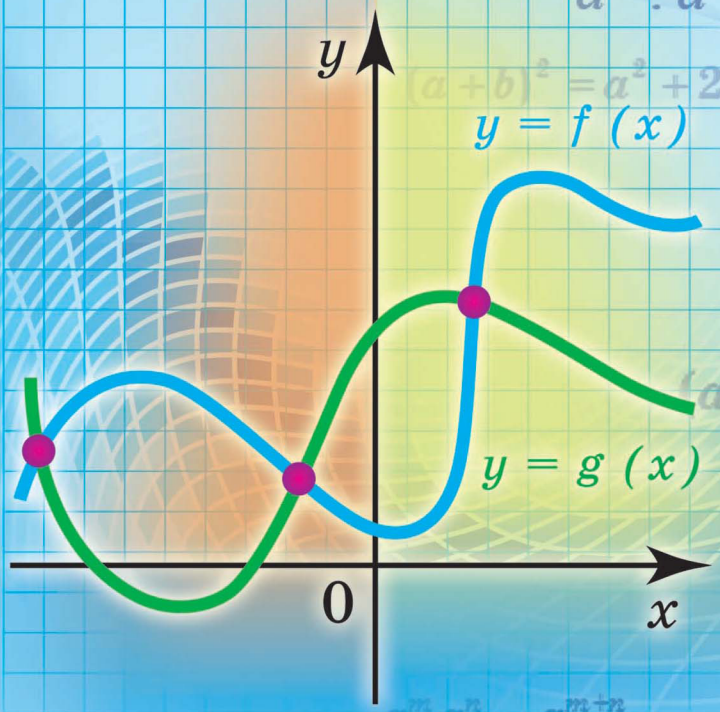
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

7

АЛГЕБРА



ГІМНАЗІЯ

Від авторів

УЧНЯМ

ЛЮБІ СЕМИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру**.

Алгебра — це стародавня й мудра наука. На вас чекає знайомство з її азами. Знати алгебру надзвичайно важливо. Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де не застосовувалися б досягнення цієї науки: фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «алгебраїчний інструмент».

Алгебра — не тільки корисний, а й дуже цікавий предмет, який розвиває кмітливість і логічне мислення. І ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся за допомогою підручника, який тримаєте в руках. Ознайомтеся з його будовою.

Текст підручника поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Найважливіші відомості виділено **жирним** ***шрифтом*** і *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і важкі задачі (особливо ті, що позначено зірочкою (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Учимося робити нестандартні кроки». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні алгебраїчні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни. Вони допоможуть вам навчитися приймати несподівані й нестандартні рішення не тільки в математиці, а й у житті.

У рубриці «Коли зроблено уроки» ви зможете прочитати оповідання з історії алгебри.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

У навчальній програмі з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів зазначено таке: «Зміст навчального матеріалу структуровано за темами відповідних навчальних курсів із визначенням кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителеві та авторам підручників надається право коригувати його залежно від прийнятої методичної концепції...».

Зважаючи на наведене, ми визнали за доцільне розпочати курс із теми «Лінійне рівняння з однією змінною». Це дає змогу істотно урізноманітнити дидактичний матеріал параграфа «Цілі вирази».

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

Бажаємо творчої наснаги й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

▲ закінчення доведення теореми;

● закінчення розв'язування прикладу;

завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;

рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

1. Вступ до алгебри

Алгебра — для вас новий шкільний предмет. Проте ви вже знайомі з «азбукою» цієї науки. Так, коли ви записували формули та складали рівняння, вам доводилося позначати числа буквами, «будуючи» **буквені вирази.**

Наприклад, записи a^2, $(x + y)^2$, $2(a + b)$, $\frac{x-y+z}{2}$, abc, $\frac{m}{n}$ є буквеними виразами.

Наголосимо, що не будь-який запис, складений із чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, є буквеним виразом. Наприклад, запис $2x +) - ($ є беззмістовним набором символів.

Разом з тим вираз, складений з однієї букви, вважають буквеним виразом.

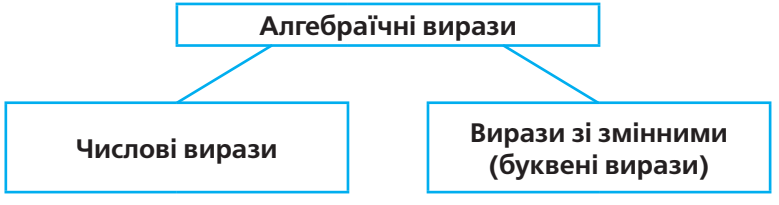
Розглянемо буквений вираз $2(a + b)$. Ви знаєте, що за його допомогою можна знайти периметр прямокутника зі сторонами a і b. Якщо, наприклад, букви a і b замінити відповідно числами 3 і 4, то дістанемо **числовий вираз** $2(3 + 4)$. За таких умов периметр прямокутника дорівнюватиме 14 одиницям довжини. Число 14 називають **значенням числового виразу** $2(3 + 4)$.

Зрозуміло, що замість букв a і b можна підставляти й інші числа, отримуючи щоразу новий числовий вираз.

Оскільки букви можна заміняти довільними числами, то ці букви називають **змінними**, а сам буквений вираз — **виразом зі змінними** (або зі змінною, якщо вона одна).

Розглянемо вираз $2x + 3$. Якщо змінну x замінити, наприклад, числом $\frac{1}{2}$, то дістанемо числовий вираз $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При цьому говорять, що $\frac{1}{2}$ — **значення змінної** x, а число 4 — значення виразу $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числові вирази та вирази зі змінними називають **алгебраїчними виразами.**



Розглянемо дві групи алгебраїчних виразів:

I група	II група
$x - y^3$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{(a+b)^2}$
$\frac{1}{3}b^2 + 5a$	$\frac{m}{n+3}$
$\frac{mn}{7}$	$5 - \frac{x}{y^2}$

Вирази кожної групи містять такі дії: додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, ділення. Однак вирази першої групи не містять ділення на вирази зі змінними. Тому вирази першої групи називають **цілими виразами**. Вирази другої групи не є цілими.

У 7 класі ми вивчатимемо цілі вирази.

ПРИКЛАД Значення змінних a, b і m такі, що $a - b = 4$, $m = -5$. Чому дорівнює значення виразу $7bm - 7am$?

Розв'язання. Використовуючи розподільну та сполучну властивості множення, отримуємо:

$7bm - 7am = 7m(b - a) = 7 \cdot (-5) \cdot (-4) = 7 \cdot 20 = 140.$

Відповідь: 140. ●

?

1. Як інакше називають буквені вирази?
2. Які вирази називають алгебраїчними?
3. Які алгебраїчні вирази називають цілими?

ВПРАВИ

1.° Знайдіть значення числового виразу:

1) $0{,}72 + 3{,}018$; 3) $1{,}8 \cdot 0{,}3$; 5) $72 : 0{,}09$;
2) $4 - 2{,}8$; 4) $5{,}4 : 6$; 6) $9 : 4$.

2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$; 3) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$; 5) $\frac{46}{75} : \frac{23}{45}$; 7) $10 : \frac{5}{11}$;
2) $\frac{3}{7} - \frac{2}{9}$; 4) $\frac{4}{9} \cdot 18$; 6) $\frac{2}{3} : 4$; 8) $2\frac{3}{8} + 4\frac{1}{6}$;

9) $6-1\frac{3}{5}$; 10) $4\frac{2}{7}-1\frac{4}{9}$; 11) $8\frac{3}{4}\cdot 1\frac{3}{14}$; 12) $1\frac{3}{5}:5\frac{1}{3}$?

3.° Обчисліть значення виразу:

1) 3,8 + (−2,5); 6) 0 − 7,8; 11) −48 · 0;
2) −4,8 + 4,8; 7) 0 − (−2,4); 12) −3,3 : (−11);
3) −1 + 0,39; 8) −4,5 − 2,5; 13) 3,2 : (−4);
4) 9,4 − (−7,8); 9) 8 · (−0,4); 14) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$;
5) 4,2 − 5,7; 10) −1,2 · (−0,5); 15) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^2$.

4.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $18\frac{5}{12}-\frac{7}{12}\cdot 1\frac{19}{21}-\frac{17}{72}\cdot\frac{2}{3}$;
2) $\left(6\frac{3}{4}-5\frac{1}{8}:1\frac{9}{32}\right)\cdot\frac{5}{11}$;
3) $(-1{,}42-(-3{,}22)):(-0{,}4)+(-6)\cdot(-0{,}7)$;
4) $\left(-\frac{7}{18}+\frac{11}{12}\right):\left(-\frac{19}{48}\right)$;
5) $\left(-3\frac{1}{12}-2\frac{1}{15}\right):\left(-5\frac{3}{20}\right)$?

5.° Обчисліть значення числового виразу:

1) $14\frac{7}{15}-3\frac{3}{23}\cdot\frac{23}{27}-1\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$;
2) $\left(5\frac{8}{9}:1\frac{17}{36}+1\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{5}{21}$;
3) $(-3{,}25-2{,}75):(-0{,}6)+0{,}8\cdot(-7)$;
4) $\left(-1\frac{3}{8}-2\frac{5}{12}\right):5\frac{5}{12}$.

6.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) добуток суми чисел −12 і 8 та числа 0,5;
2) сума добутку чисел −12 і 8 та числа 0,5;
3) частка суми й різниці чисел −1,6 і −1,2;
4) квадрат суми чисел −10 і 6;
5) сума квадратів чисел −10 і 6.

7.° Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) частка від ділення суми чисел $\frac{4}{9}$ і $-\frac{5}{6}$ на число $-\frac{14}{27}$;
2) різниця добутку чисел −1,5 і 4 та числа 2;
3) добуток суми та різниці чисел −1,9 і 0,9;
4) куб різниці чисел 6 і 8.

8.° Знайдіть значення виразу:

1) $2x - 3$ при $x = 4; 0; -3$;
2) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$ при $a = -6$, $b = 16$;
3) $3m - 5n + 3k$ при $m = -7$, $n = 1{,}4$, $k = -0{,}1$.

9.° Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}4y + 1$ при $y = -0{,}5; 8; -10$;
2) $\frac{2}{7}c-0{,}2d$ при $c = -28$, $d = 15$.

10.° Які з даних виразів є цілими:

1) $7a + 0{,}3$; 3) $\frac{a+b}{c}$; 5) $\frac{3m}{5}+\frac{5}{3m}$;

2) $5x\left(y-\frac{1}{3}\right)$; 4) $\frac{a+b}{4}$; 6) $9x-5y+\frac{1}{z}$?

11.° Користуючись термінами «сума», «різниця», «добуток», «частка», прочитайте алгебраїчні вирази та вкажіть, які з них є цілими:

1) $a - (b + c)$; 4) $2m - 10$; 7) $ac + bc$;

2) $a + bc$; 5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; 8) $\frac{a}{b+4}$;

3) $x-\frac{y}{z}$; 6) $(a + b)\,c$; 9) $(a - b)\,(c + d)$.

12.° Запишіть у вигляді виразу:

1) число, протилежне числу a;
2) число, обернене до числа a;
3) суму чисел x і y;
4) число, обернене до суми чисел x і y;
5) суму чисел, обернених до чисел x і y;
6) суму числа a та його квадрата;
7) частку від ділення числа a на число, протилежне числу b;
8) добуток суми чисел a і b та числа, оберненого до числа c;
9) різницю добутку чисел m і n та частки чисел p і q.

13.° Олівець коштує x грн, а зошит — y грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними:

1) скільки коштують 5 олівців і 7 зошитів;
2) на скільки більше треба заплатити за a зошитів, ніж за b олівців.

14.° Робітнику видали заробітну плату однією купюрою номіналом 100 грн, a купюрами номіналом 50 грн і b купюрами по 20 грн. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, яку суму грошей отримав робітник.

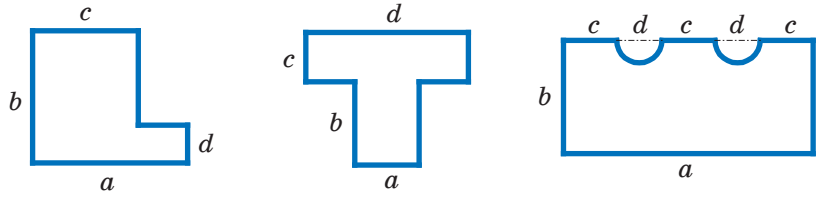
15.° Із двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, вирушили одночасно назустріч один одному два автомобілі зі швидкостями m км/год і n км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху вони зустрінуться.

16.° Із двох селищ, відстань між якими дорівнює s км, одночасно в одному напрямі вирушили пішохід і велосипедист. Пішохід іде попереду зі швидкістю a км/год, а велосипедист їде зі швидкістю b км/год. Запишіть у вигляді виразу зі змінними, через скільки годин після початку руху велосипедист наздожене пішохода. Обчисліть значення отриманого виразу при $a = 4$, $b = 12$, $s = 12$.

17.• Запишіть у вигляді виразу:
1) потроєний добуток різниці чисел a і b та їхньої суми;
2) суму трьох послідовних натуральних чисел, менше з яких дорівнює n;
3) добуток трьох послідовних парних натуральних чисел, більше з яких дорівнює $2k$;
4) число, у якому a тисяч, b сотень і c одиниць;
5) кількість сантиметрів у x метрах і y сантиметрах;
6) кількість секунд у m годинах, n хвилинах і p секундах.

18.• Запишіть у вигляді виразу:
1) добуток чотирьох послідовних натуральних чисел, більше з яких дорівнює x;
2) різницю добутку двох послідовних непарних чисел і меншого з них, якщо більше число дорівнює $2k + 1$;
3) кількість кілограмів у a тоннах і b центнерах.

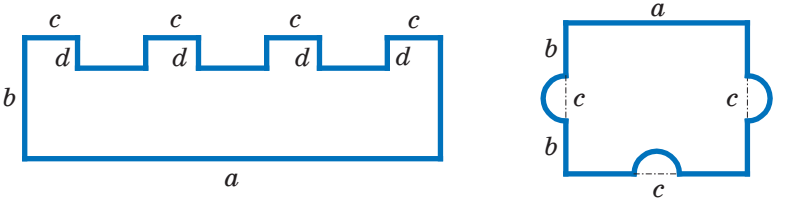
19.•• Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 1).



а *б* *в*

Рис. 1

20.•• Складіть вирази для обчислення довжини синьої лінії та площі фігури, яку вона обмежує (рис. 2).



а *б*

Рис. 2

21.$^{\cdot\cdot}$ Значення змінних a і b такі, що $a + b = -8$, $c = 4$. Чому дорівнює значення виразу:
1) $a + b - c$; 2) $0{,}5\,(a + b) + c$; 3) $3ac + 3bc$?

22.$^{\cdot\cdot}$ Значення змінних m і n такі, що $m - n = 5$, $k = -2$. Чому дорівнює значення виразу:
1) $(n - m)\,k$; 2) $2m - 2n + 3k$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23. (*Задача з українського фольклору.*) Мірошник бере за роботу $\frac{1}{10}$ змеленого борошна. Скільки пудів борошна намололи селянину, якщо додому він повіз 99 пудів?

24. До їдальні завезли капусту, моркву та картоплю. Капусти було 64 кг, маса моркви становила $\frac{5}{8}$ маси капусти, а маса картоплі — 180 % маси моркви. Скільки всього кілограмів овочів завезли до їдальні?

25. Відомо, що a і b — натуральні числа, а число $\frac{a}{b}$ — правильний дріб. Чи можна стверджувати, що:
1) $a - b > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; 3) $\frac{b}{a} > \frac{a}{b}$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

26. Доведіть, що:
1) число 5 є коренем рівняння $3x + 1 = 21 - x$;
2) число -2 не є коренем рівняння $x\,(x + 4) = 4$.

27. Розв'яжіть рівняння:
1) $0{,}3x = 9$; 2) $-2x = 3$; 3) $15x = 0$.

28. Розкрийте дужки:
1) $2\,(x - 3y + 4z)$; 2) $-0{,}4\,(-5 + 1{,}5y)$.

29. Зведіть подібні доданки:
1) $4a + 9a - 18a + a$; 2) $1{,}2a - a + b - 2{,}1b$.

30. Розкрийте дужки та зведіть подібні доданки:
1) $(x + 3{,}2) - (x + 4{,}5)$; 2) $1{,}4\,(a - 2) - (6 - 2a)$.

31. Знайдіть корінь рівняння:
1) $2x - 7 = x + 4$; 2) $-0{,}7\,(5 - x) = -4{,}9$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 27, 28 на с. 241, 242.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

32. Дано 12 натуральних чисел. Доведіть, що з них завжди можна обрати два, різниця яких ділиться націло на 11.

Книга про відновлення та протиставлення

Готуючись до нової теми, ви повторили основні властивості рівнянь (п. 27, 28 на с. 241, 242). Знаменно, що з однією із цих властивостей пов'язано походження слова «алгебра».

У IX ст. видатний учений Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (що означає Мухаммед, син Муси, з Хорезма) написав трактат про способи розв'язування рівнянь. У ті часи від'ємні числа вважали хибними, брехливими, абсурдними. Тому якщо під час розв'язування рівнянь отримували «хибне число», то його перетворювали на «справжнє», переносячи в іншу частину рівняння. Таке перетворення Мухаммед аль-Хорезмі назвав *відновленням* (арабською мовою — **«аль-джебр»**). **Знищення однакових членів в обох частинах** рівняння він назвав *протиставленням* (арабською мовою — «аль-мукабала»).

Сам трактат мав назву «Коротка книга про відновлення та протиставлення» (арабською мовою — «Кітаб аль-мухтасар фі хісаб аль-джебр ва-аль-мукабала»).

Слово «аль-джебр» із часом перетворилося на добре відоме всім слово «алгебра».

У XII ст. праці аль-Хорезмі було перекладено латинською мовою. У середньовічній Європі ім'я аль-Хорезмі записували як *Algorizmi*, і багато правил з його праць починалися словами *Dixit Algorizmi* («Алгоризмі сказав»). Поступово стали звикати, що із цих слів починається багато правил, а слово *Algorizmi* перестали пов'язувати з ім'ям автора. Так виник термін «алгоритм», яким позначають процес, що дозволяє за скінченну кількість кроків отримати розв'язок задачі.

З такими процесами ви докладно ознайомитеся на уроках інформатики.

Мухаммед ібн Муса аль-Хорезмі (IX ст.)

Середньоазіатський математик, астроном і географ. Він був першим, хто у своїх наукових працях розглядав алгебру як самостійний розділ математики.

