1) Ні, наприклад, $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$; 2) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$; 3) ні, наприклад, $\sqrt{3} \cdot 0 = 0$. **33.15.** $a \in \mathbb{Q}$, $b = 0$. **33.16.** 1) $a = 11$, $b = -6$; 2) $a = 7$, $b = 4$. **33.20.** *Вказівка.* Покажіть, що виконується рівність $\sqrt{2}(a-b) = a-c$. **33.21.** $p = -2$, $q = -1$. *Вказівка.* Покажіть, що виконується рівність $\sqrt{2}(2+p) = -p-q-3$. **33.23.** *Вказівка.* Із рівності

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ випливає, що число $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ раціональне.

33.24. *Вказівка.* Нехай $a < b$, $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Розгляньте числа $\frac{a+b}{2}$ і

$a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$. **33.25.** Ні. *Вказівка.* Нехай $x + \sqrt{2} = a$, $a \in \mathbb{Q}$. Звідси $x = a - \sqrt{2}$.

Покажіть, що $x^3 + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}$, і скористайтесь тим, що $3a^2 + 1 \neq 0$. **33.26.** 1) Існує, наприклад, $x = 2 - \sqrt{3}$; 2) не існує. *Вказівка.*

Нехай $x + \sqrt{3} = n$, $\frac{1}{x} + \sqrt{3} = m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. Тоді $x = n - \sqrt{3}$ і $\frac{1}{x} = m - \sqrt{3}$. Звідси $(n - \sqrt{3})(m - \sqrt{3}) = 1$. Доведіть, що при цілих m

і n отримана рівність суперечлива. **33.27.** *Вказівка.* Розгляньте систему координат, початком координат якої є довільний вузол сітки, а координатні осі направлені по лініях сітки. За одиничний відрізок візьміть довжину сторони квадрата сітки. Тоді кожний вузол сітки матиме цілі координати. Розгляньте пряму $y = \sqrt{2}x$.

34.25. 4) $5 - 2\sqrt{3}$. **34.26.** 3) $-\sqrt{2}$. **34.27.** 0; -1 . *Вказівка.* Ліва та

права частини цього рівняння набувають тільки невід'ємних значень. **34.36.** 1) Коренів немає; 2) 3; 3) -1 ; 3. **34.37.** 1) 2; 2) -4 . **34.40.** 3) Шукана множина точок — це об'єднання двох променів: додатної півосі ординат і від'ємної півосі абсцис, включаючи по-

чаток координат. **34.41.** 1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо $a > 0$ і $b > 0$; $-\sqrt{\frac{a}{b}}$, якщо

$a < 0$ і $b < 0$; 2) $\sqrt{-a} - \sqrt{-b}$. **34.42.** 1) $2 - a$; 2) $b + 4$; 3) $-2b - 1$, якщо $b < -\frac{1}{2}$; $2b + 1$, якщо $b \geq -\frac{1}{2}$. **34.43.** 1) $5 - a$, якщо $1 < a < 5$; $a - 5$,

якщо $a \geq 5$; 2) $-3b - 1$, якщо $b < -\frac{1}{3}$; $3b + 1$, якщо $b \geq -\frac{1}{3}$.

35.27. 1) $6\sqrt{2}$; 2) $11\sqrt{2}$; 3) $10\sqrt{3}$; 4) $9\sqrt{5a}$; 5) $-a\sqrt{ab}$; 6) 0. **35.28.**

1) $-6\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{7b}$; 3) $10a^3\sqrt{a}$. **35.30.** 1) $16 + \sqrt{3}$; 2) $-10\sqrt{5} - 5$; 3) 1;

4) 1; 5) 4. **35.31.** 1) $10 - 4\sqrt{2}$; 2) 74; 3) 4; 4) 32. **35.38.** 1) $\sqrt{a} - 2$;

2) $\frac{6}{m - 2\sqrt{m}}$; 3) $\frac{4}{\sqrt{xy}}$; 4) $\frac{4\sqrt{a}}{16 - a}$; 5) $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 6) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$; 7) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c} + 5}$; 8) $\sqrt{a} - 1$;

9) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; 10) $\sqrt{x}$. **35.39.** 1) $\frac{4}{a + \sqrt{a}}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt{\frac{n}{m}}$; 5) $\sqrt{x}$;

6) $\frac{22}{9 - a}$. **35.40.** 1) $m^4\sqrt{-m}$; 3) $a^2b^6\sqrt{b}$; 4) $-2x^3\sqrt{y}$; 6) $m^3n^3\sqrt{mn}$;

7) $-3xy^7\sqrt{5x}$; 8) $8ab^4\sqrt{b}$; 9) $-11m^5b^9\sqrt{2m}$; 10) $mnp^7\sqrt{-p}$.