§ 1 ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

- У цьому параграфі ви повторите властивості рівнянь, зможете вдосконалити навички розв'язування рівнянь і задач на складання рівнянь.
- Ви дізнаєтеся, що багато відомих вам рівнянь можна об'єднати в один клас.

2. Лінійне рівняння з однією змінною

Розглянемо три рівняння:

$$2x = -3,$$
$$0x = 0,$$
$$0x = 2.$$

Число $-1{,}5$ є єдиним коренем першого рівняння.

Оскільки добуток будь-якого числа на нуль дорівнює нулю, то коренем другого рівняння є будь-яке число.

Третє рівняння коренів не має.

Незважаючи на істотні відмінності отриманих відповідей, наведені рівняння зовні схожі: усі вони мають вигляд $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа.

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Наведемо ще приклади лінійних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 7;\ -0{,}4x = 2{,}8;\ -x = 0.$$

Зауважимо, що, наприклад, рівняння $x^2 = 0$, $(x - 2)(x - 3) = 0$, $|x| = 5$ не є лінійними.

Текст, виділений **жирним шрифтом**, роз'яснює зміст терміна «лінійне рівняння з однією змінною». У математиці речення, яке розкриває сутність терміна (поняття, об'єкта), називають **означенням**.

Отже, ми сформулювали (або, як говорять, дали) означення лінійного рівняння з однією змінною.

Розв'яжемо рівняння $ax = b$ для різних значень a і b.

1) Якщо $a \neq 0$, то, поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, отримаємо $x = \frac{b}{a}$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ має єдиний корінь, що дорівнює $\frac{b}{a}$.*

2) Якщо $a = 0$, то лінійне рівняння набуває такого вигляду: $0x = b$. Тоді можливі два випадки: $b = 0$ або $b \neq 0$.

У першому випадку отримуємо рівняння $0x = 0$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a = 0$ та $b = 0$, то рівняння $ax = b$ має безліч коренів: будь-яке число є його коренем.*

У другому випадку, коли $b \neq 0$, то при будь-якому значенні x маємо хибну рівність $0x = b$. Тоді можна зробити такий висновок: *якщо $a = 0$ та $b \neq 0$, то рівняння $ax = b$ коренів не має.*

Отримані висновки подамо у вигляді таблиці.

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x + 2{,}1)(8 - 2x) = 0$; 2) $|5x - 6| = 4$.

Розв'язання. 1) Ви знаєте, що добуток кількох множників дорівнює нулю тоді, коли принаймні один із множників дорівнює нулю, і навпаки, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, то й добуток дорівнює нулю. Тому для розв'язування даного рівняння достатньо розв'язати кожне з рівнянь:

$$3x + 2{,}1 = 0, \quad 8 - 2x = 0.$$

Звідси $x = -0{,}7$ або $x = 4$.

Відповідь: $-0{,}7$; 4.

2) Ураховуючи, що існують тільки два числа, -4 і 4, модулі яких дорівнюють 4, отримуємо:

$$5x - 6 = 4 \text{ або } 5x - 6 = -4.$$

Звідси $x = 2$ або $x = 0{,}4$.

Відповідь: 2; 0,4. ●

Звертаємо вашу увагу на те, що наведені рівняння не є лінійними, проте розв'язування кожного з них зводиться до розв'язування лінійного рівняння.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $(a - 1)\,x = 2$; 2) $(a + 9)\,x = a + 9$.

Розв'язання. 1) При $a = 1$ рівняння набуває вигляду $0x = 2$. У цьому випадку коренів немає. При $a \neq 1$ отримуємо: $x = \frac{2}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a = 1$, то рівняння не має коренів;

якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ рівняння набуває вигляду $0x = 0$. У цьому випадку коренем рівняння є будь-яке число. При $a \neq -9$ отримуємо: $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = -9$, то x — будь-яке число;

якщо $a \neq -9$, то $x = 1$. ●

?

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною?

2. Скільки коренів має лінійне рівняння $ax = b$, якщо:

1) $a \neq 0$; 2) $a = 0$, $b \neq 0$; 3) $a = b = 0$?

ВПРАВИ

33.° Які з наведених рівнянь є лінійними:

1) $3x = 6$; 3) $x^2 = 4$; 5) $\frac{4}{x} = 2$; 7) $x = 0$;

2) $x = 4$; 4) $|x| = 2$; 6) $\frac{1}{4}x = 2$; 8) $0x = 8$?

34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $18 - 16x = -30x - 10$; 4) $6x - 19 = -2x - 15$;

2) $-7x + 2 = 3x - 1$; 5) $0{,}2x + 3{,}4 = 0{,}6x - 2{,}6$;

3) $10 - 2x = 12 + x$; 6) $\frac{5}{6}x + 12 = \frac{1}{4}x - 2$.

35.° Знайдіть корінь рівняння:

1) $10x + 7 = 8x - 9$; 3) $2{,}7 + 1{,}9x = 2x + 1{,}5$;

2) $20 - 3x = 2x - 45$; 4) $\frac{13}{18}x + 13 = \frac{7}{12}x + 8$.

36.° Доведіть, що:

1) коренем рівняння $4\,(x - 5) = 4x - 20$ є будь-яке число;

2) рівняння $2y - 8 = 4 + 2y$ не має коренів.

37.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-3\,(x - 4) = 5x - 12$; 3) $26 - 4x = 3x - 7\,(x - 3)$;

2) $(16x - 5) - (3 - 5x) = 6$; 4) $-2\,(3 - 4x) + 5\,(2 - 1{,}6x) = 4$.

38.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4\,(13 - 3x) - 17 = -5x$;
2) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = 10$;
3) $14 - x = 0{,}5\,(4 - 2x) + 12$;
4) $4x - 3\,(20 - x) = 10x - 3\,(11 + x)$.

39.• Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}8 - (1{,}5x - 2) = -0{,}8 + 4{,}5x$;
2) $0{,}6x - 5\,(0{,}3x + 0{,}2) = 0{,}5\,(x - 1) - 0{,}8$;
3) $\frac{1}{7}\left(\frac{7}{8}y + 7\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}y + 1\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{12}$;
4) $\frac{5}{27}(5{,}4 - 8{,}1y) = 0{,}03 + \frac{4}{17}(6{,}8 - 3{,}4y)$.

40.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $0{,}9x - 0{,}6\,(x - 3) = 2\,(0{,}2x - 1{,}3)$;
2) $-0{,}4\,(3x - 1) + 8\,(0{,}8x - 0{,}3) = 5 - (3{,}8x + 4)$;
3) $\frac{4}{7}(0{,}56 - 4{,}2y) + 0{,}4 = \frac{5}{13}(0{,}52 - 6{,}5y)$.

41.• Розв'яжіть рівняння:

1) $8\,(7x - 3) = -48\,(3x + 2)$;
2) $4{,}5\,(8x + 20) = 6\,(6x + 15)$.

42.• Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $-36\,(6x + 1) = 9\,(4 - 2x)$;
2) $3{,}2\,(3x - 2) = -4{,}8\,(6 - 2x)$?

43.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(4x - 1{,}6)\,(8 + x) = 0$;
2) $x\,(5 - 0{,}2x) = 0$;
3) $(3x - 2)\left(4 + \frac{1}{3}x\right) = 0$;
4) $(2x + 1{,}2)\,(x + 1)\,(0{,}7x + 0{,}21) = 0$.

44.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(1{,}8 - 0{,}3y)\,(2y + 9) = 0$;
2) $(5y + 4)\,(1{,}1y - 3{,}3) = 0$.

45.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x - 4}{2} = \frac{16x + 1}{7}$;
2) $\frac{4y + 33}{3} = \frac{17 + y}{2}$.

46.• Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{3m + 5}{4} = \frac{5m + 1}{3}$;
2) $\frac{5x + 3}{5} = \frac{x - 5}{8}$.

47.• Чому дорівнює корінь рівняння:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{4} = 23$;
2) $\frac{x}{6} - \frac{x}{8} = \frac{7}{36}$;
3) $\frac{3x}{10} - \frac{4}{15} = \frac{x}{6}$?

48.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x}{6} - \frac{5x}{18} = \frac{4}{27}$;
2) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{4} = \frac{15}{14}$;
3) $-\frac{x}{8} + 1 = \frac{x}{12}$.

49.• При якому значенні змінної:

1) значення виразу $4x - 0{,}2\,(8x - 7)$ дорівнює $-22{,}6$;
2) вирази $0{,}2\,(3 - 2y)$ і $0{,}3\,(7 - 6y) + 2{,}7$ набувають рівних значень;

3) значення виразу $0{,}6y$ на $1{,}5$ більше за значення виразу $0{,}3\,(y - 4)$;

4) значення виразу $5x - 1$ у 5 разів менше від значення виразу $6{,}5 + 2x$?

50.• При якому значенні змінної:

1) вирази $6 - (2x - 9)$ і $(18 + 2x) - 3\,(x - 3)$ набувають рівних значень;

2) значення виразу $-4\,(2y - 0{,}9)$ на $2{,}4$ менше від значення виразу $5{,}6 - 10y$?

51.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + 6 = 13$; 4) $|x - 5| = 4$; 7) $|3x + 4| = 2$;

2) $|x| - 7 = -12$; 5) $|9 + x| = 0$; 8) $|2x + 1| + 13 = 14$;

3) $7|x| - 3 = 0$; 6) $|x - 4| = -2$; 9) $||x| - 3| = -5$.

52.• Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| - 8 = -5$; 3) $|x + 12| = 3$; 5) $|10x - 7| - 32 = -16$;

2) $|x| + 5 = 2$; 4) $|8 - 0{,}2x| = 12$; 6) $||x| - 2| = 2$.

53.• При якому значенні a рівняння:

1) $5ax = -45$ має корінь, що дорівнює числу 3;

2) $(a - 4)\,x = -5a + 4x - 7$ має корінь, що дорівнює числу -6?

54.• При якому значенні a рівняння:

1) $3ax = 12 - x$ має корінь, що дорівнює числу -9;

2) $(5a + 2)\,x = 8 - 2a$ має корінь, що дорівнює числу 2?

55.• Укажіть яке-небудь значення b, при якому буде цілим числом корінь рівняння:

1) $0{,}1x = b$; 2) $bx = 21$; 3) $\frac{1}{6}x = b$; 4) $bx = \frac{1}{6}$.

56.• Складіть рівняння, яке:

1) має єдиний корінь, що дорівнює числу -4;

2) має безліч коренів;

3) не має коренів.

57.•• Знайдіть усі цілі значення m, при яких є цілим числом корінь рівняння:

1) $mx = 3$; 2) $(m + 4)\,x = 49$.

58.•• Знайдіть усі цілі значення n, при яких є натуральним числом корінь рівняння:

1) $nx = -5$; 2) $(n - 6)\,x = 25$.

59.•• При якому значенні b мають один і той самий корінь рівняння:

1) $7 - 3x = 6x - 56$ і $x - 3b = -35$;

2) $2y - 9b = 7$ і $3{,}6 + 5y = 7\,(1{,}2 - y)$?

60.•• При якому значенні c мають один і той самий корінь рівняння:

1) $(4x + 1) - (7x + 2) = x$ і $12x - 9 = c + 5$;

2) $\frac{1}{7}cx = x + c$ і $6 - 3\,(2x - 4) = -8x + 4$?

61.•• При якому значенні a не має коренів рівняння:
1) $ax = 6$; 2) $(3 - a)\,x = 4$; 3) $(a - 2)\,x = a + 2$?

62.•• При якому значенні a будь-яке число є коренем рівняння:
1) $ax = a$; 2) $(a - 2)\,x = 2 - a$; 3) $a\,(a + 5)\,x = a + 5$?

63.•• При яких значеннях a має єдиний корінь рівняння:
1) $(a - 5)\,x = 6$; 2) $(a + 7)\,x = a + 7$?

64.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $(b + 1)\,x = 9$; 2) $(b^2 + 1)\,x = -4$.

65.•• Розв'яжіть рівняння $(m + 8)\,x = m + 8$.

66.•• Яким виразом можна замінити зірочку в рівності $6x + 8 = 4x + *$, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів; 2) має безліч коренів; 3) має один корінь?

67.•• У рівності $2\,(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ замініть зірочку таким виразом, щоб утворилося рівняння, яке:
1) не має коренів; 2) має безліч коренів; 3) має один корінь.

68.* Розв'яжіть рівняння:
1) $|\,x\,| + 3x = 12$; 2) $|\,x\,| - 4x = 9$; 3) $2\,(x - 5) - 6\,|\,x\,| = -18$.

69.* Розв'яжіть рівняння:
1) $2x - |\,x\,| = -1$; 2) $7\,|\,x\,| - 3\,(x + 2) = -10$.

70.* При яких цілих значеннях a корінь рівняння:
1) $x - 2 = a$; 2) $x + 7a = 9$; 3) $2x - a = 4$; 4) $x + 2a = 3$
є цілим числом, яке ділиться націло на 2?

71.* При яких цілих значеннях b корінь рівняння:
1) $x + 3 = b$; 2) $x - 2 = b$; 3) $x - 3b = 8$
є цілим числом, яке ділиться націло на 3?

72.* При яких значеннях b корінь рівняння є меншим від b:
1) $3x = b$; 2) $x = 2b$?

73.* При яких значеннях d корінь рівняння є більшим за d:
1) $4x = d$; 2) $\frac{1}{5}x = d$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

74. Один робітник може виконати завдання за 45 год, а другому для цього потрібно в $1\frac{1}{2}$ раза менше часу, ніж першому. За скільки годин вони виконають це завдання, працюючи разом? Яку частину завдання при цьому виконає кожен із них?

75. За перший день Василь прочитав $\frac{8}{15}$ сторінок книжки, за другий — $\frac{5}{12}$ сторінок книжки та за третій день — решту 12 сторінок. Скільки сторінок у цій книжці?

76. Відомо, що n — натуральне число. Яким числом, парним чи непарним, є значення виразу:
1) $4n$; 2) $2n - 1$; 3) $n(n + 1)$?

77. Чи є правильним твердження, що при будь-якому значенні a:
1) $2a > a$; 2) $2 \mid a \mid > \mid a \mid$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

78. Скільки існує шестицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

3. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

Вам неодноразово доводилося розв'язувати задачі за допомогою складання рівнянь. Різноманітність цих задач є найкращим підтвердженням універсальності цього методу. У чому ж секрет його сили?

Річ у тім, що умови несхожих між собою задач удається записати математичною мовою. Отримане рівняння — це результат перекладу умови задачі з української мови на математичну.

Часто умова задачі є описом якоїсь реальної ситуації. Складене за цією умовою рівняння називають **математичною моделлю** даної ситуації.

Зрозуміло, щоб дістати відповідь, рівняння треба розв'язати. Для цього в алгебрі розроблено різні методи та прийоми. З деякими з них ви вже знайомі, вивчення багатьох інших на вас ще чекає.

Знайдений корінь рівняння — це ще не відповідь задачі. Треба з'ясувати, чи не суперечить отриманий результат реальній ситуації, яка описана в умові задачі.

Розглянемо, наприклад, такі задачі.

1) За 4 год зібрали 6 кг ягід, причому кожної години збирали однакову за масою кількість ягід. Скільки кілограмів ягід збирали щогодини?
2) Кілька хлопчиків зібрали 6 кг ягід. Кожен із них зібрав по 4 кг. Скільки хлопчиків збирали ягоди?

За умовою обох задач можна скласти одне й те саме рівняння $4x = 6$, коренем якого є число 1,5. Проте в першій задачі відповідь «щогодини збирали 1,5 кг ягід» є прийнятною, а в другій — «ягоди збирали півтора хлопчика» — ні. Тому друга задача не має розв'язків.

Під час розв'язування задач на складання рівнянь бажано дотримуватися такої послідовності дій:

1) за умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);
2) розв'язати отримане рівняння;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

Цю послідовність дій, яка складається з трьох кроків, можна назвати **алгоритмом** розв'язування текстових задач.

ПРИКЛАД 1 Робітник мав виконати замовлення за 8 днів. Проте, виготовляючи щодня 12 деталей понад норму, він уже за 6 днів роботи не тільки виконав замовлення, а й виготовив додатково 22 деталі. Скільки деталей щодня виготовляв робітник?

Розв'язання. Нехай робітник виготовляв щодня x деталей. Тоді за нормою він мав виготовляти щодня $(x - 12)$ деталей, а всього їх мало бути виготовлено $8\,(x - 12)$. Насправді він виготовив $6x$ деталей. Оскільки за умовою значення виразу $6x$ на 22 більше за значення виразу $8\,(x - 12)$, то отримуємо рівняння:

$$6x - 22 = 8\,(x - 12).$$

Тоді $6x - 22 = 8x - 96$;

$$6x - 8x = -96 + 22;$$

$$-2x = -74;$$

$$x = 37.$$

Відповідь: 37 деталей. ●

ПРИКЛАД 2 Велосипедист проїхав 65 км за 5 год. Частину шляху він їхав зі швидкістю 10 км/год, а решту — зі швидкістю 15 км/год. Скільки часу він їхав зі швидкістю 10 км/год і скільки — зі швидкістю 15 км/год?

Розв'язання. Нехай велосипедист їхав x год зі швидкістю 10 км/год. Тоді зі швидкістю 15 км/год він їхав $(5 - x)$ год. Перша частина шляху становить $10x$ км, а друга — $15\,(5 - x)$ км. Оскільки весь шлях складав 65 км, то маємо рівняння

$$10x + 15\,(5 - x) = 65.$$

Звідси $10x + 75 - 15x = 65$;

$$-5x = -10;$$

$$x = 2.$$

Отже, зі швидкістю 10 км/год він їхав 2 год, а зі швидкістю 15 км/год — 3 год.

Відповідь: 2 год, 3 год. ●

ВПРАВИ

79.° Петро купив 24 зошити, причому зошитів у лінійку він купив на 6 більше, ніж у клітинку. Скільки зошитів кожного виду купив Петро?

80.° Із двох дерев зібрали 65,4 кг вишень, причому з одного дерева зібрали на 12,6 кг менше, ніж із другого. Скільки кілограмів вишень зібрали з кожного дерева?

81.° Периметр прямокутника дорівнює 7,8 см, а одна з його сторін на 1,3 см більша за другу. Знайдіть сторони прямокутника.

82.° Одна зі сторін прямокутника в 11 разів менша від другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 144 см.