35.41. 1) $-m^9\sqrt{-m}$; 3) $a^{11}b^{12}\sqrt{a}$; 4) $-7a\sqrt{b}$; 6) $a^4b^4\sqrt{ab}$; 7) $-3x^7y^{17}\sqrt{3x}$;

8) $-2c^3n^3p^3\sqrt{-2p}$. **35.42.** 2) Оскільки з умови випливає, що $b \leq 0$, то

$b\sqrt{-b} = -\sqrt{-b^3}$; 3) $\sqrt{c^7}$; 5) $-\sqrt{x^3y^5}$; 13) $\sqrt{a^3b^3}$. **35.43.** 2) $-\sqrt{54n^2}$; 3) $\sqrt{p^5}$;
 9) $-\sqrt{-5a^9b}$. **35.46.** 1) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt{a}$; 3) $-\sqrt{ab}$; 4) $\frac{a-b+\sqrt{ab}}{a-b}$; 5) $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$;
 6) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$. **35.47.** $\frac{2\sqrt{a}}{a}$; **35.48.** $a+b$. **35.49.** 1) $\sqrt{2}+1$; 2) $\sqrt{3}+2$;
 3) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$; 4) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 5) $5-2\sqrt{3}$; 6) $3\sqrt{3}-1$. **35.50.** 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}+3$;
 3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}-1$; 5) $\sqrt{15}+\sqrt{3}$; 6) $5\sqrt{3}-4$. **35.51.** 1) 9; 2) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.
35.54. 1) $4+\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}+1$; 3) -2 . **35.57.** 1) $\sqrt{a-1}+1$; 2) $\sqrt{a-3}+2$;
 3) $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$; 4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$; 5) 1; 6) 2; 7) $\sqrt{a+2}$. **35.58.** 1) $\sqrt{a-4}+2$;
 2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2}$; 3) $\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{1}{2}$; 7) $\sqrt{2a-1}+\sqrt{a}$.

36.7. 1) 0; 1; 2) 0; 1; 3) коренів немає; 4) 1. **36.14.** Якщо $a \geq 0$,
 то один корінь; якщо $a < 0$, то коренів немає. **36.15.** $2\sqrt{a}+1$ при
 $a > 1$; 3 при $0 \leq a \leq 1$. **36.16.** 12 при $a > 36$; $2\sqrt{a}$ при $0 \leq a \leq 36$.
36.17. 1) $\sqrt{x+1}$; 2) якщо $4 < x < 8$, то $\frac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}$; якщо $x \geq 8$, то 1;
 3) якщо $2 \leq x \leq 4$, то $2\sqrt{x-2}$; якщо $x > 4$, то $2\sqrt{2}$; 4) якщо $0 \leq a < 1$,
 то 1; якщо $a \geq 1$, то $\sqrt{a}$. **36.18.** 1) Якщо $3 \leq a \leq 7$, то $2-\sqrt{a-3}$; якщо
 $a > 7$, то $\sqrt{a-3}-2$; 3) якщо $0 \leq x \leq 4$, то 2; якщо $x > 4$, то $\sqrt{x}$.
36.19. 1) 4; 2) $[-1; 0]$. **36.20.** 15.

37.12. 6; 7. **37.13.** 9; 10. **37.14.** 1) 0; 14; 2) коренів немає. **37.15.**
 1) 0; $\frac{4}{3}$; 2) $-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$. **37.20.** -3 ; -2 або 3 ; 4. **37.21.** -1 ; 0 або 0; 1.
37.22. 1) 4; 2) 0; -8 ; 3) -9 ; 9. **37.27.** 1) 0; -3 ; 3; 2) 0; 1; 3) 1; 4) -2 ;
 2; 5) 0; 6) коренів немає. **37.28.** 1) 0; 7; -7 ; 2) 0; 5; -7 ; 3) $-1,5$; $1,5$;
 4) -3 . **37.29.** 1) 2; 2) 3; 3) $0,5$; -2 ; 4) такого значення не існує.
37.30. 1) $a = 4$, $x_2 = -4$; 2) $a = 0$, $x_2 = 2$ або $a = -1$, $x_2 = \frac{9}{4}$; 3) $a = 3$,
 $x_2 = -2$. **37.31.** 1) $a = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$; 2) $a = -6$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$;
 3) такого значення не існує.