83.° Три найвищі гірські вершини України — Говерла, Бребенескул і Петрос знаходяться в найвищому гірському масиві Чорногори в Карпатах. Сума їхніх висот дорівнює 6113 м, причому Говерла на 29 м вища за Бребенескул і на 41 м вища за Петрос. Знайдіть висоту кожної з вершин.

84.° Три найглибші печери України — Солдатська, Каскадна та Нахімовська знаходяться в Криму. Сума їхніх глибин дорівнює 1874 м, причому глибина Каскадної в 1,2 раза менша від глибини Солдатської та на 26 м більша за глибину Нахімовської. Знайдіть глибину кожної з печер.

85.° У будинку є 160 квартир трьох видів: однокімнатні, двокімнатні та трикімнатні. Однокімнатних квартир у 2 рази менше, ніж двокімнатних, і на 24 менше, ніж трикімнатних. Скільки в будинку квартир кожного виду?

86.° Троє робітників виготовили 96 деталей. Один із них виготовив у 3 рази більше деталей, ніж другий, а третій — на 16 деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив кожний робітник?

87.° У трьох цехах заводу працює 101 робітник. Кількість робітників першого цеху становить $\frac{4}{9}$ кількості робітників третього цеху, а кількість робітників другого цеху — 80 % кількості робітників третього. Скільки робітників працює в першому цеху?

88.° Велосипедисти взяли участь у триденному поході. За другий і третій дні вони проїхали відповідно 120 % і $\frac{4}{5}$ відстані, яку подолали за перший день. Який шлях вони проїхали за перший день, якщо довжина всього маршруту становить 270 км?

89.° У 6 великих і 8 маленьких ящиків розклали 232 кг яблук. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику, якщо в кожному маленькому ящику було на 6 кг яблук менше, ніж у кожному великому?

90.° У двох залах кінотеатру 534 місця. В одному залі 12 однакових рядів, а в другому — 15 однакових рядів. У кожному ряді першого залу на 4 місця більше, ніж у кожному ряді другого. Скільки місць у кожному залі кінотеатру?

91.° Відстань між двома містами мотоцикліст проїхав за 0,8 год, а велосипедист — за 4 год. Швидкість велосипедиста на 48 км/год менша від швидкості мотоцикліста. Знайдіть швидкість кожного з них.

92.° За 2 кг цукерок одного виду заплатили стільки, скільки за 3,5 кг цукерок другого виду. Яка ціна кожного виду цукерок, якщо 1 кг цукерок першого виду на 12 грн дорожчий за 1 кг цукерок другого виду?

93.° Кілограм огірків на 0,8 грн дешевший від кілограма помідорів. Скільки коштує 1 кг помідорів, якщо за 3,2 кг помідорів заплатили стільки ж, скільки за 3,6 кг огірків?

94.° В одному баку було в 3 рази більше води, ніж у другому. Коли в перший бак долили 16 л води, а в другий — 80 л, то в обох баках води стало порівну. Скільки літрів води було спочатку в кожному баку?

95.° На одній полиці було в 4 рази більше книжок, ніж на другій. Коли з першої полиці взяли 5 книжок, а на другу поставили 16 книжок, то на обох полицях книжок стало порівну. Скільки книжок було спочатку на кожній полиці?

96.° Зараз батькові 26 років, а його синові — 2 роки. Через скільки років батько буде в 5 разів старший за сина?

97.° Зараз матері 40 років, а її доньці — 18 років. Скільки років тому донька була в 3 рази молодша від матері?

98.• Для шкільної бібліотеки придбали 40 орфографічних і тлумачних словників української мови, заплативши разом 690 грн. Скільки було словників кожного виду, якщо орфографічний словник коштує 15 грн, а тлумачний — 24 грн?

99.• Вкладник поклав у банк 3000 грн на два різних депозитних рахунки, причому за першим рахунком йому нараховували 7 % річних, а за другим — 8 % річних. Через рік він одержав 222 грн прибутку. Яку суму було внесено на кожний рахунок?

100.• У касі було 19 купюр по 2 і 5 гривень на загальну суму 62 грн. Скільки купюр кожного виду було в касі?

101.• У двох сховищах була однакова кількість вугілля. Коли з першого сховища вивезли 680 т вугілля, а з другого — 200 т, то в першому залишилося в 5 разів менше вугілля, ніж у другому. Скільки тонн вугілля було в кожному сховищі спочатку?

102.• У Петра й Василя було порівну грошей. Коли на купівлю книжок Петро витратив 30 грн, а Василь — 45 грн, то в Петра залишилось у 2 рази більше грошей, ніж у Василя. Скільки грошей було в кожного хлопця спочатку?

103.• В одному мішку було в 5 разів більше борошна, ніж у другому. Коли з першого мішка пересипали 12 кг борошна в другий мішок, то маса борошна в другому мішку склала $\frac{5}{7}$ маси борошна в першому. Скільки кілограмів борошна було в кожному мішку спочатку?

104.• В одному контейнері було в 3 рази більше вугілля, ніж у другому. Коли з першого контейнера пересипали 300 кг вугілля в другий контейнер, то маса вугілля в першому контейнері склала 60 % маси вугілля в другому. Скільки кілограмів вугілля було в кожному контейнері спочатку?

105.• Одному робітникові треба було виготовити 90 деталей, а другому — 60. Перший робітник щодня виготовляв 4 деталі, а другий — 5 деталей. Через скільки днів першому робітникові залишиться виготовити вдвічі більше деталей, ніж другому, якщо вони почали працювати в один день?

106.• В одній цистерні було 200 л води, а в другій — 640 л. Коли з другої цистерни використали вдвічі більше води, ніж із першої, то в другій залишилося в 3,5 раза більше води, ніж у першій. Скільки літрів води використали з кожної цистерни?

107.• Із двох міст, відстань між якими дорівнює 385 км, виїхали назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі. Легковий автомобіль їхав зі швидкістю 80 км/год, а вантажний — 50 км/год. Скільки часу їхав до зустрічі кожен із них, якщо вантажний автомобіль виїхав на 4 год пізніше за легковий?

108.• З одного села до другого вирушив пішохід зі швидкістю 4 км/год, а через 1,5 год після цього з другого села назустріч йому виїхав велосипедист зі швидкістю 16 км/год. Через скільки хвилин після виїзду велосипедист зустрівся з пішоходом, якщо відстань між селами дорівнює 14 км?

109.• Відстань між двома містами річкою на 55 км менша, ніж по шосе. З одного міста до другого можна дістатися теплоходом за 6 год, а по шосе автобусом — за 3 год 30 хв. Знайдіть швидкості автобуса й теплохода, якщо швидкість теплохода на 30 км/год менша від швидкості автобуса.

110.• Теплохід пройшов 4 год за течією річки та 3 год проти течії. Шлях, який пройшов теплохід за течією, на 48 км більший за шлях, пройдений ним проти течії. Знайдіть швидкість теплохода в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2,5 км/год.

111.• Турист плив 5 год на плоту за течією річки та 1,5 год на моторному човні проти течії. Швидкість човна в стоячій воді дорівнює 24 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо проти течії турист проплив на 23 км більше, ніж за течією.

112. У двох ящиках було 55 кг печива. Коли з першого ящика переклали в другий $\frac{1}{3}$ маси печива, яке в ньому містилося, то в першому ящику залишилося на 5 кг більше печива, ніж стало в другому. Скільки кілограмів печива було в кожному ящику спочатку?

113. У двох кошиках було 24 кг груш. Коли з одного кошика переклали в другий $\frac{3}{7}$ маси груш, які були в першому, то маса груш у другому кошику стала вдвічі більшою за масу груш, які залишилися в першому. Скільки кілограмів груш було в кожному кошику спочатку?

114. На трьох полицях стояли книжки. На першій полиці стояло $\frac{4}{15}$ усіх книжок, на другій — 60 % усіх книжок, а на третій — на 8 книжок менше, ніж на першій. Скільки всього книжок стояло на трьох полицях?

115. У чотири бідони розлили молоко. У перший бідон налили 30 % усього молока, у другий — $\frac{5}{6}$ того, що в перший, у третій — на 26 л менше, ніж у перший, а в четвертий — на 10 л більше, ніж у другий. Скільки літрів молока розлили в чотири бідони?

116. Під час розселення туристів у намети виявилося, що коли в кожний намет поселити 6 туристів, то 5 туристам місця не вистачить, а якщо розселяти по 7 туристів, то 6 місць залишаться вільними. Скільки було туристів?

117. Під час підготовки новорічних подарунків для учнів 7 класу виявилося, що коли в кожний подарунок покласти по 4 апельсини, то не вистачить 3 апельсинів, а коли покласти по 3 апельсини, то залишаться зайвими 25 апельсинів. Скільки було апельсинів?

118. Робітник планував щодня виготовляти по 20 деталей, щоб вчасно виконати виробниче завдання. Проте щодня він виготовляв на 8 деталей більше, ніж планував, і вже за 2 дні до кінця терміну роботи виготовив 8 деталей понад план. Скільки днів за планом робітник мав виконувати завдання?

119. Готуючись до екзамену, учень планував щодня розв'язувати 10 задач. Оскільки він щодня розв'язував на 4 задачі більше, то вже за 3 дні до екзамену йому залишилося розв'язати 2 задачі. Скільки всього задач планував розв'язати учень?

120. У двоцифровому числі кількість десятків у 3 рази більша за кількість одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде на 54 меншим від даного. Знайдіть дане двоцифрове число.

121.• У двоцифровому числі кількість десятків на 2 менша від кількості одиниць. Якщо цифри числа переставити, то отримане число буде в $1\frac{3}{4}$ раза більшим за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

122.•• Із двох міст, відстань між якими дорівнює 270 км, виїхали одночасно назустріч один одному два автомобілі. Через 2 год після початку руху відстань між ними становила 30 км. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

123.•• Маємо два сплави міді й цинку. Перший сплав містить 9 % цинку, а другий — 30 %. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб отримати сплав масою 300 кг, який містить 23 % цинку?

124.•• Маємо два водно-сольових розчини. Перший розчин містить 25 % солі, а другий — 40 %. Скільки кілограмів кожного розчину треба взяти, щоб отримати розчин масою 50 кг, який містить 34 % солі?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

125. Обчисліть значення виразу:

1) $-9{,}6 : 12 - 29 : (-5{,}8) + 4 : (-25)$;

2) $-3{,}4 \cdot (4 - 4{,}6) + 12{,}4 \cdot (-0{,}8 - 2{,}2)$;

3) $\left(0{,}4 - \frac{3}{20}\right) \cdot 6\frac{2}{3} - 1{,}75 : \left(-7\frac{7}{8}\right)$;

4) $\left(6{,}3 : \left(-\frac{9}{20}\right) - 2{,}6 : \left(-\frac{1}{20}\right)\right) \cdot \left(-\frac{4}{19}\right) - 0{,}6 : (-0{,}36)$.

126. Знайдіть значення виразу:

1) $14 - 6x$, якщо $x = 4; -2; 0; -0{,}3; \frac{3}{8}$;

2) $a^2 + 3$, якщо $a = 7; -2; 0; 0{,}4; -1\frac{1}{3}$;

3) $(2m - 1)\,n$, якщо $m = 0{,}2$, $n = -0{,}6$.

127. Заповніть таблицю, обчислюючи значення виразу $-3x + 2$ для наведених значень x:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$-3x + 2$									

128. Яку цифру треба приписати ліворуч і праворуч до числа 37, щоб отримане число ділилося націло на 6?

129. Чи має корені рівняння:
1) $x^2 = 0$; 2) $x^2 = -1$; 3) $|x| = x$; 4) $|x| = -x$?
У разі ствердної відповіді вкажіть їх.

130. Чи може бути цілим числом значення виразу:
1) $\frac{1}{x}$; 2) $\frac{x}{x+1}$?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

131. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення кожного з виразів $n - 2$, $n + 24$, $n + 26$ є простим числом.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Обчисліть значення виразу $5 - 4b$ при $b = -2$.
А) 3; Б) −3; В) 13; Г) −13.

2. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$, якщо $m = 35$, $n = -18$.
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

3. Який із наведених виразів є записом різниці добутку чисел a і b та числа c?
А) $a - bc$; Б) $ab - c$; В) $a(b - c)$; Г) $(a - b)c$.

4. Серед наведених алгебраїчних виразів укажіть цілий.
А) $\frac{b}{b-7}$; Б) $\frac{b+5}{b-7}$; В) $\frac{b+5}{7}$; Г) $\frac{b+5}{b}$.

5. Знайдіть корінь рівняння $7x + 2 = 3x - 6$.
А) 2; Б) 1; В) −2; Г) −1.

6. Яке з рівнянь є лінійним?
А) $2x + 3 = 0$; В) $|x| - 4 = 0$;
Б) $\frac{1}{x} = 0$; Г) $(x - 1)(x - 2) = 0$.

7. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 6$.
А) 12; Б) 36; В) −6; Г) −1.

8. Розв'яжіть рівняння $2(x - 3) - (x + 4) = x - 10$.
А) 0; В) x — будь-яке число;
Б) коренів немає; Г) 10.

9. При якому значенні a рівняння $(a + 4)x = a - 3$ не має коренів?
А) 3; Б) −4; В) 0; Г) такого значення не існує.

10. Відомо, що 45 % числа a на 7 більше, ніж $\frac{1}{3}$ цього числа. Знайдіть число a.
А) 36; Б) 45; В) 60; Г) 90.

11. Три робітники виготовили 70 деталей. Перший робітник виготовив у 2 рази менше деталей, ніж другий, а третій — на 10 деталей більше, ніж перший.

Нехай перший робітник виготовив x деталей. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А) $x + 2x + 2x + 10 = 70$; В) $x + 2x + 2x - 10 = 70$;

Б) $x + 2x + x + 10 = 70$; Г) $x + 2x + x - 10 = 70$.

12. На першій ділянці було в 4 рази більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 12 кущів, то на другій стало у 2 рази менше кущів малини, ніж на першій.

Нехай на другій ділянці було спочатку x кущів. Яке з наведених рівнянь є математичною моделлю ситуації, описаної в умові задачі?

А) $2(4x - 12) = x + 12$; В) $4x + 12 = 2(x - 12)$;

Б) $2(4x + 12) = x - 12$; Г) $4x - 12 = 2(x + 12)$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Вираз зі змінними

Запис, складений із чисел, букв, знаків арифметичних дій і дужок, називають буквеним виразом або виразом зі змінними.

Алгебраїчні вирази

1) Числові вирази.
2) Вирази зі змінними (буквені вирази).

Цілий вираз

Вираз, який не містить ділення на вираз зі змінними, називають цілим виразом.

Лінійне рівняння з однією змінною

Рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — деякі числа, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Алгоритм розв'язування задач на складання рівнянь

1) За умовою задачі скласти рівняння (побудувати математичну модель задачі);
2) розв'язати отримане рівняння;
3) з'ясувати, чи відповідає знайдений корінь змісту задачі, і дати відповідь.

Розв'язування лінійного рівняння з однією змінною

Значення a і b	$a \neq 0$	$a = 0$, $b = 0$	$a = 0$, $b \neq 0$
Корені рівняння $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	Коренів немає

§ 2 ЦІЛІ ВИРАЗИ

- У цьому параграфі ви навчитеся спрощувати вирази, ознайомитеся з формулами та прийомами, які допомагають полегшити роботу з перетворення виразів.
- Ви дізнаєтеся, що піднесення числа до квадрата й куба — окремі випадки нової арифметичної дії.
- Ви навчитеся класифікувати алгебраїчні вирази.

4. Тотожно рівні вирази. Тотожності

Розглянемо дві пари виразів:

1) $x^5 - x$ і $5x^3 - 5x$;

2) $2(x - 1) - 1$ і $2x - 3$.

У таблицях наведено значення цих виразів при *деяких* значеннях змінної x.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - x$	-30	0	0	0	30
$5x^3 - 5x$	-30	0	0	0	30

x	-2	-1	0	1	2
$2(x - 1) - 1$	-7	-5	-3	-1	1
$2x - 3$	-7	-5	-3	-1	1

Бачимо, що ці значення збігаються для кожної окремо взятої пари виразів.

Чи збережеться підмічена закономірність при *будь-яких інших* значеннях x?

Для виразів, записаних у першій таблиці, відповідь на це запитання заперечна: якщо, наприклад, $x = 3$, то $x^5 - x = 3^5 - 3 = 240$, а $5x^3 - 5x = 5 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3 = 120$.

Проте значення виразів, записаних у другій таблиці, збігаються при *будь-яких* значеннях x. Доведемо це.

$2(x-1)-1=2x-2-1=2x-3$, тобто після спрощення вираз $2(x-1)-1$ перетворився у вираз $2x-3$.

Означення. Вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких значеннях змінних, що входять до них, називають тотожно рівними.

Наприклад, вирази $2(x-1)-1$ і $2x-3$ — тотожно рівні, а вирази x^5-x і $5x^3-5x$ не є тотожно рівними.

Ось ще приклади тотожно рівних виразів:

$$7(a+b) \text{ і } 7a+7b;$$
$$3x+y \text{ і } y+3x;$$
$$m^2np \text{ і } nm^2p;$$
$$a-(b+c) \text{ і } a-b-c.$$

Розглянемо рівність $7(a+b)=7a+7b$. Згідно з розподільною властивістю множення відносно додавання вона є правильною при будь-яких значеннях змінних a і b.

Означення. Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, що входять до неї, називають тотожністю.

З пари тотожно рівних виразів легко отримати тотожність.

Наприклад, усі рівності

$$3x+y=y+3x,$$
$$m^2np=nm^2p,$$
$$a-(b+c)=a-b-c$$

є тотожностями.

Зазначимо, що з тотожностями ви стикалися й раніше. Так, рівності, що виражають властивості додавання та множення чисел, є прикладами тотожностей:

$$a+b=b+a;$$
$$(a+b)+c=a+(b+c);$$
$$ab=ba;$$
$$(ab)c=a(bc);$$
$$a(b+c)=ab+ac.$$

Знайдемо значення виразу $11a-3a+2$ при $a=\frac{1}{8}$. Звичайно, можна відразу підставити в цей вираз замість a число $\frac{1}{8}$ та знайти значення числового виразу $11\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{8}+2$. Однак набагато зручніше спочатку звести подібні доданки, замінивши даний вираз $11a-3a+2$ на тотожно рівний: $8a+2$. Тепер знайдемо значення отриманого виразу при $a=\frac{1}{8}$. Маємо: $8\cdot\frac{1}{8}+2=3$.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому, називають **тотожним перетворенням** виразу.