- 38.6. 1) 1; $-\frac{7}{6}$; 2) 1; 9; 3) $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$. 38.7. 1) 2; $-\frac{7}{3}$; 2) -3; $\frac{1}{7}$. 38.8. 1) 4; -3,5; 2) 1; $-\frac{1}{25}$; 3) 2; $\frac{4}{3}$; 4) $-3-\sqrt{15}$; $-3+\sqrt{15}$; 5) 3; 6; 6) $\frac{3-\sqrt{21}}{6}$; $\frac{3+\sqrt{21}}{6}$. 38.9. 1) 3; 9; 2) $\frac{-2-\sqrt{14}}{2}$; $\frac{-2+\sqrt{14}}{2}$; 3) коренів немає. 38.10. 1) $\sqrt{5}$; $\frac{-3\sqrt{5}}{2}$; 2) -1; $\sqrt{6}$; 3) 6; $-\frac{2}{3}$; 4) -1; $\frac{31}{22}$; 5) 6; -4,5. 38.11. 1) $-\sqrt{2}$; $-2\sqrt{2}$; 2) 2; $\sqrt{3}$; 3) 1; $\frac{3}{8}$; 4) 1; $-\frac{14}{3}$. 38.12. -20; 4. 38.13. 1; $-\frac{4}{3}$. 38.15. 7. 38.16. 38 см. 38.17. 6 і 14 або -14 і -6. 38.18. 10; 11. 38.19. 13; 14. 38.20. 8 см. 38.21. 6 см або 12 см. 38.22. 9; 11; 13. 38.23. 4; 6; 8; 10. 38.24. 16 мавп або 48 мавп. 38.25. 9 команд. 38.26. 15 сторін. 38.27. 1) $b = -2$; 2) $b = -12$ або $b = 12$. 38.28. 1) $b = 13,5$; 2) $b = -8$ або $b = 8$. 38.29. 1) -8; -7; 0; 1; 2) -2; 3; $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 3) -7; 7; 4) -1; 1; 0,6; -0,6; 5) $-3+\sqrt{14}$; 6) -2; 2; 7) коренів немає; 8) $\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$; 9) 2; 10) 3; 5; -3; -5; 11) 2; -2; 12) 0; 2; 4; 6; $3-\sqrt{7}$; $3+\sqrt{7}$; $3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3}$. 38.30. 1) -12; 2; -2; -8; 4) 3; 5) 1; 15; $-8-\sqrt{79}$; 6) $\frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3}$; 7) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; -6; 6; 8) 15; $-7-\sqrt{34}$; $-7+\sqrt{34}$; 9) 9; -9; 10) коренів немає; 11) 0; -1; 12) $-2-2\sqrt{3}$; $-2+2\sqrt{3}$; $4+2\sqrt{2}$. 38.31. 1) -10; 2) 3; 4) 1,5; 5) -7; 7. 38.32. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 3; 4) 7. 38.33. 1) -2; 2) 8. 38.34. 1) 1; 2) -3; 3) -6. 38.35. 1) 4; 2) 0; 25; 4. 38.36. 9; 3. 38.41. 1) $\sqrt{3}$; 1; 2) $\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$; 1; 3) -1; 2; 4) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$; -1. 38.42. 1) $-\sqrt{3}$; 1; 2) 0; 6. 38.43. 1) $x = -2a - 1$ або $x = -a$; 2) $x = 2a$ або $x = 4$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{25}{a}$ або $x = -\frac{1}{a}$; якщо $a = 0$, то коренів немає; 4) якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{1}{3}$ або $x = \frac{1}{2a-1}$. 38.44. 1) $x = 3a - 5$ або $x = -a$; 2) $x = -3a$

або $x = 4$; 3) якщо $a = 0$, то $x = 1$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$ або $x = \frac{1}{a}$.

38.45. 1) $b = 0$ або $b = -\frac{9}{7}$; 2) $b = -5$, або $b = 2\sqrt{6}$, або $b = -2\sqrt{6}$;

3) $b = 19$; 4) $b = 2$. **38.46.** 1) $b = 0$, або $b = -0,5$, або $b = 0,5$; 2) $b = -3$ або $b = -5$; 3) $b = 5$. **38.47.** $a < 0$ або $0 < a < \frac{4}{3}$.