Зведення подібних доданків і розкриття дужок — приклади тотожних перетворень виразів. Спрощуючи вираз, ми фактично заміняємо його простішим, тотожно рівним йому.

Для того щоб довести, що дана рівність є тотожністю (або, як ще говорять, довести тотожність), використовують такі прийоми (методи):

- *тотожно перетворюють одну із частин даної рівності, отримуючи іншу частину;*
- *тотожно перетворюють кожну із частин даної рівності, отримуючи один і той самий вираз;*
- *показують, що різниця лівої і правої частин даної рівності тотожно дорівнює нулю.*

ПРИКЛАД 1 Доведіть тотожність:

1) $2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) = -5a + 36b$;
2) $0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21)$;
3) $a(b - c) + b(c - a) = c(b - a)$.

Розв'язання. 1) Спростимо ліву частину рівності:

$$2(3a + 4b) + 3(a - 7b) - 7(2a - 7b) =$$
$$= 6a + 8b + 3a - 21b - 14a + 49b = -5a + 36b.$$

Тотожність доведено.

2) Спростимо ліву та праву частини рівності:

$0{,}6(x - 5) + 0{,}4(x + 1) = 0{,}6x - 3 + 0{,}4x + 0{,}4 = x - 2{,}6$;
$0{,}8(x + 2) + 0{,}2(x - 21) = 0{,}8x + 1{,}6 + 0{,}2x - 4{,}2 = x - 2{,}6$.

Отримали один і той самий вираз. Отже, тотожність доведено.

3) Розглянемо різницю лівої і правої частин:

$a(b - c) + b(c - a) - c(b - a) = ab - ac + bc - ab - bc + ac = 0$.

Тотожність доведено. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що рівність $(a + 2)(a - 3) = a^2 - 6$ не є тотожністю.

Розв'язання. Щоб довести, що рівність не є тотожністю, достатньо навести *контрприклад*: указати таке значення змінної (змінних, якщо їх кілька), при якому дана рівність не справджується.

Наприклад, при $a = 1$ маємо:

$$(a + 2)(a - 3) = (1 + 2)(1 - 3) = -6; \quad a^2 - 6 = 1 - 6 = -5.$$

Отже, дана рівність не є тотожністю. ●

1. Які вирази називають тотожно рівними?
2. Що називають тотожністю?
3. Що називають тотожним перетворенням виразу?
4. Які тотожні перетворення виразів ви знаєте?
5. Які прийоми використовують для доведення тотожностей?

ВПРАВИ

132.° Які властивості арифметичних дій дають можливість стверджувати, що дані вирази є тотожно рівними:
1) $ab + cd$ і $cd + ab$;
2) $(a + 1) + b$ і $a + (1 + b)$;
3) $a \cdot 4b$ і $4ab$;
4) $(x + 2)(x + 3)$ і $(3 + x)(2 + x)$;
5) $7(a - 4)$ і $7a - 28$?

133.° Чи є тотожністю рівність:
1) $2x - 12 = 2(x - 6)$;
2) $a - b = -(b - a)$;
3) $3m + 9 = 3(m + 9)$;
4) $(a+b)\cdot 1 = a+b$;
5) $(a+b)\cdot 0 = a+b$;
6) $(a - a)(b + b) = 0$;
7) $3a - a = 3$;
8) $4x + 3x = 7x$;
9) $a - (b + c) = a - b + c$;
10) $m + (n - k) = m + n - k$;
11) $4a - (3a - 5) = a + 5$;
12) $(a - 5)(a + 3) = (5 - a)(3 + a)$?

134.° Чи є тотожно рівними вирази:
1) $8(a - b + c)$ і $8a - 8b + 8c$;
2) $-2(x - 4)$ і $-2x - 8$;
3) $(5a - 4) - (2a - 7)$ і $3a - 11$?

135.° Порівняйте значення виразів a^2 і $|a|$ при $a = -1; 0; 1$. Чи можна стверджувати, що рівність $a^2 = |a|$ є тотожністю?

136.° Якому з наведених виразів тотожно дорівнює вираз $-3a + 8b - a - 11b$:
1) $-4a + 3b$; 2) $-3a + 3b$; 3) $-4a - 3b$; 4) $-3a - 3b$?

137.° Серед виразів $-10a + 7$, $-10a - 7$, $-14a + 7$, $-14a - 7$ знайдіть такий, який тотожно дорівнює виразу $-12a + (7 - 2a)$.

138.° Доведіть тотожність:
1) $-5x - 6(9 - 2x) = 7x - 54$;
2) $\frac{1}{3}(12 - 0{,}6y) + 0{,}3y = 0{,}1y + 4$;
3) $3(7 - a) - 7(1 - 3a) = 14 + 18a$;
4) $(6x - 8) - 5x - (4 - 9x) = 10x - 12$;
5) $3(2{,}1m - n) - 0{,}9(7m + 2n) = -4{,}8n$;
6) $\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{8}x + 6\right) - \frac{1}{6}\left(24 - 1\frac{1}{2}x\right) = 0$.

139.° Доведіть тотожність:

1) $-0{,}2\,(4b - 9) + 1{,}4b = 0{,}6b + 1{,}8$;
2) $(5a - 3b) - (4 + 5a - 3b) = -4$;
3) $5\,(0{,}4x - 0{,}3) + (0{,}8 - 0{,}6x) = 1{,}4x - 0{,}7$;
4) $\frac{1}{9}(3y - 27) - 2\left(\frac{1}{12}y - 1{,}5\right) = \frac{1}{6}y$.

140.• Які з наведених рівностей є тотожностями:

1) $(2a - 3b)^2 = (3b - 2a)^2$;
2) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;
3) $|a + 5| = a + 5$;
4) $|a - b| = |b - a|$;
5) $|a^2 + 4| = a^2 + 4$;
6) $|a + b| = |a| + |b|$;
7) $|a - 1| = |a| - 1$;
8) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$?

141.• Запишіть у вигляді рівності твердження:

1) сума протилежних чисел дорівнює нулю;
2) добуток даного числа та числа 1 дорівнює 1;
3) добутком даного числа та числа -1 є число, протилежне даному;
4) модулі протилежних чисел рівні;
5) різниця протилежних чисел дорівнює нулю.

Які із цих рівностей є тотожностями?

142.• Доведіть тотожність:

1) $4\,(2 - 3m) - (6 - m) - 2\,(3m + 4) = -17m - 6$;
2) $a + b - 10ab = 2a\,(3 - b) - 3b\,(a - 2) - 5\,(ab + a + b)$;
3) $6\,(5a - 3) + (10 - 20a) - (6a - 4) = 5a - (3a - (2a - 4))$.

143.• Доведіть тотожність:

1) $(3m - 7) \cdot 0{,}6 - 0{,}8\,(4m - 5) - (-1{,}7 - 1{,}4m) = 1{,}5$;
2) $7a\,(3b + 4c) - 3a\left(b + \frac{1}{3}c\right) = 9a\,(2b + 3c)$.

144.• Доведіть, що не є тотожністю рівність:

1) $(a + 3)^2 = a^2 + 9$;
2) $(b - 1)\,(b + 1) = (b - 1)\,b + 1$;
3) $(c + 1)^3 = c^3 + 1$;
4) $|m| - |n| = |n| - |m|$.

145.• Доведіть, що не є тотожно рівними вирази:

1) $4 - m^2$ і $(2 - m)^2$;
2) $|-m|$ і m;
3) $m^3 + 8$ і $(m + 2)\,(m^2 + 4)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

146. Пасажирський поїзд проходить відстань між двома станціями за 12 год. Якщо одночасно від цих станцій вирушать назустріч один одному пасажирський і товарний поїзди, то вони зустрінуться через 8 год після початку руху. За який час товарний поїзд може подолати відстань між цими станціями?

147. Фермер вирощував гречку на двох ділянках загальною площею 24 га. На одній ділянці він зібрав по 8 ц гречки з гектара, а на другій — по 9 ц з гектара. Скільки всього центнерів гречки зібрав фермер, якщо з другої ділянки він зібрав на 46 ц гречки більше, ніж із першої?

148. Відомо, що $a > 0$ і $a + b < 0$. Порівняйте:
1) b і 0; 2) $|a|$ і $|b|$.

149. Ціну товару спочатку збільшили на 50 %, а потім зменшили на 50 %. Збільшилася чи зменшилася початкова ціна товару та на скільки відсотків?

150. Загальна довжина річки Дніпро 2201 км, з них у межах України — 981 км. Загальна довжина річки Десна 1130 км, з них у межах України — 591 км. Яка із цих річок має більший відсоток довжини в межах України?

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

151. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 10. За один крок дозволяється, вибравши два числа, до кожного з них додати 5 або від кожного відняти 1. Чи можна за допомогою цих операцій домогтися того, щоб усі числа, записані на дошці, виявилися рівними?

5. Степінь з натуральним показником

Як ви знаєте, у математиці придумали спосіб коротко записувати добуток, усі множники якого рівні.

Наприклад, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Вираз $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ називають **степенем**, число $\frac{1}{2}$ — **основою степеня**, а число 3 — **показником степеня.**

Означення. Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Степінь з основою a та показником n позначають a^n і читають: «a в n-му степені». Степені з показниками 2 і 3 можна прочитати інакше: запис a^2 читають «a у квадраті», запис a^3 — «a в кубі».

Звернемо увагу, що в означенні степеня на показник n накладено обмеження $n > 1$. І це зрозуміло: адже не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника.

А чи може показник степеня дорівнювати 1? Відповідь на це запитання дає таке означення.

Означення. Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Таке означення дає змогу будь-яке число вважати степенем з показником 1.

Отже, з наведених означень випливає, що

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \text{ де } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

Легко підрахувати, що, наприклад, $2^5 = 32$. У таких випадках говорять, що число 2 **піднесли до п'ятого степеня** й отримали число 32. Також можна сказати, що виконали **дію піднесення до п'ятого степеня** числа 2.

Рівність $(-3)^2 = 9$ означає, що число -3 **піднесли до квадрата** й отримали число 9, а рівність $(-3)^3 = -27$ означає, що число -3 **піднесли до куба** й отримали число -27.

Зауважимо, що алгебраїчний вираз може бути побудований не тільки за допомогою додавання, віднімання, множення та ділення, а й за допомогою дії піднесення до степеня.

Очевидно, що коли $a > 0$, то $a^n > 0$; коли $a = 0$, то $0^n = 0$.

Отже, ***підносячи невід'ємне число до степеня, отримуємо невід'ємне число.***

При піднесенні від'ємного числа до степеня можливі два випадки.

1) Якщо показник степеня — парне число, то при піднесенні до степеня множники можна розбити на пари.

Наприклад, $(-2)^6 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2))$.

2) Якщо показник степеня — непарне число, то один множник залишиться без пари.

Наприклад, $(-2)^5 = ((-2)(-2)) \cdot ((-2)(-2)) \cdot (-2)$.

Оскільки кожні два від'ємні множники дають у добутку додатне число, то справедливе таке твердження:

підносячи від'ємне число до степеня з парним показником, отримуємо додатне число, а підносячи від'ємне число до степеня з непарним показником, отримуємо від'ємне число.

Чи можна, наприклад, число 5 піднести до степеня 0 або до степеня -2? Можна. Як це зробити, ви дізнаєтеся з курсу алгебри 8 класу.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(x - 10)^8 = -1$.

Розв'язання. Оскільки при піднесенні до степеня з парним показником будь-якого числа отримуємо невід'ємне число, то дане рівняння не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ●

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що значення виразу $10^{200} + 2$ ділиться націло на 3.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{200} складається із цифри 1 і двохсот цифр 0, а запис значення виразу $10^{200} + 2$ — із цифри 1, цифри 2 і ста дев'яноста дев'яти цифр 0. Отже, сума цифр числа, яка є значенням даного виразу, дорівнює 3. Тому й саме це число ділиться націло на 3. ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n.

Розв'язання. Якщо n — парне число, то вираз 9^n можна подати у вигляді добутку, який містить парну кількість дев'яток. Тоді можна записати: $9^n = (9 \cdot 9)(9 \cdot 9)\dots(9 \cdot 9)$. Оскільки $9 \cdot 9 = 81$, то останньою цифрою значення виразу $(9 \cdot 9)(9 \cdot 9)\dots(9 \cdot 9)$ є одиниця. Тому останньою цифрою значення виразу $9^n - 1$ є нуль. Отже, значення виразу $9^n - 1$ ділиться націло на 10 при будь-якому парному значенні n. ●

?

1. Що називають степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1?
2. Як читають запис a^n? a^2? a^3?
3. Що називають степенем числа a з показником 1?
4. Чому дорівнює значення виразу 0^n при будь-якому натуральному значенні n?
5. Яке число, додатне чи від'ємне, отримують при піднесенні до степеня додатного числа?
6. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення степеня від'ємного числа, якщо показник степеня є парним числом? непарним числом?

ВПРАВИ

152.° Прочитайте вираз, назвіть основу та показник степеня:

1) 9^6; 3) $0{,}3^5$; 5) $(-0{,}6)^3$; 7) 73^1;
2) $2{,}4^7$; 4) $(-8)^2$; 6) $(-a)^{11}$; 8) $(3p)^{12}$.

153.° Спростіть вираз, замінивши добуток однакових множників степенем:

1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$;
2) $(-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$;
3) $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;
4) $2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m \cdot 2m$;
5) $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$;
6) $\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{10 множників}}$;
7) $\underbrace{0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot \ldots \cdot 0{,}4}_{k \text{ множників}}$;
8) $\underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{m \text{ множників}}$.

154.° Користуючись означенням степеня, подайте у вигляді добутку степінь:

1) 11^6;
2) $0{,}1^4$;
3) $\left(-\frac{1}{6}\right)^2$;
4) $(5c)^3$;
5) $(-3{,}6)^7$;
6) $(a + b)^5$.

155.° Знайдіть значення виразу:

1) 2^5;
2) $0{,}6^2$;
3) $1{,}5^3$;
4) 0^6;
5) 1^{12};
6) $(-1)^{12}$;
7) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$;
8) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$.

156.° Виконайте піднесення до степеня:

1) 7^2;
2) $0{,}5^3$;
3) $1{,}2^2$;
4) $(-1)^7$;
5) $(-0{,}8)^3$;
6) $\left(\frac{1}{6}\right)^4$;
7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^6$;
8) $\left(-3\frac{1}{3}\right)^3$.

157.° Заповніть таблицю:

a	2	-2	10	-10	0,1	$-0{,}1$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
a^2								
a^3								
a^4								

158.° Заповніть таблицю:

a	-6	6	$-0{,}4$	0,4	3	0,03	$\frac{1}{2}$	-1	0
$10a^2$									
$(10a)^2$									

159.° Площа Кримського півострова — найбільшого півострова України дорівнює $2{,}55 \cdot 10^4$ км^2. Виразіть цю площу натуральним числом у квадратних кілометрах.

160.° Відстань від Землі до Сонця дорівнює $1{,}495 \cdot 10^{11}$ м. Виразіть цю відстань натуральним числом у метрах.

161.° Площа материків і островів Землі становить $1{,}49 \cdot 10^8$ км^2, а площа океанів — $3{,}61 \cdot 10^8$ км^2. Виразіть ці площі натуральними числами у квадратних кілометрах.

162.° Обчисліть:

1) $8^2 - 1^{10}$;
2) $0{,}3 \cdot 2^4$;
3) $(4{,}2 - 3{,}8)^4 \cdot 25^2$;
4) $(6^3 : 200 - 0{,}4^2) : 0{,}2^3$.

163.° Обчисліть:

1) $4^3 + 3^5$;
2) $0{,}6^3 - 0{,}4^3$;
3) $0{,}12 \cdot 5^4$.

164.° Знайдіть значення виразу:

1) $x^2 - x^3$, якщо $x = 0{,}1$;
2) $15a^2$, якщо $a = 0{,}4$;
3) $(x - y)^5$, якщо $x = 0{,}8$, $y = 0{,}6$;
4) a^2b^3, якщо $a = 0{,}6$, $b = 0{,}5$;
5) $(x^2 - y^2) : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
6) $(x^2 - y^2) : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
7) $x^2 - y^2 : (x - y)$, якщо $x = 5$, $y = 3$;
8) $x^2 - y^2 : x - y$, якщо $x = 5$, $y = 3$.

165.° Знайдіть значення виразу:

1) $16 - c^3$, якщо $c = 2$;
2) $(16x)^6$, якщо $x = 0{,}125$;
3) a^3b^2, якщо $a = 10$, $b = 0{,}1$;
4) $4a^4 - a$, якщо $a = 3$.

166.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) $(-5{,}8)^2$ і 0;
2) 0 і $(-3{,}7)^3$;
3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$;
4) -8^8 і $(-8)^8$;
5) $(-17)^6$ і 17^6;
6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

167.° Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) 0 і $(-1{,}9)^{10}$;
2) 0 і $(-76)^{15}$;
3) $(-0{,}1)^{12}$ і $(-12)^{25}$;
4) $\left(-4\frac{7}{9}\right)^9$ і $\left(-5\frac{8}{11}\right)^9$.

168.° Порівняйте з нулем значення виразів: 2^{100}; $(-2)^{100}$; -2^{100}; $-(-2)^{100}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

169.° Порівняйте з нулем значення виразів: 5^{101}; -5^{101}; $(-5)^{101}$; $-(-5)^{101}$. Чи є серед цих виразів такі, що набувають рівних значень?

170.° Чи є правильною рівність:

1) $3^2 + 4^2 = 7^2$;
2) $5^2 + 12^2 = 13^2$;
3) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 13^2$;
4) $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$?

171.° Доведіть, що $1^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 = 11^2$.

172.• Розташуйте в порядку зростання значення виразів:
1) $0{,}3$; $0{,}3^2$; $0{,}3^3$; 2) $-0{,}4$; $(-0{,}4)^2$; $(-0{,}4)^3$.

173.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-4)^7 \cdot (-12)^9$; 2) $(-5)^6 \cdot (-17)^{11}$; 3) $(-14)^4 \cdot (-25)^{14}$; 4) $(-7)^9 \cdot 0^6$.

174.• Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $(-2)^{14} \cdot (-3)^{15} \cdot (-4)^{16}$; 2) $(-5)^{17} \cdot (-6)^{18} \cdot (-7)^{19}$.

175.• Запишіть:
1) числа 16; 64; 256 у вигляді степеня з основою 4;
2) числа 0,09; 0,027; 0,00243 у вигляді степеня з основою 0,3.