39.8. $x_2 = 10$, $q = -20$. **39.9.** $x_2 = -6$, $p = -1$. **39.10.** $x_2 = 2$, $b = 14$. **39.11.** $x_2 = 1,6$, $m = -1,28$. **39.12.** $-20,5$. **39.13.** -7 . **39.18.** $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $c = 9$. **39.19.** $x_1 = -14$, $x_2 = -6$, $a = 84$. **39.20.** $x_1 = 9$, $x_2 = -2$, $m = -18$. **39.21.** $x_1 = 1$, $x_2 = -5$, $n = -5$. **39.22.** 1) $1,5$; 2) 69 . *Вказівка.* $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; 3) 57 ; 4) 414 ; 5) 567 . **39.23.** 1) 80 ;

2) $-\frac{57}{16}$; 3) $\sqrt{89}$. *Вказівка.* $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$. **39.24.** $x^2 + 12x + 17 = 0$. **39.25.** $x^2 - 18x + 49 = 0$. **39.26.** $6x^2 - 14x + 3 = 0$.

39.27. $x^2 - 15x + 8 = 0$. **39.28.** $a = 2$ або $a = -2$. **39.29.** $a = 6$ або $a = -6$. **39.31.** 1) 7 ; -7 ; 5 ; -5 ; 2) -11 ; 11 ; -1 ; 1 ; -4 ; 4. **39.32.** 1) -9 ; 9 ; -6 ; 6 ; 2) -17 ; 17 ; -7 ; 7 ; -3 ; 3 . **39.33.** $b = c = 0$ або $b = 1$, $c = -2$. **39.34.** $a = -3$. **39.35.** $a = 5$. **39.36.** $a = 2$. **39.37.** $a = 6$. **39.38.** $a = 9$ або $a = -1$. **39.39.** 1) $a = 2$; 2) такого значення a не існує. **39.40.** $a = 2$. **39.41.** $a = 0$. **39.42.** $a = 0$.

40.3. 4) $\frac{2a-3}{a-6}$; 5) $\frac{b-3}{2b-1}$; 6) $\frac{c+1}{c-2}$; 7) $\frac{m^2+m+1}{m+10}$; 8) $-\frac{x+4}{x+8}$; 9) $\frac{1-4n}{5n+1}$. **40.4.** 3) $\frac{4x-3}{x-1}$; 4) $\frac{2y+5}{y-1}$; 5) $\frac{a+1}{a-5}$; 6) $\frac{3-b}{b-1}$. **40.5.** 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) $x = 1$.

40.7. 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. **40.8.** 1) -3 ; 2) -2 ; 3) $\frac{4}{3}$. **40.9.** 1) -4 ;

2) -14 . **40.10.** 1) 1 ; 2) $\frac{2b+1}{b^2}$; 3) $-\frac{4}{c}$; 4) 4 . **40.14.** 1) $(x - y)(x - 5y)$;

2) $(a + 9b)(a - 4b)$; 3) $(3m + n)(m - 3n)$; 4) $(4x - y)(x - y)$.

40.15. 1) $(a - 4b)(a - 10b)$; 2) $(3b - 2c)(4b + 3c)$. **40.16.** 1) $\frac{a+3b}{2b-a}$.

40.17. 2) $\frac{2u+t}{t-3u}$. **40.18.** 1) Об'єднання прямих $y = 2x$ і $y = 4x$;

2) об'єднання прямих $2x - 3y + 1 = 0$ і $2x + y - 2 = 0$. *Вказівка.* Запишіть рівняння у вигляді: $4x^2 - (4y + 2)x - 3y^2 + 7y - 2 = 0$.

40.19. 1) Якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a = -2$, то коренів немає; якщо $a \neq 3$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{a+3}{a+2}$; 2) якщо $a = 7$, то

x — будь-яке число; якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq 7$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{2a+1}{a-1}$. **40.20.** Якщо $a = -8$, то x — будь-яке число;

якщо $a = 1$, то коренів немає; якщо $a \neq -8$ і $a \neq 1$, то $x = \frac{a+8}{a-1}$.

40.21. 1) $a > \frac{9}{8}$; 2) таких a не існує. **40.22.** Вказівка. Розгляньте

ліву частину даного рівняння як квадратний тричлен відносно a ; дискримінант цього квадратного тричлена має бути невід'ємним.

40.23. $\sqrt{2}$; $\frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$. Вказівка. Маємо:

$(\sqrt{2})^2 - x^2 \sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0$. Розгляньте ліву частину рівняння як

квадратний тричлен відносно $\sqrt{2}$. **40.24.** $\frac{1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$;

$\frac{-1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$.

41.1. 1) -4; 1; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 7; 4) -5; 10; 5) 5; 6) -2; 9; 7) -3; 2;

8) 4; -0,4. **41.2.** 1) -1; 2) -0,25; 3) 0,5; 6) 4; 8; 5) -3; 6) -3; 12; 7) -1; $\frac{2}{7}$; 8) -3; 13. **41.3.** 1) 6; 2) 5; 3) 7; 4) 6. **41.4.** 1) 10; 2) -7.

41.5. 1) $3-3\sqrt{2}$; $3+3\sqrt{2}$; 2) -23; 1; 3) -27; -1; 4) 3. **41.6.** 1) 4; 9;

2) 5. **41.7.** 1) -1,5; 2) -2; 3) -3; 4) 2; 5) 9; 6) 1; 7) 9. **41.8.** 1) -3;

2) 2; 3) -20; 2; 4) 15. **41.9.** 1) $-\frac{2}{3}$; 14; 2) -56; 60. **41.10.** 1) -15; 12;

2) -20; 2. **41.11.** 1) -5; 2) коренів немає; 3) $3\frac{1}{3}$; 4) 1. **41.12.** 1) -15;

1; 2) 1,5. **41.13.** 1) $-\frac{5}{4}$; 5; 2) 0; $\frac{-5-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; 3) -4; $-\frac{1}{2}$.

41.14. 1) 0; 2) $-\frac{5}{2}$; 0; 3) $-\frac{5}{2}$; 0. **41.15.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = 7$; якщо

$a = 7$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = 1$ або $x = 7$; 2) якщо $a \neq 1$ і $a \neq 7$, то $x = a$; якщо $a = 1$ або $a = 7$, то коренів немає; 3) якщо

$a \neq 2$ і $a \neq \frac{2}{3}$, то $x = 3a$ або $x = 2$; якщо $a = 2$ або $a = \frac{2}{3}$, то $x = 2$.

41.16. 1) Якщо $a \neq 1$ і $a \neq 0$, то $x = 2a$ або $x = a + 2$; якщо $a = 1$, то

$x = 3$; якщо $a = 0$, то рівняння невизначене; 2) якщо $a \neq 0$, то $x = 3a$ або $x = -2a$; якщо $a = 0$, то коренів немає; 3) якщо $a \neq -1,5$, то $x = 0$ або $x = 2a + 1$; якщо $a = -1,5$, то $x = 0$; 4) якщо $a \neq 1$, то $x = a - 2$; якщо $a = 1$, то коренів немає; 5) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{2}$,

якщо $a = 0$, то коренів немає. **41.17.** 1) Якщо $a \neq 3$, $a \neq -1$, то $x = a + 3$ або $x = a - 1$; якщо $a = 3$, то $x = 6$; якщо $a = -1$, то рівняння невизначене; 2) якщо $a \neq -2$, $a \neq -0,5$, $a \neq 1$, то $x = -2a$ або $x = -a - 1$; якщо $a = -2$, то $x = 4$; якщо $a = -0,5$, то $x = -0,5$; якщо $a = 1$, то розв'язків немає; 3) якщо $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = a$ або $x = a + 1$; якщо $a = -1$, то $x = -1$; якщо $a = 0$ або $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a = 2$, то $x = 3$; 4) якщо $a \neq 0$, $a \neq -1$, $a \neq 1$, то $x = \frac{a+1}{a}$ або $x = 1$; якщо $a = 0$ або $a = -1$, то $x = 1$; якщо $a = 1$,

то рівняння невизначене. **41.18.** 1) $a = 2\sqrt{5}$, або $a = -2\sqrt{5}$, або $a = 6$;

2) $a = -1$ або $a = 1$; 3) $a = 2$ або $a \leq 1$. **41.19.** 1) $a = -2$, $a = 2$, $a = -\frac{10}{3}$;

2) $a = 3$, або $a = 4$, або $a = \frac{7}{2}$; 3) $a \leq 0$ або $a = 2$.

42.7. 1) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -3 ; 3 ; 2) -6 ; -4 ; -1 ; 1 ; 3) 0 ; 3 ; 4) -1 ; -3 ; 1 .