176.• Подайте число: 1) 10 000; 2) -32; 3) 0,125; 4) $-0{,}00001$; 5) $-\frac{8}{343}$ у вигляді степеня з показником, більшим за 1, і з найменшою за модулем основою.

177.• Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) квадрат різниці чисел 7 і 5;
2) різниця квадратів чисел 7 і 5;
3) куб суми чисел 4 і 3;
4) сума кубів чисел 4 і 3.

178.• Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:
1) сума куба числа 5 і квадрата числа 8;
2) куб різниці чисел 9 і 8;
3) сума квадратів чисел 2,5 і 0,25;
4) квадрат суми чисел 7,8 і 8,2.

179.• Скільки в 1 км міститься:
1) метрів; 2) сантиметрів; 3) міліметрів?
Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

180.• Швидкість світла у вакуумі дорівнює 300 000 км/с.
1) Запишіть цю величину, використовуючи степінь числа 10.
2) Виразіть швидкість світла в метрах за секунду; запишіть результат, використовуючи степінь числа 10.

181.• Скільки в 1 $м^2$ міститься:
1) квадратних дециметрів; 3) квадратних міліметрів?
2) квадратних сантиметрів;
Відповідь запишіть у вигляді степеня числа 10.

182.• Які із чисел -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 є коренями рівняння:
1) $x^4 = 16$; 3) $x^2 + x = 2$;
2) $x^5 = -243$; 4) $x^3 + x^2 = 6x$?

183.• При якому значенні x дорівнює нулю значення виразу:
1) $(2x - 3)^2$; 2) $(x + 4)^4$; 3) $(6x - 1)^5$?

184.• Розв'яжіть рівняння:
1) $x^{10} = -1$; 2) $(x - 5)^4 = -16$.

185.• При яких натуральних значеннях n є правильною нерівність $8 < 3^n < 85$?

186.• При яких натуральних значеннях m є правильною нерівність $0{,}07 < 0{,}4^m < 0{,}5$?

187.•• Доведіть, що вираз $x^2 + (x - 1)^2$ набуває лише додатних значень.

188.•• Доведіть, що вираз $(x + 1)^2 + |x|$ набуває лише додатних значень.

189.•• Доведіть, що не має додатних коренів рівняння:

1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$; 2) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

190.•• Доведіть, що не має від'ємних коренів рівняння:

1) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 5 = 0$; 2) $x^8 + x^4 + 1 = x^7 + x^3 + x$.

191.•• При яких значеннях x і y є правильною рівність:

1) $x^2 + y^2 = 0$; 2) $(x - 1)^4 + (y + 2)^6 = 0$?

192.•• При яких значеннях x і y є правильною рівність $x^8 + (y - 3)^2 = 0$?

193.•• При якому значенні змінної набуває найменшого значення вираз:

1) $x^2 + 7$; 2) $(x - 1)^4 + 16$?

194.•• При якому значенні змінної набуває найбільшого значення вираз:

1) $10 - x^2$; 2) $24 - (x + 3)^6$?

195.•• Доведіть, що значення виразу:

1) $101^{101} + 103^{103}$ ділиться націло на 2;
2) $16^7 + 15^8 - 11^9$ ділиться націло на 10;
3) $10^{10} - 7$ ділиться націло на 3;
4) $6^n - 1$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

196.•• Доведіть, що значення виразу:

1) $10^{100} + 8$ ділиться націло на 9;
2) $111^n - 6$ ділиться націло на 5 при будь-якому натуральному значенні n.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

197. Обчисліть значення виразу

$$\left(3\frac{1}{3}\cdot 1{,}3 - 7{,}2\cdot\frac{2}{27} - 9{,}1 : 3{,}5\right) : \frac{2}{5}.$$

198. До зливку сплаву масою 400 кг, що містить 15 % міді, додали 25 кг міді. Яким став відсотковий вміст міді в новому зливку?

199. В одному мішку було 80 кг цукру, а в другому — 60 кг. З першого мішка взяли в 3 рази більше цукру, ніж із другого, після чого в другому мішку залишилося цукру у 2 рази більше, ніж у першому. Скільки кілограмів цукру взяли з кожного мішка?

200. Розв'яжіть рівняння:

1) $9(2x-1)-5(11-x)=3(x+4)$; 2) $5x-26=12x-7(x-4)$.

201. Відомо, що одне із чисел a, b і c додатне, друге — від'ємне, а третє дорівнює нулю, причому $|a|=b^2(b-c)$. Установіть, яке із чисел є додатним, яке від'ємним і яке дорівнює нулю.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

202. Порівняйте значення виразів:

1) $2^2\cdot 2^3$ і 2^5;

2) $4^2\cdot 4^1$ і 4^3;

3) $(3^3)^2$ і 3^6;

4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$;

5) $5^3\cdot 2^3$ і $(5\cdot 2)^3$;

6) $(0{,}25\cdot 4)^2$ і $0{,}25\cdot 4^2$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

203. У деякому місті з будь-якої станції метро можна доїхати до будь-якої іншої станції (можливо, з пересадками). Доведіть, що існує станція, яку можна закрити (без права проїзду через неї), і при цьому з будь-якої станції з тих, що залишилися, можна буде доїхати до будь-якої іншої.

6. Властивості степеня з натуральним показником

Розглянемо добуток двох степенів з однаковими основами, наприклад a^2a^5. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$a^2a^5=(aa)\cdot(aaaaa)=aaaaaaa=a^7.$$

Отже, $a^2a^5=a^{2+5}$.

Аналогічно легко переконатися в тому, що, наприклад, $a^3\cdot a^2=a^{3+2}=a^5$, $a\cdot a^9=a^{1+9}=a^{10}$.

Простежується закономірність: $a^ma^n=a^{m+n}$, де m і n — довільні натуральні числа.

Проте жодна кількість конкретних прикладів не може гарантувати, що наведена рівність є правильною для *будь-яких* натуральних m і n. Істинність її можна встановити тільки шляхом **доведення**.

У математиці твердження, справедливість якого встановлено за допомогою доведення, називають **теоремою.**

Теорема 6.1. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Доведення. Для $m > 1$ і $n > 1$ маємо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{m \text{ множників}}\underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{(m+n) \text{ множників}} = a^{m+n}.$$

Оскільки не прийнято розглядати добуток, що складається з одного множника, то для повноти доведення слід окремо розглянути випадки: $m = 1$ і $n > 1$; $m > 1$ і $n = 1$; $m = n = 1$. Так, якщо $m = 1$ і $n > 1$, то

$$a\cdot a^n = a\cdot\underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{aa\cdot\ldots\cdot a}_{(n+1) \text{ множників}} = a^{n+1}.$$

Випадки, коли $m > 1$ і $n = 1$ або коли $m = n = 1$, розгляньте самостійно. ▲

Тотожність $a^m a^n = a^{m+n}$ виражає **основну властивість степеня.**

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох і більше степенів. Наприклад,

$$3^2\cdot 3^3\cdot 3^7 = (3^2\cdot 3^3)\cdot 3^7 = 3^{2+3}\cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} = 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

Отже, ***перемножуючи степені з однаковими основами, показники додають, а основу залишають тією самою.***

Розглянемо вираз $a^9 : a^4$, де $a \neq 0$. Він є часткою двох степенів з однаковими основами. Оскільки $a^4\cdot a^5 = a^9$, то за означенням частки можна записати $a^9 : a^4 = a^5$, тобто $a^9 : a^4 = a^{9-4}$. Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.2. ***Для будь-якого числа a, відмінного від нуля, і будь-яких натуральних чисел m і n таких, що m > n, є справедливою рівність***

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. Розглянемо добуток степенів a^n і a^{m-n}. Використовуючи основну властивість степеня, маємо:

$$a^n\cdot a^{m-n} = a^{n+(m-n)} = a^{n+m-n} = a^m.$$

Тоді за означенням частки:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$ ▲

Із цієї теореми випливає таке правило:

при діленні степенів з однаковими основами від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника, а основу залишають тією самою.

Розглянемо вираз $(a^3)^4$. Він є степенем з основою a^3 і показником 4. Тому

$$(a^3)^4 = a^3a^3a^3a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3\cdot 4} = a^{12}.$$

Цей приклад підказує, що має місце така теорема.

Теорема 6.3. ***Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність***

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}. \blacktriangle$$

Із цієї теореми випливає таке правило:

при піднесенні степеня до степеня показники перемножують, а основу залишають тією самою.

Наприклад, $(3^7)^2 = 3^{7\cdot 2} = 3^{14}$, $(x^k)^3 = x^{k\cdot 3} = x^{3k}$.

Покажемо, як можна перетворити степінь добутку, наприклад вираз $(ab)^3$:

$$(ab)^3 = (ab)\cdot(ab)\cdot(ab) = (aaa)\cdot(bbb) = a^3b^3.$$

У загальному випадку має місце така теорема.

Теорема 6.4. ***Для будь-яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n є справедливою рівність***

$$(ab)^n = a^nb^n.$$

Доведення. Очевидно, що для $n = 1$ рівність, яка доводиться, є правильною. Для $n > 1$ маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}}\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^nb^n. \blacktriangle$$

Аналогічна властивість має місце й для добутку трьох або більше множників. Наприклад, $(abc)^n = ((ab)\cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^nb^nc^n$.

Отже, ***при піднесенні добутку до степеня кожний множник підносять до степеня й отримані результати перемножують.***

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз: 1) $(a^5)^2\cdot(a^6)^7$; 2) $(-a^4)^9$; 3) $(-a^4)^8$.

Розв'язання. 1) Застосувавши послідовно правило піднесення степеня до степеня та правило множення степенів з однаковою основою, отримаємо:

$$(a^5)^2\cdot(a^6)^7 = a^{10}\cdot a^{42} = a^{52}.$$

2) Оскільки $-a^4 = -1 \cdot a^4$, то, застосувавши правило піднесення добутку до степеня, отримаємо:

$$(-a^4)^9 = (-1 \cdot a^4)^9 = (-1)^9 \cdot (a^4)^9 = -1 \cdot a^{36} = -a^{36}.$$

3) Маємо: $(-a^4)^8 = (-1 \cdot a^4)^8 = (-1)^8 (a^4)^8 = 1 \cdot a^{32} = a^{32}$. ●

ПРИКЛАД 2 Подайте у вигляді степеня вираз $216a^3b^6$.

Розв'язання. Маємо: $216a^3b^6 = 6^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 = (6ab^2)^3$. ●

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9$.

Розв'язання. $\left(1\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. ●

ПРИКЛАД 4 Порівняйте значення виразів:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ і $(-11)^{16}$;
2) $(-12)^{19}$ і $(-12)^{15}$;
3) 5^{30} і 9^{20};
4) 16^3 і 65^2.

Розв'язання. 1) Маємо: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$. Разом з тим $(-11)^{16} > 0$.

Отже, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Оскільки $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а числа, що порівнюються, від'ємні, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Оскільки $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ і $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Маємо: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Отже, $16^3 < 65^2$. ●

ПРИКЛАД 5 Якою цифрою закінчується значення виразу 2^{100}?

Розв'язання. Маємо: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$. Оскільки $6 \cdot 6 = 36$, то добуток будь-яких чисел, що закінчуються на 6, є числом, остання цифра якого дорівнює 6.

Тому коли число закінчується цифрою 6, то будь-який його степінь закінчується цифрою 6.

Відповідь: 6. ●

?

1. Запишіть тотожність, яка виражає основну властивість степеня.
2. Як помножити степені з однаковими основами?
3. Як поділити степені з однаковими основами?
4. Як піднести степінь до степеня?
5. Як піднести добуток до степеня?

ВПРАВИ

204.° Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^5m^4; 5) $y^3y^5y^9$; 9) $x^4xx^{11}x^2$;
2) xx^7; 6) c^8c^9c; 10) $(ab)^5\cdot(ab)^{15}$;
3) a^3a^3; 7) $(b-c)^{10}(b-c)^6$; 11) $(2x+3y)^6\cdot(2x+3y)^{14}$;
4) $6^8\cdot6^3$; 8) $11^2\cdot11^4\cdot11^6$; 12) $(-xy)^2\cdot(-xy)^7\cdot(-xy)^9$.

205.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^5a^8; 3) a^9a; 5) $(m+n)^{13}\cdot(m+n)$;
2) a^2a^2; 4) aa^2a^3; 6) $(cd)^8\cdot(cd)^{18}\cdot(cd)$.

206.° Замініть зірочку таким степенем з основою a, щоб виконувалася рівність:

1) $a^6\cdot *=a^{14}$; 2) $*\cdot a^6=a^7$; 3) $a^{10}\cdot *\cdot a^2=a^{18}$.

207.° Подайте вираз a^{12} у вигляді добутку двох степенів з основами a, один з яких дорівнює:

1) a^6; 2) a^4; 3) a^3; 4) a^5; 5) a.

208.° Подайте у вигляді степеня частку:

1) $a^{12}:a^3$; 2) $b^6:b$; 3) $c^7:c^6$; 4) $(a+b)^8:(a+b)^4$.

209.° Знайдіть значення виразу:

1) $7^7:7^5$; 2) $10^{18}:10^{14}$; 3) $0{,}6^9:0{,}6^6$; 4) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^5:\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$.

210.° Виконайте ділення:

1) $m^{10}:m^2$; 2) $x^5:x^4$; 3) $y^{18}:y^6$.

211.° Подайте у вигляді степеня з основою m вираз:

1) $(m^5)^3$; 2) $(m^3)^4$; 3) $((m^2)^4)^6$; 4) $(m^7)^2\cdot(m^4)^9$.

212.° Подайте у вигляді степеня з основою n вираз:

1) $(n^2)^8$; 2) $(n^9)^5$; 3) $((n^3)^2)^{10}$; 4) $(n^{12})^4\cdot(n^{21})^2$.

213.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ab)^6$; 3) $(3c)^7$; 5) $(-0{,}2cd)^4$;
2) $(mnp)^5$; 4) $(-8xy)^3$; 6) $\left(\frac{3}{7}kt\right)^9$.

214.° Подайте степінь у вигляді добутку степенів:

1) $(ax)^2$; 2) $(xyz)^{12}$; 3) $(7m)^8$; 4) $(-0{,}3bc)^{11}$.

215.° Спростіть вираз:

1) $-x\cdot x^2$; 3) $-x\cdot(-x)^2$;
2) $(-x)^2\cdot x$; 4) $(-x)\cdot(-x)^2\cdot(-x)$.

216.° Спростіть вираз:

1) $(-a)^2\cdot a^3$; 2) $-a^2\cdot a^3$; 3) $a^2\cdot(-a)^3$; 4) $-a^2\cdot(-a)^3$.

217.° Спростіть вираз:

1) $(-a^5)^2$; 2) $(-a^3)^3$; 3) $(-a^4)^7 \cdot (-a^2)^6$.

218.° Спростіть вираз:

1) $((-a^6)^5)^9$; 2) $((-a^{11})^2)^3$.

219.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^3b^3; 3) $9m^2n^2$; 5) $-\frac{27}{343}c^3d^3$;

2) $-m^7$; 4) $64x^3y^3$; 6) $0{,}0001k^4p^4$.

220.° Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $x^{12}y^{12}$; 2) $-125m^3n^3$; 3) $32p^5q^5$; 4) $1\,000\,000\,000a^9b^9c^9$.

221.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):

1) $2^3 \cdot 2^4$; 3) $0{,}2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}2^3$; 5) $2^{12} : 2^8$; 7) $\left(\frac{1}{3}\right)^9 \cdot 9^9$;

2) $(3^2)^3$; 4) $0{,}5^{12} \cdot 2^{12}$; 6) $(3^4)^5 : 3^{19}$; 8) $2{,}5^5 \cdot 40^5$.

222.° Подайте вираз у вигляді степеня та обчисліть його значення (у разі потреби скористайтеся таблицею степенів чисел 2 і 3, розташованою на форзаці підручника):

1) $2^2 \cdot 2^3$; 3) $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$; 5) $7^9 \cdot \left(\frac{1}{14}\right)^9$;

2) $(2^2)^3$; 4) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 6) $12{,}5^3 \cdot 8^3$.

223.° Знайдіть у наведених прикладах помилки:

1) $a^4a^3 = a^{12}$; 4) $3^2 \cdot 5^2 = 15^4$; 7) $3 \cdot 4^3 = 12^3$;

2) $a \cdot a = 2a$; 5) $2^2 \cdot 7^3 = 14^5$; 8) $a^7b^7 = (ab)^{14}$;

3) $(a^3)^2 = a^9$; 6) $(2a)^4 = 8a^4$; 9) $a^3b^2 = (ab)^6$.

224.° Замість зірочки запишіть такий вираз, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^4 = c^{20}$; 2) $(*)^2 = c^{14}$; 3) $(*)^n = c^{8n}$; 4) $(*)^7 = c^{7n}$,

де n — натуральне число.

225.• Подайте степінь a^7 у вигляді добутку двох степенів з основою a всіма можливими способами.

226.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) a^na^5; 2) aa^n; 3) a^3a^n; 4) $(a^3)^n$; 5) $(a^n)^2 \cdot (a^5)^n$,

де n — натуральне число.

227.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $2^4 \cdot 2^4$; 2) $2^4 + 2^4$; 3) $2^n \cdot 2^n$; 4) $2^n + 2^n$,

де n — натуральне число.

228.• Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $3^5 + 3^5 + 3^5$; 2) $4^k + 4^k + 4^k + 4^k$, де k — натуральне число.

229. Доведіть, що коли сторону квадрата збільшити в n разів, то його площа збільшиться в n^2 разів.

230. У скільки разів збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити в m разів?

231. Запишіть у вигляді степеня з показником 2 вираз:

1) a^2b^6; 2) x^8y^{14}; 3) $x^4y^{10}z^{18}$; 4) $4m^{12}n^{16}$; 5) $81c^{10}d^{32}p^{44}$.

232. Запишіть у вигляді степеня з показником 3 вираз:

1) a^3b^6; 2) x^9y^{15}; 3) $8x^{12}y^{18}z^{24}$; 4) $0{,}001m^{30}n^{45}$.

233. Подайте у вигляді степеня з основою 5 вираз:

1) 125^6; 2) $(25^4)^2$.

234. Подайте у вигляді степеня з основою -5 вираз:

1) 625^5; 2) $((-25)^2)^3$.

235. Подайте у вигляді степеня з основою 2 вираз:

1) $8^9 \cdot 4^5$; 2) $32 \cdot 16^6 \cdot 64^3$.