42.8. 1) $-\frac{1}{3}$; 1 ; 2) $0,5$. **42.9.** 1) -1 ; 7 ; 2 ; 4 ; 2) -6 ; -2 ; $-4 - 2\sqrt{5}$; $-4 + 2\sqrt{5}$;

3) -2 ; 1 ; 4) $-\frac{5}{3}$; 10 . **42.10.** 1) 0 ; 1 ; 2) 0 ; -2 ; 3) -1 ; 4) -1 ; 1 ; 2 ; 4 ;

5) -3 ; 1 . **42.11.** 1) 1 ; 2) 0 ; -2 ; $\frac{-2 \pm \sqrt{54}}{2}$; 3) -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 4) -3 ; -2 ; 1 ;

2; 5) -3 ; 0 ; $\frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2}$. **42.12.** 1) 0 ; $\frac{3}{8}$; $\frac{3 \pm \sqrt{73}}{16}$; 2) $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. **42.13.** 1) -1 ;

0 ; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) -1 ; 6 ; $\frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}$. **42.14.** 1) -1 ; 12 ; 2) $-4 \pm \sqrt{21}$.

42.15. 1) $-5 \pm \sqrt{95}$; 2) $-4 \pm \sqrt{5}$. **42.16.** 1) -5 ; $-2 \pm \sqrt{5}$; 1 ; 2) -5 ; -1 ; 3 ;

3) -1 ; 3 . *Вказівка.* Зробіть заміну $x^2 - 2x = t$. **42.17.** 1) -2 ; $-\frac{1}{2}$;

2) -6 ; -4 ; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$. **42.18.** 1) -8 ; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35 \pm \sqrt{265}}{4}$; 2) -4 ; 5 ; $-5 \pm 3\sqrt{5}$.

42.19. 1) $\frac{1}{2}$; 2 ; $\frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$; 2) $-3 \pm \sqrt{15}$; 3) -1 ; $-\frac{1}{6}$; 4) 2 ; $\frac{1}{2}$; $2 \pm \sqrt{3}$;

- 5) $-1; -3; 3 \pm \sqrt{6}$. 42.20. 1) $1; \frac{-11 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $5 \pm \sqrt{31}; \frac{3 \pm \sqrt{159}}{5}$; 3) $7; \frac{1}{7}$;
 4) $\frac{1}{2}$; 2. 42.21. 1) $2; 4; -1; -\frac{1}{2}$; 2) $3; \frac{2}{3}$. 42.22. 1) $-3 \pm \sqrt{3}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$;
 2) $2 \pm \sqrt{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. 42.23. 1) $-3; -1$; 2) -2 ; 3. 42.24. 1) $2; 3$; 2) $3; 7$.
 42.25. 1) $\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$; 2) $3; 5; 9 \pm \sqrt{66}$; 3) $\frac{1}{2}; 2; 3 \pm 2\sqrt{2}$. 42.26. 1) $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$;
 2) $1; 5$; 3) $1; 4$. 42.27. 1) $2; -1 \pm \sqrt{3}$; 2) $1; \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; 3) $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}; \pm \frac{3\sqrt{11}}{11}$.
 42.28. 1) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) $-1; 3; \frac{11 \pm \sqrt{55}}{11}$; 3) $-1; 2$.

43.1. 75 км/год. 43.2. 50 км/год, 60 км/год. 43.3. 80 км/год, 60 км/год. 43.4. 80 км/год. 43.5. 12 км/год. 43.6. 12 сторінок. 43.7. 30 м³, 25 м³. 43.8. 6 днів. 43.9. 31 км/год. 43.10. 10 км/год. 43.11. 3 км/год. 43.12. 2 км/год або 2,25 км/год. 43.13. 60 км/год, 40 км/год. 43.14. 60 км/год. 43.15. 60 км/год. 43.16. 8 км/год. 43.17. 32 км/год. 43.18. $\frac{1}{4}$. 43.19. $\frac{7}{12}$. 43.20. 45 днів, 36 днів. 43.21. 15 год, 10 год. 43.22. 21 год, 24 год. 43.23. 80 г. 43.24. 30 кг. 43.25. 3 км/год. 43.26. 5 год. 43.27. 4 год, 6 год, 12 год. 43.28. 80 км/год. 43.29. 24 деталі. 43.30. 12 год.

45.6. 1) *Вказівка.* $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Доведіть, що числа 2 і -1 є коренями многочлена $A(x)$. 45.7. 1) $a = 6$. 45.8. $b = -5$. 45.9. 1) $a = -2, b = 1$; 2) $a = -25, b = 4$. 45.10. $a = -9, b = -9$. 45.11. $a = -3, b = -6, c = 8$. 45.12. $a = 1, b = 1$ або $a = 3, b = -1$. 45.13. $x + 3$. 45.14. *Вказівка.* Розгляньте даний вираз як многочлен відносно a з параметрами b і c . Покажіть, що b є коренем цього многочлена. 45.17. Ні. *Вказівка.* Доведіть, що при всіх цілих значеннях x значення многочлена кратне 3.

- 46.1. 1) $-1; -3; -5$; 2) $-1; 2; -\frac{1}{2}$; 3) $1; -1; -\frac{2}{3}$; 4) $1; -2; 5$; 2) -1 ;
 $\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$; 6) $-2; -3$. 46.2. 1) $1; -\sqrt{3}-1; \sqrt{3}-1$; 2) $2; -3$; 3) $-1; -2$;
 4) $1; -1; -\sqrt{5}-2; \sqrt{5}-2$; 5) $1; 2; \frac{\pm\sqrt{17}-5}{2}$; 6) $1; -2; -\frac{5}{3}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Алгоритм Евкліда 67

Вершина параболи 218

Взаємно однозначна відповідність 42

Виділення цілої частини з дробу 109

— — — раціонального дробу 329

Винесення множника з-під знака кореня 255

Вирази дробові 94

— раціональні 94

— тотожно рівні 98

— цілі 95

Відкрите півколо 47

Відкритий відрізок 47

Вільний член квадратного рівняння 275

— — цілого раціонального рівняння 336

Вітка гіперболи 162

— параболи 218

Властивості арифметичного квадратного кореня 245

— степеня із цілим показником 154, 155

Внесення множника під знак кореня 255

Гіпербола 162

Графічний метод розв'язування рівнянь 164

Густина розподілу простих чисел 88

Дискримінант квадратного рівняння 280

— — тричлена 298

Діагональний метод Кантора 245

Діаграма Ейлера 30

Ділене 328

Дільник 53, 328

Добування квадратного кореня 223

Допустимі значення змінної 95

Дріб нескінченний неперіодичний десятковий 238

— — періодичний десятковий 236

— правильний 329

— раціональний 95

Дробовий вираз 94

Другий коефіцієнт квадратного рівняння 275

Елемент множини 25

Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу 257

Знак квадратного кореня 223

Канонічний розклад натурального числа 80

Коефіцієнти квадратного рівняння 275

— рівняння першого степеня 274

Конгруенція 59

Корінь квадратний 222

— — арифметичний 222

— квадратного тричлена 298

— многочлена 331

Кратне 53

Куб різниці двох виразів 6

— суми — — 6

- Лема** 67
Лінійні множники 298
- Метод заміни змінної** 311
Множина 24
— дійсних чисел 238
— зліченна 47
— натуральних чисел 25
— нескінченна 39
— одноеlementна 25
— потужності континууму 52
— порожня 27
— раціональних чисел 25
— розв'язків нерівності 184
— скінченна 39
— цілих чисел 25
Множини рівні 25
— рівнопотужні 47
Модуль числа 207
- Наближене значення числа** 240
Найбільший спільний дільник 66
Найменше спільне кратне 68
Неповна частка 329
Нерівність лінійна з однією змінною 190
— -наслідок 190
— нестрога 173
— строга 173
Нерівності однакового знака 179
— протилежних знаків 179
— рівносильні 184
- Обернена пропорційність** 160
Об'єднання множин 32
Область визначення виразу 95
— — рівняння 131
— — функції 24
— значень функції 24
- Основна властивість раціонального дробу** 99
— теорема арифметики 79
Основні властивості числових нерівностей 173
Остача 58, 329
- Парабола** 218
Параметр 141
Переріз множин 31
Період дробу 236
Перший коефіцієнт квадратного рівняння 275
Підкореневий вираз 223
Підмножина 29
— власна 31
Подільність націло 53
Порядок числа 148
Потужність 46
Почленне додавання нерівностей 179
— множення — 179
- Радикал** 233
Рівняння біквдратне 311
— зворотне четвертого степеня 315
— з параметром 141
— квадратне 274
— — зведене 275
— — неповне 275
— -наслідок 133
— однорідне другого степеня 315
— першого степеня 274
— раціональне 135
— рівносильні 132
— третього степеня 317
— узагальнене зворотне четвертого степеня 315
— ціле раціональне 336
— четвертого степеня 317