236. Знайдіть значення виразу:

1) $(6^4)^4 : (6^5)^3$; 3) $\dfrac{7^{14} \cdot (7^2)^3}{(7^3)^6 \cdot 7^2}$; 5) $\dfrac{3^8 \cdot 7^8}{21^7}$;

2) $8^3 : 4^4$; 4) $\dfrac{25^3 \cdot 125^2}{5^{10}}$; 6) $\dfrac{5^9 \cdot 4^6}{20^6}$.

237. Обчисліть:

1) $100^5 : 1000^2$; 2) $\dfrac{3^{10} \cdot (3^3)^5}{(3^5)^4 \cdot 3}$; 3) $\dfrac{4^3 \cdot 16^2}{2^{12}}$; 4) $\dfrac{45^{10}}{5^8 \cdot 3^{19}}$.

238. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(1\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$; 2) $5^{14} \cdot 0{,}2^{12}$; 3) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8$.

239. Знайдіть значення виразу:

1) $10^5 \cdot 0{,}1^7$; 2) $1{,}9^{14} \cdot \left(\frac{10}{19}\right)^{15}$.

240. Порівняйте значення виразів:

1) $(-5)^{21} \cdot (-5)$ і $(-5)^{24}$; 3) $(-8)^5 \cdot (-8)^4$ і $(-8)^8$;

2) $(-7)^8 \cdot (-7)^7$ і $(-7)^{17}$; 4) $(-6)^3 \cdot (-6)^9$ і $(-6)^{13}$.

241. Замініть зірочку таким степенем, щоб виконувалася рівність:

1) $8 \cdot * = 2^8$;

2) $a^n \cdot * = a^{3n+2}$, де n — натуральне число.

242. Запишіть вираз 3^{24} у вигляді степеня з основою:

1) 3^3; 2) 3^{12}; 3) 9; 4) 81.

243. Запишіть вираз 2^{48} у вигляді степеня з основою:

1) 2^4; 2) 2^{16}; 3) 8; 4) 64.

244. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^7 = 6^{14}$; 2) $x^4 = 5^{12}$.

245.•• Порівняйте значення виразів:
1) 2^{300} і 3^{200}; 2) 4^{18} і 18^{9}; 3) 27^{20} і 11^{30}; 4) $3^{10} \cdot 5^{8}$ і 15^{9}.

246.•• Порівняйте значення виразів:
1) 10^{40} і $10\,001^{10}$; 2) 124^{4} і 5^{12}; 3) 8^{12} і 59^{6}; 4) 6^{14} і $2^{16} \cdot 3^{12}$.

247.* Відомо, що сума $625 + 625 + \ldots + 625$ дорівнює 5^{101}. Скільки доданків у цій сумі?

248.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 4^{100}; 2) 3^{4n}; 3) 4^{n}; 4) 3^{n}?

249.* Якою цифрою закінчується значення виразу (n — натуральне число):
1) 9^{2n}; 2) 7^{4n}; 3) 7^{2n}?

250.* Доведіть, що значення виразу:
1) $17^{8} + 19$ ділиться націло на 10;
2) $64^{64} - 1$ ділиться націло на 5;
3) $3^{4n} + 14$, де n — натуральне число, ділиться націло на 5.

251.* Доведіть, що значення виразу:
1) $4^{40} - 1$; 2) $2004^{171} + 171^{2004}$
ділиться націло на 5.

252.* Доведіть, що $48^{25} < 344^{17}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

253. (*Задача з українського фольклору.*) Кум Іван спитав у кума Степана: «Скільки в тебе качок?» Кум Степан відповів: «Качок у мене стільки, що як висидять вони мені ще стільки ж каченят, та ще придбаю одну качку, та ще тричі куплю стільки ж, скільки цих качок і каченят, то всього буде їх у мене 100». Скільки качок було в кума Степана?

254. Один маляр може пофарбувати кімнату за 6 год, а другий — за 4 год. Спочатку перший маляр працював 2 год, а потім до нього приєднався другий маляр. За скільки годин було пофарбовано кімнату?

255. Від пристані за течією річки відправилася на човні група туристів, розраховуючи повернутися через 4 год. Швидкість човна в стоячій воді становить 10 км/год, а швидкість течії — 2 км/год. На яку найбільшу відстань туристи можуть відплисти від пристані, якщо вони хочуть перед тим, як повертатися, зробити зупинку на 2 год?

256. Розв'яжіть рівняння:
1) $2{,}5 - 3x = 3\,(x - 2{,}5) - 2$;
2) $17\,(2 - 3x) - 5\,(x + 12) = 8\,(1 - 7x) - 34$.

257. У шестицифровому числі перша й четверта, друга й п'ята, третя й шоста цифри однакові. Доведіть, що це число кратне числам 7, 11 і 13.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

258. Спростіть вираз:

1) $3a \cdot (-1{,}2)$;
2) $-0{,}2b \cdot (-0{,}5)$;
3) $-7a \cdot 9b$;
4) $2{,}4x \cdot 2y$;
5) $-\frac{3}{14}m \cdot \frac{7}{9}n$;
6) $-\frac{1}{4}a \cdot \frac{4}{3}b \cdot (-3c)$.

259. Спростіть вираз $20m \cdot (-0{,}3n)$ і знайдіть його значення при $m = \frac{5}{12}$, $n = -4$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

260. Трамвайні квитки мають номери від 000 000 до 999 999. Номер називають «щасливим», якщо сума трьох його перших цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що кількість «щасливих» квитків є парною.

7. Одночлени

Розглянемо вирази:

$$2b;\ \frac{1}{3}xy^2;\ -ab;\ m^3 \cdot 3k^5;\ (3{,}14)^2\ pq^3 \cdot (-7)\ r^2t^4.$$

Кожен із них є добутком чисел, змінних та їхніх степенів. Такі вирази називають **одночленами**.

Домовилися також вважати одночленами всі числа, будь-які змінні та їхні степені. Наприклад, одночленами є:

$$-5;\ 0{,}3;\ x;\ t^2;\ 2^3.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази

$$2a + b,\ x - 1,\ a : b,\ y^2 + y - 2$$

не є одночленами, оскільки вони, крім множення та піднесення до степеня, містять ще й інші дії.

Коли ми бачимо одночлен $3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) abc$, виникає природне бажання спростити його. Маємо:

$$3ab^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) abc = 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) aab^3bc = -2a^2b^4c.$$

Отриманий одночлен містить *тільки один числовий множник, відмінний від нуля, який стоїть на першому місці*. Усі інші множники — це степені з *різними* основами. Такий вигляд одночлена називають **стандартним виглядом одночлена**.

Наведемо ще приклади одночленів стандартного вигляду:

$$-\frac{1}{8}xy;\ 2{,}8a^3;\ 7x^2yz^3t^5.$$

Зауважимо, що, наприклад, вирази $a^2 \cdot 2b^3$ і $-3x^2xy^3$ не є одночленами стандартного вигляду. Справді, хоча перший із них і має єдиний числовий множник, але він не стоїть на першому місці. У другому — степінь з основою x записано двічі.

Проте ці одночлени легко **привести** (перетворити) до стандартного вигляду:

$$a^2 \cdot 2b^3 = 2a^2b^3 \quad \text{і} \quad -3x^2xy^3 = -3x^3y^3.$$

До одночленів стандартного вигляду також відносять числа, відмінні від нуля, змінні та їхні степені. Так, -2, 3^2, x, b^3 — одночлени стандартного вигляду.

Число 0, а також одночлени, які тотожно дорівнюють нулю, наприклад $0x^2$, $0ab$ тощо, називають **нуль-одночленами**. Їх не відносять до одночленів стандартного вигляду.

Означення. **Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають коефіцієнтом одночлена.**

Наприклад, коефіцієнти одночленів $-3a^2bc$ і $0{,}07x$ відповідно дорівнюють -3 і $0{,}07$.

Узагалі, будь-який одночлен стандартного вигляду має коефіцієнт. І навіть, наприклад, в одночленів x^2y і $-mn$, при записі яких числовий множник не використовують, коефіцієнтами є числа 1 і -1 відповідно. І це зрозуміло, адже $x^2y = 1 \cdot x^2y$, $-mn = -1 \cdot mn$.

Розглянемо одночлени $\frac{2}{3}x^3yz$ і $-2zx^3y$. У них однакові буквені частини, тобто буквені частини є тотожно рівними виразами. Такі одночлени називають **подібними**. До подібних одночленів також відносять і числа. Наприклад, 7 і -5 — подібні одночлени.

Звернемо увагу на те, що, наприклад, в одночленів $\frac{2}{3}x^3y^2z$ і $-2zx^3y$ буквені частини не однакові, хоча й складаються з одних і тих самих змінних. Тому вони не є подібними.

Означення. Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Степінь одночлена, який є числом, відмінним від нуля, вважають рівним нулю.

Також вважають, що нуль-одночлен степеня не має.

Наприклад, степінь одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ дорівнює 10, а степені одночленів x^3 і 9 дорівнюють відповідно 3 і 0.

Розглянемо два одночлени $\frac{1}{5}ab^3$ і $10abx$. Одночлен $\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx$ є їхнім добутком. Спростимо його:

$$\frac{1}{5}ab^3 \cdot 10abx = \left(\frac{1}{5} \cdot 10\right)(aa)(b^3b)x = 2a^2b^4x.$$

Отже, добутком двох одночленів є одночлен. Його зазвичай записують у стандартному вигляді.

При піднесенні одночлена до степеня також отримують одночлен. Піднесемо, наприклад, до четвертого степеня одночлен $-\frac{1}{2}xy^3z^2$. Маємо:

$$\left(-\frac{1}{2}xy^3z^2\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 \cdot (z^2)^4 = \frac{1}{16}x^4y^{12}z^8.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$.

Розв'язання. Маємо:

$$0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 =$$
$$= 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 = 5a^8b^6. \bullet$$

ПРИКЛАД 2 Значення змінних a і b такі, що $4a^3b^4 = 7$. Знайдіть значення виразу $-\frac{2}{7}a^6b^8$.

Розв'язання. Маємо:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56} \cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56} \cdot (4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56} \cdot 7^2 = -\frac{1}{56} \cdot 49 = -\frac{7}{8}. \bullet$$

?

1. Які вирази називають одночленами?
2. Поясніть, який вигляд одночлена називають його стандартним виглядом.
3. Що називають коефіцієнтом одночлена?
4. Які одночлени називають подібними?
5. Що називають степенем одночлена?

ВПРАВИ

261.° Чи є одночленом вираз:

1) $5xy$; 4) 8; 7) $\frac{6m^2k^3}{11a^5}$; 10) $3(a^2 - b^2)$;

2) $-\frac{1}{3}a^2b^3c$; 5) 0; 8) b^9; 11) $-2\frac{4}{9}aa^2b^3b^6$;

3) $m + n$; 6) $\frac{4}{7}pk^4$; 9) m^4m; 12) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^2 x^5x^3yz^{10}$?

262.° Укажіть, які з одночленів записано в стандартному вигляді:

1) $5mnm^2$; 3) $-7t^3 \cdot 4t^5$; 5) $\frac{6}{13}x^8y^9$;

2) $1{,}4ab^7c^3$; 4) $-abc$; 6) $m^6n^4 \cdot 10$.

263.° Чи є подібними одночлени:

1) $5a$ і $7a$; 3) $8x^2y^4$ і $8x^2y^5$; 5) $\frac{1}{2}m^7n^8$ і $\frac{1}{2}m^8n^7$;

2) $3a^2b^3c$ і $6a^2b^3c$; 4) $3y^2$ і $2y^3$; 6) $-0{,}1a^9b^{10}$ і $0{,}1a^9b^{10}$?

264.° Запишіть одночлен, подібний даному, коефіцієнт якого в 4 рази більший за коефіцієнт даного одночлена:

1) $1{,}4x^3y^7$; 2) $c^4d^{10}p^2$; 3) $1\frac{1}{4}a^5b^5c^9$.

265.° Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $9a^4aa^6$; 3) $7a \cdot (-9ac)$; 5) $-5x^2 \cdot 0{,}1x^2y \cdot (-2y)$;

2) $3x \cdot 0{,}4y \cdot 6z$; 4) $-3\frac{1}{3}m^5 \cdot 9mn^9$; 6) $c \cdot (-d) \cdot c^{18}$.

266.° Подайте одночлен у стандартному вигляді, підкресліть його коефіцієнт:

1) $6bb^2$; 3) $-0{,}8u^4 \cdot 4t^3 \cdot (-2t^7)$;

2) $1{,}5c^3d^4 \cdot 8c^2d^5$; 4) $4{,}5a^2bc^7 \cdot 1\frac{1}{9}a^8b^6c$.

267.° Знайдіть значення одночлена:

1) $5x^2$, якщо $x = -4$;

2) $-4{,}8a^4b^3$, якщо $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$;

3) $0{,}04c^3d^5$, якщо $c = -10$, $d = 2$;

4) $\frac{4}{9}m^3n^2p^3$, якщо $m = -3$, $n = 5$, $p = -1$.

268.° Знайдіть значення одночлена:

1) $3m^3$, якщо $m=-3$;

2) $\frac{7}{16}a^2b^4$, якщо $a=-\frac{1}{7}$, $b=2$;

3) $0{,}8m^2n^2k$, якщо $m=0{,}3$, $n=\frac{1}{2}$, $k=2000$.

269.° Виконайте множення одночленів:

1) $0{,}6a^4b^3\cdot 4a^2b$;

2) $-2{,}8x^2y^5\cdot 0{,}5x^4y^6$;

3) $13c^2d\cdot(-3cd)$;

4) $0{,}7x^6y^9\cdot 0{,}3xy$;

5) $-\frac{3}{20}p^2q^8\cdot\frac{40}{81}p^8q^2$;

6) $-6\frac{1}{2}mn^8p^{11}\cdot 3\frac{5}{13}m^5n^5$.

270.° Спростіть вираз:

1) $12a^2\cdot 5a^3b^7$;

2) $-4m^3\cdot 0{,}25m^6$;

3) $3ab\cdot(-17a^2b)$;

4) $56x^5y^{14}\cdot\frac{2}{7}x^2y$;

5) $-\frac{1}{3}p^2\cdot(-27k)\cdot 5pk$;

6) $2\frac{1}{4}b^2c^5d^3\cdot\left(-3\frac{1}{3}b^3c^4d^7\right)$.

271.° Перетворіть в одночлен стандартного вигляду вираз:

1) $(3a^2b)^2$;

2) $(-0{,}2x^3y^4)^3$;

3) $(-10m^2y^8)^5$;

4) $(16x^6y^7z^8)^2$;

5) $\left(-\frac{1}{5}c^6d\right)^4$;

6) $\left(1\frac{1}{2}a^8b^9\right)^6$.

272.° Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-6m^3n^3)^3$;

2) $(-7x^9y^{10})^2$;

3) $(0{,}5a^{12}b^{14})^2$;

4) $(3ab^4c^5)^4$;

5) $\left(-\frac{1}{2}x^8y^9\right)^5$;

6) $\left(2\frac{1}{7}a^6b^8\right)^2$.

273.• Подайте даний вираз у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3a^2b^6$:

1) $3a^6b^8$; 2) $-12a^2b^{10}$; 3) $-2{,}7a^5b^7$; 4) $2\frac{2}{7}a^{20}b^{30}$.

274.• Яким одночленом треба замінити зірочку, щоб виконувалася рівність:

1) $*\cdot 3b^4=12b^6$;

2) $-5a^5b^2\cdot *=-20a^6b^8$;

3) $-7a^3b^9\cdot *=4{,}2a^5b^{12}$;

4) $23a^{12}b^{16}\cdot *=-23a^{29}b^{17}$?

275.• Виконайте множення одночленів, де m і n — натуральні числа:

1) $2\frac{5}{6}a^{n+2}b^{m+3}\cdot\frac{9}{17}a^{5n-4}b^{2m-1}$;

2) $-7\frac{1}{3}a^{2n-1}b^{3n-1}\cdot 1\frac{1}{11}a^{n+6}b^{3n+1}$.

276.• Подайте у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $4a^{10}$; 2) $36a^8b^2$; 3) $0{,}16a^{14}b^{16}$; 4) $289a^{20}b^{30}c^{40}$.

277.• Подайте у вигляді куба одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $8x^6$; 2) $-27x^3y^9$; 3) $0{,}001x^{12}y^{18}$; 4) $-\frac{125}{216}x^{15}y^{21}z^{24}$.

278.• Подайте одночлен $64a^6b^{12}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $2a^2b^8$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) куба одночлена стандартного вигляду.

279.• Подайте одночлен $81m^4n^{16}$ у вигляді:

1) добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-\frac{1}{3}mn^{14}$;
2) квадрата одночлена стандартного вигляду;
3) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

280.• Спростіть вираз:

1) $2a^3 \cdot (-5a^4b^5)^2$;
2) $(-x^6y)^3 \cdot 11x^4y^5$;
3) $(-0{,}6a^3b^5c^6)^2 \cdot 3a^2c^8$;
4) $-1\frac{3}{11}m^4n^9 \cdot \left(-\frac{1}{7}mn^3\right)^2$;
5) $1\frac{7}{9}x^7y^2 \cdot \left(\frac{3}{4}x^2y^9\right)^4$;
6) $-(-2c^2d^5)^7 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^4d^5\right)^4$.

281.• Спростіть вираз:

1) $20a^8 \cdot (9a)^2$;
2) $(-b^5)^4 \cdot 12b^6$;
3) $(3m^6n^3)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}m^9n\right)$;
4) $(0{,}2x^7y^8)^3 \cdot 6x^2y^2$;
5) $\left(-\frac{1}{2}ab^4\right)^3 \cdot (4a^6)^2$;
6) $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}xy^2\right)^2$.

282.•• Замініть зірочки такими одночленами, щоб виконувалася рівність:

1) $(*)^2 \cdot (*)^3 = 9a^2b^3c^5$;
2) $(*)^3 \cdot (*)^4 = 16a^7b^6c^8$;
3) $(*)^3 \cdot (*)^2 = -72m^8n^{11}$;
4) $(*)^2 \cdot (*)^5 = 32x^{29}y^{21}z^9$.

283.•• Значення змінних x і y такі, що $5x^2y^4 = 6$. Знайдіть значення виразу:

1) $1{,}5x^2y^4$; 2) $25x^4y^8$; 3) $-25x^6y^{12}$.

284.•• Значення змінних a і b такі, що $3ab^3 = 4$. Знайдіть значення виразу:

1) $-1{,}2ab^3$; 2) $27a^3b^9$; 3) $-\frac{2}{3}a^2b^6$.