Різниця множин 33

Розв'язання рівняння в цілих
числах 54

Розв'язок нерівності з однією
змінною 184

— системи нерівностей з одні-
єю змінною 195

Розкладання квадратного три-
члена на лінійні множники
298

Система нерівностей 195

Скорочення дробу 99

Спільна міра 243

Спільне кратне 68

Спільний дільник 66

— знаменник 112

Спільномірні відрізки 243

Стандартний вигляд числа 148

Старший коефіцієнт квадратно-
го рівняння 275

Степінь з нульовим показни-
ком 147

— із цілим від'ємним показни-
ком 147

Сторонні корені 133

Сукупність нерівностей (рів-
нянь) 199

Теорема Безу 331

— Вієта 291

—, обернена до теореми Вієта
292

— Ферма мала 81

Тотожність 98

Тричлен квадратний 298

Формула включення-
виключення 40

— коренів квадратного рівнян-
ня 281

Характеристична властивість
26

Ціла частина числа 13

Частка 328

— неповна 58, 329

Числа-близнюки 90

— взаємно прості 69

— ірраціональні 238

—, конгруентні за модулем 59

Число досконале 89

— просте 78

— просте Мерсенна 90

— складене 78

Числова пряма 189

Числовий відрізок 196

— — відкритий 197

— —, відкритий зліва 198

— —, відкритий справа 198

— проміжок 187

— промінь 188

— промінь відкритий 187

ЗМІСТ

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	4
§ 1. Повторення та систематизація навчального матеріалу з курсу алгебри 7 класу	5
1. Лінійне рівняння з однією змінною. Цілі вирази.....	5
2. Функція. Графік функції. Лінійна функція	13
3. Рівняння з двома змінними. Системи лінійних рівнянь із двома змінними	20
§ 2. Множини та операції над ними.....	24
4. Множина та її елементи	24
5. Підмножина. Операції над множинами	29
6. Скінченні множини. Взаємно однозначна відповідність	39
7. Нескінченні множини. Зліченні множини	46
• «Я бачу це, але ніяк не можу цьому повірити!»	51
§ 3. Основи теорії подільності	53
8. Подільність націло та її властивості.....	53
9. Ділення з остачею. Конгруенції та їхні властивості ...	58
10. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне двох натуральних чисел. Взаємно прості числа	66
11. Ознаки подільності.....	73
12. Прості та складені числа.....	78
• Про проблеми, пов'язані з простими числами	86
§ 4. Раціональні вирази	91
13. Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n - b^n$ і $a^n + b^n$	91
14. Раціональні дроби	94
15. Основна властивість раціонального дроби.....	98
16. Додавання і віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками	107

17. Додавання і віднімання раціональних дробів з різними знаменниками	112
18. Множення і ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня	120
19. Тотожні перетворення раціональних виразів	125
20. Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Раціональні рівняння	131
21. Раціональні рівняння з параметрами.....	141
22. Степінь із цілим від'ємним показником.....	146
23. Властивості степеня із цілим показником	154
24. Функція $y = \frac{k}{x}$ та її графік.....	160
§ 5. Нерівності	172
25. Числові нерівності та їхні властивості	172
26. Додавання і множення числових нерівностей. Оцінювання значення виразу	179
27. Нерівності з однією змінною.....	184
28. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною. Числові проміжки	186
29. Системи та сукупності лінійних нерівностей з однією змінною.....	195
30. Рівняння та нерівності, які містять знак модуля	207
§ 6. Квадратні корені. Дійсні числа.....	217
31. Функція $y = x^2$ та її графік	217
32. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь.....	222
• Чи ростуть у городі радикали?	234
• Перша задача першої математичної олімпіади в Україні	235
33. Множина дійсних чисел.....	236
• Коли таємне стає явним.....	243
• Про зліченність числових множин	244
34. Властивості арифметичного квадратного кореня	245

35. Тотожні перетворення виразів, які містять квадратні корені	255
36. Функція $y = \sqrt{x}$ та її графік	268
§ 7. Квадратні рівняння	274
37. Квадратні рівняння. Розв'язування неповних квадратних рівнянь	274
38. Формула коренів квадратного рівняння	280
39. Теорема Вієта	291
40. Квадратний тричлен	298
41. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь	305
42. Розв'язування рівнянь методом заміни змінної.....	310
• Таємна зброя Сципіона дель Ферро	321
43. Раціональні рівняння як математичні моделі реальних ситуацій.....	322
44. Ділення многочленів.....	328
45. Корені многочлена. Теорема Безу.....	331
46. Ціле раціональне рівняння.....	336
 Дружимо з комп'ютером	 339
 Відомості з курсу алгебри 7 класу.....	 347
Відповіді та вказівки до вправ	354
Предметний покажчик.....	378