285.$^{\cdot\cdot}$ Значення змінних a, b і c такі, що $2a^2b=7$, $a^3c^2=2$. Знайдіть значення виразу:

1) $6a^5bc^2$; 2) $a^7b^2c^2$; 3) $2\frac{1}{7}a^8bc^4$.

286.$^{\cdot\cdot}$ Значення змінних m, n і p такі, що $m^3n^2=3$, $\frac{1}{3}n^3p^2=5$. Знайдіть значення виразу:

1) $m^3n^5p^2$; 2) $2m^3n^8p^4$; 3) $-0{,}4m^{12}n^{11}p^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

287. Деяке число спочатку зменшили на 10 %, а потім результат збільшили на 20 %. Після цього отримали число, яке на 48 більше за дане. Знайдіть дане число.

288. (*Задача з російського фольклору.*) Летіла зграя гусей, а назустріч їм летить одна гуска й каже: «Здрастуйте, сто гусей!» — «Нас не сто гусей, — відповідає їй вожак зграї, — якби нас було стільки, скільки зараз, та ще стільки, та півстільки, та чверть стільки, та ще ти, гуско, то тоді нас було б сто гусей». Скільки гусей було в зграї?

289. Замініть зірочки такими цифрами, щоб:

1) число *5* ділилося націло на 3 і на 10;
2) число 13*2* ділилося націло на 9 і на 5;
3) число 58* ділилося націло на 2 і на 3.

Знайдіть усі можливі розв'язки.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

290. Спростіть вираз:

1) $6x-12x+15x-9x$;
2) $7a-9b-12a+14b$;
3) $-0{,}8k+0{,}9-1{,}7k+0{,}5k+1{,}4$;
4) $-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{9}a-\frac{3}{4}b$.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

291. Скількома способами можна поставити на шахову дошку білу й чорну тури так, щоб вони не били одна одну?

8. Многочлени

У попередньому пункті ви дізналися, що добуток одночленів є одночленом. Інша справа із сумою одночленів. Наприклад, вирази $2a+b^2$ і $2a-b^2$ не є одночленами. Перший із них є сумою одночленів $2a$ і b^2, а другий — сумою одночленів $2a$ і $-b^2$.

Означення. Вираз, який є сумою кількох одночленів, називають многочленом.

Ось ще приклади многочленів: $7xy+y-11$; $x^4-2x^3+5x^2-x+1$; $3a-a+b$; $11x-2x$.

Одночлени, з яких складено многочлен, називають **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy+y-11$ є одночлени $7xy$, y і -11.

Многочлен, який складається з двох членів, називають **двочленом**, а той, який складається з трьох членів, — **тричленом**. Домовилися розглядати одночлен як окремий вид многочлена. Вважають, що такий многочлен складається з одного члена.

Зв'язки між многочленами, одночленами та їхнім окремим видом — числами ілюструє схема, зображена на рисунку 3.

Рис. 3

Якщо серед одночленів, з яких складається многочлен, є подібні, то їх називають **подібними членами многочлена**. Наприклад, у многочлені $\underline{7a^2b}-\underline{\underline{3a}}+\underline{\underline{\underline{4}}}-\underline{a^2b}-\underline{\underline{\underline{1}}}+\underline{\underline{a}}+b$ подібні члени підкреслено однаковою кількістю рисочок.

Використовуючи правило зведення подібних доданків, спростимо цей многочлен:

$$7a^2b-3a+4-a^2b-1+a+b=6a^2b-2a+b+3.$$

Таке спрощення називають **зведенням подібних членів многочлена**. Це перетворення дає змогу замінити многочлен на тотожно рівний йому, але простіший — з меншою кількістю членів.

Розглянемо многочлен $2x^3y - xy + 1$. Цей многочлен складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Означення. Многочлен, складений з одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних, називають многочленом стандартного вигляду.

Многочлени $xy^2 + x^2y$, $2a^2b$, 5 є прикладами многочленів стандартного вигляду.

Зауважимо, що многочлен $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a$ не є многочленом стандартного вигляду. Проте його можна перетворити в многочлен стандартного вигляду таким чином: записати в стандартному вигляді одночлени, з яких він складений, а потім звести подібні доданки.

Маємо: $3bab^2 + a \cdot 5 + a \cdot 2b^3 - a = \underline{3ab^3} + \underline{\underline{5a}} + \underline{2ab^3} - \underline{\underline{a}} = 5ab^3 + 4a.$

Розглянемо многочлен стандартного вигляду $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$. Він складений з одночленів: $2x^3y$; $-x^2y^2$; $5x^2y$; y; -2, степені яких відповідно дорівнюють числам 4, 4, 3, 1, 0. Найбільший із цих степенів дорівнює числу 4. У цьому разі говорять, що степінь многочлена $2x^3y - x^2y^2 + 5x^2y + y - 2$ дорівнює 4.

Означення. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких цей многочлен складений.

Наведемо ще приклади:

- степінь многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ дорівнює двом;
- степінь многочлена $3x^4y^2$ дорівнює шести;
- степінь многочлена 3 дорівнює нулю.

Число 0, а також многочлени, які тотожно дорівнюють нулю (наприклад, $0a + 0b$, $x - x$ і т. п.), називають **нуль-многочленами**. Їх не відносять до многочленів стандартного вигляду.

Вважають, що нуль-многочлен степеня не має.

?

1. Що називають многочленом?
2. Який многочлен називають двочленом? тричленом?
3. Що називають подібними членами многочлена?
4. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
5. Що називають степенем многочлена стандартного вигляду?

ВПРАВИ

292.° Назвіть одночлени, сумою яких є даний многочлен:

1) $-5a^4+3a^2-a+8$;
2) $6x^3-10x^2y+7xy^2+y^3$;
3) t^3+3t^2-4t+5;
4) $1{,}8a^3b-3{,}7a^2b^2+16ab^3-b^4$.

293.° Знайдіть значення многочлена:

1) $2x^2+x-3$ при $x=0{,}5$;
2) x^3+5xy при $x=3$, $y=-2$;
3) $a^2-2ab+b^2$ при $a=-4$, $b=6$;
4) $y^4+7y^3-2y^2-y+10$ при $y=-1$.

294.° Знайдіть значення многочлена $2y^3-3y^2+4y-6$ при:

1) $y=1$; 2) $y=0$; 3) $y=-5$.

295.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $4b^2+a^2+9ab-18b^2-9ab$;
2) $8m^3-13mn-9n^2-8m^3-2mn$;
3) $2a^2b-7ab^2-3a^2b+2ab^2$;
4) $0{,}9c^4+1{,}1c^2+c^4-0{,}6c^2$;
5) $3x^2+6x-5-x^2-10x+3$;
6) $b^3-3bc+3b^3+8bc-4b^3$.

296.° Перетворіть многочлен у многочлен стандартного вигляду. Укажіть його степінь:

1) $5x^2-10x+9-2x^2+14x-20$;
2) $-m^5+2m^4-6m^5+12m^3-18m^3$;
3) $0{,}2a^3+1{,}4a^2-2{,}2-0{,}9a^3+1{,}8a^2+3$;
4) $6x^2y-xy^2-8x^2y+2xy^2-xy+7$.

297.• Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $-3a^5+4a^3+7a^5-10a^3+12a$, якщо $a=-2$;
2) $x^3y-3xy^2-4x^3y+8xy^2$, якщо $x=-1$, $y=-3$;
3) $0{,}8x^2-0{,}3x-x^2+1{,}6+1{,}1x-0{,}6$, якщо $x=5$;
4) $\frac{1}{3}a^2c+\frac{3}{4}ac^2+\frac{1}{6}a^2c+1{,}25ac^2$, якщо $a=-4$, $c=3$.

298.• Зведіть подібні члени та знайдіть значення многочлена при вказаних значеннях змінних:

1) $2a^3+3ab-b^2-6a^3-7ab+2b^2$, якщо $a=2$, $b=-6$;

2) $mn-6mn^2-8mn-6mn^2$, якщо $m=0{,}5$, $n=-2$;

3) $10xy^2-12x^2y+9x^2y-9xy^2$, якщо $x=\frac{1}{3}$, $y=9$.

299.• З одночленів $4a$, $-3ab$, $7a^2$, $-8a^2$, $9ab$, $5a$ виберіть кілька та складіть із них:

1) многочлен стандартного вигляду;

2) многочлен, який містить подібні члени;

3) два многочлени стандартного вигляду, використавши при цьому всі дані одночлени.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

300. Цукерки за ціною 42 грн за 1 кг змішали із цукерками за ціною 57 грн за 1 кг і отримали суміш за ціною 48 грн за 1 кг. Яка маса цукерок кожного виду міститься в 1 кг суміші?

301. На пошті продаються 20 різних конвертів і 15 різних марок. Скільки існує варіантів придбання конверта з маркою?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

302. Якому з поданих виразів тотожно дорівнює вираз $-9x+(4x-7)$:

1) $13x-7$; 2) $-5x+7$; 3) $-5x-7$; 4) $13x+7$?

303. Якому з поданих виразів тотожно дорівнює вираз $-8y-(3y-1)$:

1) $-11y+1$; 2) $-5y+1$; 3) $-11y-1$; 4) $-5y-1$?

304. Спростіть вираз:

1) $(2a+b)-(b-2a)$;

2) $(3a-4)+(3-5a)$;

3) $(m+n)-(2m+n)-(m-4n)$;

4) $(5c-2)-(6c+1)+(c-8)$.

Поновіть у пам'яті зміст п. 24 на с. 241.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

305. Навколо зорі обертається кілька планет, відстані між якими не змінюються та є попарно різними. На кожній планеті перебуває один астроном, який вивчає найближчу планету. Доведіть, що існують дві планети, на яких астрономи вивчають один одного.

9. Додавання і віднімання многочленів

Нехай треба додати два многочлени $3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11$ і $-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2$. Для цього візьмемо їх у дужки й поставимо між ними знак «плюс». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки (якщо такі є).

Маємо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)+(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{7xy}}+x+\underline{\underline{\underline{11}}}-\underline{2xy^2}+\underline{\underline{x^2y^2}}+\underline{\underline{2xy}}+y-\underline{\underline{2}}=$$
$$=xy^2+6x^2y^2-5xy+x+y+9.$$

Отриманий многочлен є сумою двох даних многочленів.

Нехай тепер треба від першого многочлена відняти другий. Для цього кожний із многочленів візьмемо в дужки й поставимо перед від'ємником знак «мінус». Потім розкриємо дужки та зведемо подібні доданки.

Маємо:

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)-(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{7xy}}+x+\underline{\underline{\underline{11}}}+\underline{2xy^2}-\underline{\underline{x^2y^2}}-\underline{\underline{2xy}}-y+\underline{\underline{2}}=$$
$$=5xy^2+4x^2y^2-9xy+x-y+13.$$

Отриманий многочлен є різницею двох даних многочленів.

При додаванні та відніманні многочленів завжди отримуємо многочлен.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що різниця двоцифрового числа й числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться націло на 9.

Розв'язання. Нехай дане число має a десятків і b одиниць. Тоді воно дорівнює $10a + b$.

Число, записане тими самими цифрами у зворотному порядку, дорівнює $10b + a$.

Розглянемо різницю $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a =$
$= 9a - 9b = 9\,(a - b)$.

Очевидно, що число $9\,(a - b)$ ділиться націло на 9. ●

Запис $\overline{ab}$ є позначенням двоцифрового числа, яке має a десятків і b одиниць, тобто $\overline{ab}=10a+b$. Аналогічно запис $\overline{abc}$ є позначенням трицифрового числа, яке має a сотень, b десятків і c одиниць, тобто $\overline{abc}=100a+10b+c$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що різниця $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb})$ ділиться націло на 18.

Розв'язання. Маємо: $(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc})-(\overline{ba}+\overline{ca}+\overline{cb})=$

$$=(10a+b+10a+c+10b+c)-(10b+a+10c+a+10c+b)=$$
$$=(20a+11b+2c)-(20c+11b+2a)=$$
$$=20a+11b+2c-20c-11b-2a=18a-18c=18(a-c).$$

Очевидно, що число 18 $(a-c)$ ділиться націло на 18. ●

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел не ділиться націло на 8.

Розв'язання. Нехай перше із цих чисел дорівнює $2n$, де n — довільне натуральне число. Тоді наступними трьома числами є $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$ відповідно.

Розглядувана сума має такий вигляд:

$$2n+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)=8n+12.$$

Перший доданок $8n$ суми $8n+12$ ділиться націло на 8, а другий доданок 12 — не ділиться. Отже, сума $8n+12$ не ділиться націло на 8. ●

ВПРАВИ

306.° Знайдіть суму многочленів:

1) $-5x^2-4$ і $8x^2-6$; 2) $2x+16$ і $-x^2-6x-20$.

307.° Знайдіть різницю многочленів:

1) x^2+8x і $4-3x$; 3) $4x^2-7x+3$ і $x^2-8x+11$;

2) $2x^2+5x$ і $4x^2-2x$; 4) $9m^2-5m+4$ і $-10m+m^3+5$.

308.° Спростіть вираз:

1) $(5a^4+3a^2b-b^3)-(3a^4-4a^2b-b^2)$;

2) $(12xy-10x^2+9y^2)-(-14x^2+9xy-14y^2)$;

3) $(7ab^2-8ab+4a^2b)+(10ab-7a^2b)$;

4) $(2c^2+3c)+(-c^2+c)-(c^2+4c-1)$.

309.° Спростіть вираз:

1) $(3x^2-2x)+(-x^2+3x)$;

2) $(4c^2-2cd)-(10c^2+8cd)$;

3) $(12m^2-7n-3mn)-(6mn-10n+14m^2)$;

4) $(3n^3-2mn+4m^3)-(2mn+3n^3)$.

310.° Який двочлен треба додати до даного двочлена, щоб їхня сума тотожно дорівнювала нулю:

1) $a+b$; 2) $a-b$; 3) $-a-b$?

311.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2-(2x^2-8x)-(x^2-3)=x$;

2) $12-(6-9x-x^2)=x^2+5x-14$;

3) $4y^3-(4y^3-8y)-(6y+3)=7$;

4) $(y^2-4y-17)-(6y^2-3y-8)=1-y-5y^2$.

312.° Розв'яжіть рівняння:

1) $(5x^2-3)-(2x+5)=5x^2$;

2) $x^2-(x+1)-(x^2-7x+32)=3$;

3) $(y^3+3y-8)-(5y-y^3+7)=2y^3-2y-15$.

313.• Доведіть тотожність:

1) $(a^2+b^2-c^2)-(b^2+c^2-a^2)+(c^2-a^2)=a^2-c^2$;

2) $(4-3a^2)-a^2+(7+2a^2)-(-2a^2+11)=0$;

3) $(x^3+4x^2)-(x+6)+(1+x-x^3)=4x^2-5$.

314.• Доведіть тотожність:

1) $4a^2-(6a^2-2ab)+(3ab+2a^2)=5ab$;

2) $(9x^6-4x^3)-(x^3-9)-(8x^6-5x^3)=x^6+9$.

315.• Знайдіть значення виразу:

1) $(5a^3-20a^2)-(4a^3-18a^2)$, якщо $a=-3$;

2) $4b^2-(7b^2-3bc)+(3b^2-7bc)$, якщо $b=-1{,}5$, $c=4$.

316.• Обчисліть значення виразу:

1) $(5{,}7a^2-2{,}1ab+b^2)-(3{,}9ab-0{,}3a^2+2b^2)$, якщо $a=-1$, $b=5$;

2) $(5m^2n-m^3)+7m^3-(6m^3-3m^2n)$, якщо $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{3}{16}$.

317.• Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього:

1) $1{,}6-7a^2-(0{,}8-4a^2)+(3a^2-0{,}7)$;

2) $3x^2-9x-(8-5x^2-(9x-8x^2))$.

318.• Доведіть, що значення виразу $(2c^2-3c)+1{,}8-c^2-(c^2-3c-2{,}2)$ не залежить від значення змінної, що входить до нього.

319.• Який многочлен треба додати до тричлена $2a^2-5a+7$, щоб сума дорівнювала:

1) 5; 2) 0; 3) a^2; 4) $-2a$?

320.• Який многочлен треба відняти від двочлена $4a^3-8$, щоб різниця дорівнювала:

1) -4; 2) 9; 3) $-2a^3$; 4) $3a$?

321.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $*-(3x^2-4xy+2y^2)=9x^2+y^2$; 2) $a^3-6a^2+2a-(*)=a^5+2a^2-7$.

322.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоб утворилася тотожність:

1) $(2x^2-14x+9)+(*)=20-10x$;

2) $(19a^4-17a^2b+b^3)-(*)=20a^4+5a^2b$.

323.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів отриманий многочлен не містив змінної a:

1) $4a^2-3ab+b+8+*$; 2) $9a^3-9a+7ab^2+bc+bm+*$.

324.• Замість зірочки запишіть такий многочлен, щоби після зведення подібних членів многочлен $3x^2+5x^2y+7x-8y+15+*$ не містив:

1) членів з x^2; 3) членів зі змінною y.

2) членів зі змінною x;

325.• Подайте у вигляді многочлена число, яке складається:

1) із 4 сотень, x десятків і y одиниць;

2) з a тисяч, b сотень, 5 десятків і c одиниць.

326.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cba}$; 2) $\overline{abc}-\overline{ab}$; 3) $\overline{a0c}+\overline{ac}$.

327.• Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $\overline{cab}+\overline{ca}$; 2) $\overline{abc}+\overline{bca}$; 3) $\overline{ab9}+\overline{7a}$.

328.• Доведіть, що значення виразу $(9-18n)-(6n-7)$ кратне 8 при будь-якому натуральному значенні n.

329.• Доведіть, що значення виразу $(6m+8)-(3m-4)$ кратне 3 при будь-якому натуральному значенні m.

330.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(5n+9)-(5-2n)$ при діленні на 7 дає остачу, яка дорівнює 4.

331.• Чому дорівнює остача при діленні на 9 значення виразу $(16n+8)-(7n+3)$, де n — довільне натуральне число?

332.• Подайте многочлен $3a^2b+8a^3-6a+12b-9$ у вигляді суми двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної b.

333.• Подайте многочлен $4mn^2+11m^4-7m^5+14mn-9n+3$ у вигляді різниці двох многочленів з додатними коефіцієнтами.

334.• Подайте многочлен $6x^2-3xy+5x-8y+2$ у вигляді різниці двох многочленів таких, щоб один із них не містив змінної y.

335.• Доведіть, що значення різниці двочленів $13m+20n$ і $7m+2n$, де m і n — довільні натуральні числа, ділиться націло на 6.

336.• Доведіть, що значення суми двочленів $16a-6b$ і $27b-2a$, де a і b — довільні натуральні числа, ділиться націло на 7.

337.• Подайте многочлен $x^2-6x+14$ у вигляді різниці:

1) двох двочленів; 2) тричлена й двочлена.

338.• Подайте многочлен $3x^2+10x-5$ у вигляді різниці двочлена й тричлена.

339.•• Доведіть, що вираз $(2x^4+4x-1)-(x^2+8+9x)+(5x+x^2-3x^4)$ набуває від'ємного значення при будь-якому значенні x. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

340.•• Доведіть, що вираз $(7y^2-9y+8)-(3y^2-6y+4)+3y$ набуває додатного значення при будь-якому значенні y. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні y?

341.•• Доведіть, що:

1) сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться націло на 5;
2) сума трьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 6;
3) сума чотирьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться націло на 8;
4) сума чотирьох послідовних натуральних чисел не ділиться націло на 4;
5) остача від ділення на 6 суми шести послідовних натуральних чисел дорівнює 3.

342.•• Доведіть, що:

1) сума трьох послідовних натуральних чисел кратна 3;
2) сума семи послідовних натуральних чисел ділиться націло на 7;
3) сума чотирьох послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 4;
4) сума п'яти послідовних парних натуральних чисел ділиться націло на 10.

343.•• Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ ділиться націло на 11;
2) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться націло на 99.

344.•• Доведіть, що:

1) сума чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ і $\overline{cab}$ кратна 111;
2) різниця числа $\overline{abc}$ і суми його цифр ділиться націло на 9.

345.•• Доведіть, що не існує таких значень x і y, при яких многочлени $5x^2-6xy-7y^2$ і $-3x^2+6xy+8y^2$ одночасно набували б від'ємних значень.

346.•• Розставте дужки так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=2$;
2) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=-2$;
3) $x^2-2x+1-x^2-2x-1=0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

347. Деяке число спочатку збільшили на 20 %, а потім зменшили результат на 20 %. Установіть, більше чи менше від початкового отримали число та на скільки відсотків.

348. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 3 год, а через другу — за 6 год. Спочатку 2 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

349. Відомо, що в парку $\frac{7}{24}$ дерев становлять каштани, а $\frac{5}{18}$ — берези. Скільки всього дерев у парку, якщо їх більше за 100, але менше від 200?

350. Із села до станції вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через годину із села зі швидкістю 10 км/год виїхав велосипедист, який прибув на станцію на 0,5 год раніше за пішохода. Яка відстань від села до станції?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

351. Знайдіть значення виразу, використовуючи розподільну властивість множення:

1) $12\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$; 2) $36\cdot\left(\frac{17}{18}-\frac{5}{12}+\frac{4}{9}\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7}+\frac{5}{14}\right)\cdot\frac{28}{25}$.

352. Розкрийте дужки:

1) $4(2a-3b)$;
2) $0{,}3(9x-5y+7)$;
3) $(-2{,}6m+3{,}5n-7{,}2)\cdot(-10)$;
4) $-m(-n+8k-12)$.

353. Спростіть вираз:

1) $3m^2n\cdot 0{,}4mn^3$;
2) $7\frac{1}{3}b^3c^2\cdot\frac{9}{11}a^4b^5$;
3) $-5x^4y^2z^8\cdot(-0{,}8x^6y^8z^2)$;
4) $-5\frac{3}{7}abc\cdot 3{,}5a^{12}b^{10}c$.

Поновіть у пам'яті зміст п. 11 на с. 237, 238.

УЧИМОСЯ РОБИТИ НЕСТАНДАРТНІ КРОКИ

354. Сашко й Василько записують 30-цифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2, 3, 4, 5. Першу цифру пише Сашко, другу — Василько й т. д. Василько хоче отримати число, кратне 9. Чи зможе Сашко йому завадити?

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка з наведених рівностей не є тотожністю?
А) $-3(a-b) = -3a + 3b$;
Б) $9a - 8a + a = 2a$;
В) $8a - (4a + 1) = 4a - 1$;
Г) $-(x + 3y) + (2x - y) = 3x + 2y$.

2. Знайдіть значення виразу $(-2{,}4 + 0{,}4)^4$.
А) -8; Б) 8; В) 16; Г) -16.

3. Спростіть вираз $(-a^6)^3 \cdot (-a^7)^4$.
А) a^{20}; Б) $-a^{20}$; В) a^{46}; Г) $-a^{46}$.

4. Виконайте піднесення до степеня: $(0{,}3a^4)^2$.
А) $0{,}9a^6$; Б) $0{,}9a^8$; В) $0{,}09a^6$; Г) $0{,}09a^8$.

5. Який із наведених виразів є одночленом?
А) $0{,}4x + y$; В) $0{,}4xy$;
Б) $0{,}4x - y$; Г) немає жодного.

6. Якому з одночленів дорівнює вираз $0{,}7a^3b^2 \cdot \frac{1}{7}a^2b^4$?
А) $7a^5b^6$; Б) $7a^6b^8$; В) $0{,}1a^5b^6$; Г) $0{,}1a^6b^8$.

7. Квадратом якого з наведених одночленів є вираз $\frac{1}{4}b^{64}c^{100}$?
А) $-\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Б) $\frac{1}{2}b^{32}c^{50}$; В) $\frac{1}{2}b^8c^{10}$; Г) $-\frac{1}{2}b^{32}c^{10}$.

8. Відомо, що $m < 0$ і $n < 0$. Порівняйте з нулем значення виразу m^5n^6.
А) $m^5n^6 = 0$; В) $m^5n^6 < 0$;
Б) $m^5n^6 > 0$; Г) неможливо з'ясувати.

9. Зведіть подібні члени многочлена $2x^2 + 6xy - 5x^2 - 9xy + 3y^2$.
А) $-3xy$; В) $3x^2y^2$;
Б) $-3x^2 - 3xy + 3y^2$; Г) $3x^2 + 3xy + 3y^2$.

10. Знайдіть різницю многочленів $x^2 - 3x - 4$ і $x - 3x^2 - 2$.
А) $4x^2 - 4x - 2$; В) $-2x^2 - 2x - 6$;
Б) $-2x^2 - 4x - 2$; Г) $4x^2 - 4x - 6$.

11. Який із наведених виразів набуває тільки від'ємних значень?
А) $x^6 + 4$; Б) $x^6 - 4$; В) $-x^6 + 4$; Г) $-x^6 - 4$.

12. Якого найменшого значення набуває вираз $(x - 7)^2 + 2$?
А) 2; Б) 7; В) 5; Г) 9.

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

Пропонуємо вашій увазі завдання з елементами інформатики, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Деякі з них — продовження та розвиток вправ цього підручника (такі вправи в тексті підручника помічено значком «», а тут указано номер відповідної вправи).

На уроках інформатики ви вивчатимете елементи програмування. Головне в програмуванні — це придумати алгоритм, тобто послідовність дій, за допомогою якої можна із вхідних даних отримати вихідні дані. Нижче наведено багато завдань на складання алгоритмів. Ці завдання не є обов'язковими для виконання, їх у першу чергу адресовано тим, хто цікавиться інформатикою. А якщо ви вже опановуєте якусь мову програмування, то можете не лише придумати алгоритм, а й написати програму для його реалізації. Якщо ви захоплюєтеся програмуванням, постарайтеся зробити це для всіх наведених тут завдань, хоча серед них є й досить складні. Найскладніші завдання, які потребують багато часу, позначено зірочкою. Їх можна виконати на канікулах.

До п. 1 «Вступ до алгебри»

Як використовують змінні в програмуванні? Чому використання змінних дає змогу розв'язати не одну-єдину задачу, а низку схожих задач?

Визначте, яку мову програмування ви вивчатимете на уроках інформатики. Як у цій мові використовують змінні? Як складають числові вирази?

Якщо вираз містить ділення на змінну, то чи завжди він має зміст? Як треба це враховувати під час написання програм?

До п. 2 «Лінійне рівняння з однією змінною»

Запишіть алгоритм, для якого вхідними даними є значення чисел a і b, а вихідними — розв'язок лінійного рівняння $ax = b$. Які випадки треба передбачити, щоб цей алгоритм видавав правильну відповідь для будь-яких значень a і b?

До п. 3 «Розв'язування задач за допомогою рівнянь»

Деякі задачі цього пункту схожі. Це означає, що їхня математична модель однакова.

Знайдіть такі задачі. Побудуйте для них математичну модель і напишіть алгоритм для їхнього розв'язування. Які величини будуть для цього алгоритму вхідними даними, а які — вихідними?

До п. 4 «Тотожно рівні вирази. Тотожності»

Чи можна за допомогою комп'ютера довести тотожність, перебравши всі можливі значення змінних, що до неї входять, і обчисливши при цих значеннях змінних значення лівої та правої частин тотожності?

До п. 5 «Степінь з натуральним показником»

Запишіть алгоритм, вхідними даними для якого є основа степеня a і показник степеня n, а вихідними — степінь числа a з показником n. Для якого значення показника треба розглянути окремий випадок?

До п. 6 «Властивості степеня з натуральним показником»

Напишіть програму, яка ілюструє одну з властивостей степеня з натуральним показником.

До п. 7 «Одночлени»

Як у мові програмування, яку ви вивчаєте, записати одночлен? Що для цього потрібно, крім чисел і змінних? Яка принципова відмінність існує між записом одночлена в математиці та в програмуванні?

Придумайте який-небудь одночлен. Напишіть програму для обчислення його значення. Які величини будуть вхідними даними для цієї програми, а які — вихідними?

До п. 8 «Многочлени»

Як у мові програмування, яку ви вивчаєте, записати многочлен?

Придумайте який-небудь многочлен. Напишіть програму для обчислення його значення.

Многочлен являє собою вираз. У якому порядку виконуються операції під час обчислення його значення в математиці? А в мові програмування, яку ви вибрали?

До п. 9 «Додавання і віднімання многочленів»

Як використовують дужки у вибраній вами мові програмування? Як вони впливають на порядок обчислення виразів?

343. У цій задачі використано форму запису числа $\overline{abc}$. Напишіть програму, для якої вхідними даними є значення змінних a, b, c, а вихідними — значення числа $\overline{abc}$. Чи можете ви написати програму, для якої кількість цифр у цьому записі буде змінною?

До п. 10 «Множення одночлена на многочлен»

Як записати вибраною вами мовою програмування добуток одночлена та многочлена?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

4. 1) $17\frac{4}{27}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) $-0{,}3$; 4) $-1\frac{1}{3}$; 5) 1. **5.** 1) $11\frac{3}{5}$; 2) $1\frac{1}{4}$; 3) 4,4; 4) $-\frac{7}{10}$. **23.** 110 пудів. **37.** 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) коренів немає; 4) коренем рівняння є будь-яке число. **38.** 1) 5; 2) 0,8; 3) коренем рівняння є будь-яке число; 4) коренів немає. **39.** 1) 0,6; 2) $\frac{3}{14}$; 3) -10; 4) $-0{,}9$. **40.** 1) 44; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-5{,}2$. **41.** 1) $-\frac{9}{25}$; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **42.** 1) $-\frac{4}{11}$; 2) коренів немає. **43.** 1) 0,4; -8; 2) 0; 25; 3) $\frac{2}{3}$; -12; 4) $-0{,}6$; -1; 0,3. **44.** 1) 6; $-4{,}5$; 2) $-0{,}8$; 3. **45.** 1) 10; 2) -3. **46.** 1) 1; 2) $-1{,}4$. **47.** 1) 12; 2) $4\frac{2}{3}$; 3) 2. **48.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) 2; 3) 4,8. **49.** 1) -10; 2) 3; 3) 1; 4) 0,5. **50.** 1) -12; 2) $-0{,}2$. **51.** 7) $-\frac{2}{3}$; -2; 8) 0; -1. **52.** 4) -20; 100; 5) 2,3; $-0{,}9$; 6) 0; 4; -4. **53.** 2) 55. **54.** 2) $\frac{1}{3}$. **57.** 2) -53; -11; -5; -3; 3; 45. **58.** 2) 7; 11; 31. **59.** 1) 14; 2) $-\frac{31}{45}$. **60.** 1) -17; 2) 3,5. **61.** 2) 3; 3) 2. **62.** 2) 2; 3) -5. **63.** 1) $a \neq 5$; 2) $a \neq -7$. **64.** 1) Якщо $b \neq -1$, то $x = \frac{9}{b+1}$; якщо $b = -1$, то коренів немає; 2) $x = -\frac{4}{b^2+1}$. **65.** Якщо $m \neq -8$, то $x = 1$; якщо $m = -8$, то x — будь-яке число. **68.** 1) 3; 2) $-1{,}8$; 3) -1; 2. **69.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) коренів немає. **70.** 1) a — парне число; 2) a — непарне число; 3) число a кратне 4; 4) таких значень не існує. **71.** 1) Число b кратне 3; 2) число b при діленні на 3 дає остачу 1; 3) таких значень не існує. **72.** 1) При $b > 0$; 2) при $b < 0$. **73.** 1) При $d < 0$; 2) при $d > 0$. **74.** 1) 18 год; перший виконає $\frac{2}{5}$ завдання, а другий — $\frac{3}{5}$ завдання. **75.** 240 сторінок. **76.** 1) Парним; 2) непарним; 3) парним. **77.** 1) Ні, $2a < a$ при $a < 0$ і $2a = a$ при $a = 0$; 2) ні, $2 \mid a \mid = \mid a \mid$ при $a = 0$. **83.** 2061 м, 2032 м, 2020 м. **84.** 500 м, 400 м, 374 м. **87.** 20 робітників. **88.** 90 км. **89.** 20 кг, 14 кг. **90.** 264 місця, 270 місць. **91.** 12 км/год, 60 км/год. **92.** 28 грн, 16 грн. **93.** 7,2 грн. **96.** 4 роки. **97.** 7 років. **98.** 30 словників, 10 словників. **99.** 1800 грн, 1200 грн. **100.** 11 купюр, 8 купюр. **101.** 800 т. **102.** 60 грн. **103.** 40 кг, 8 кг. **104.** 600 кг, 200 кг. **105.** 5 днів. **106.** 40 л, 80 л. **107.** 4,5 год, 0,5 год. **108.** 24 хв. **109.** 50 км/год, 20 км/год. **110.** 30,5 км/год. **111.** 2 км/год.

112. 45 кг, 10 кг. **113.** 14 кг, 10 кг. **114.** 60 книжок. **115.** 160 л. **116.** 71 турист. **117.** 109 апельсинів. **118.** 8 днів. **119.** 100 задач. **120.** 93. **121.** 24. **122.** 55 км/год, 65 км/год або 70 км/год, 80 км/год. **123.** 100 кг, 200 кг. **124.** 20 кг, 30 кг. **125.** 1) 4,04; 2) $-35{,}16$; 3) $1\frac{8}{9}$; 4) $-6\frac{1}{3}$. **128.** 4. **129.** 3) x — будь-яке невід'ємне число; 4) x — будь-яке недодатне число. **146.** 24 год. **147.** 206 ц. **148.** 1) $b < 0$; 2) $|a| < |b|$. **149.** Зменшилася на 25 %. **162.** 3) 16; 4) 115. **163.** 3) 75. **185.** 2; 3; 4. **186.** 1; 2. **191.** 2) $x = 1$ і $y = -2$. **193.** 1) $x = 0$; 2) $x = 1$. **194.** 1) $x = 0$; 2) $x = -3$. **195.** 2) *Вказівка.* Доведіть, що остання цифра значення виразу дорівнює 0; 3) *Вказівка.* Значення виразу — це число, остання цифра якого дорівнює 3, а решта — 9. **196.** 1) *Вказівка.* Доведіть, що сума цифр значення виразу дорівнює 9; 2) *Вказівка.* Доведіть, що остання цифра значення виразу дорівнює 5. **197.** 3. **198.** 20 %. **199.** 60 кг, 20 кг. **200.** 1) 3,8; 2) коренів немає. **201.** a — від'ємне число, b — додатне число, $c = 0$. **227.** 2) 2^5; 3) 2^{2n}; 4) 2^{n+1}. **244.** 1) 36; 2) 125; -125. **247.** 5^{97}. **248.** 1) 6; 2) 1; 3) 4 або 6; 4) 1, або 3, або 7, або 9. **249.** 1) 1; 2) 1; 3) 1 або 9. **250.** 1) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 17^8 є 1; 2) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 64^{64} є 6; 3) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня $3^{4n} = 81^n$ є 1. **251.** 1) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 4^{40} є 6; 2) *Вказівка.* Останньою цифрою степеня 2004^{171} є 4, а степеня 171^{2004} — 1. **252.** $48^{25} < 49^{25} = 7^{50} < 7^{51} = (7^3)^{17} = 343^{17} < 344^{17}$. **253.** 12 качок. **254.** 3,6 год. **255.** 9,6 км. **256.** 1) 2; 2) коренем рівняння є будь-яке число. **257.** *Вказівка.* Дане число можна подати у вигляді $1000a + a = 1001a$. **283.** 3) $-43{,}2$. **284.** 3) $-\frac{32}{27}$. **285.** 2) 24,5; 3) 30. **286.** 2) 1350; 3) -486. **287.** 600. **288.** 36 гусей. **300.** 600 г, 400 г. **301.** 300 варіантів. **311.** 3) 5; 4) коренів немає. **312.** 2) 6; 3) коренем рівняння є будь-яке число. **315.** 1) -45; 2) 24. **316.** 1) 11; 2) $\frac{2}{3}$. **331.** 5. **339.** -9 при $x = 0$. **340.** 4 при $y = 0$. **344.** 1) $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b = 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$. **345.** *Вказівка.* Розгляньте суму даних многочленів. **347.** Менше на 4 %. **348.** 4 год. **349.** 144 дерева. **350.** 10 км. **361.** 1) -2; 2) -5; 3) $-0{,}5$; 4) коренем рівняння є будь-яке число; 5) коренів немає; 6) 4. **362.** 1) 2; 2) 0; 3) 6. **374.** 1) $7b^2$; 2) 0. **375.** 1) 45; 2) 0; 3) $\frac{7}{4}$; 4) 2,1; 5) 3; 6) $\frac{3}{20}$; 7) $\frac{19}{34}$; 8) $\frac{44}{9}$. **376.** 1) -1; 2) $-\frac{83}{4}$; 3) -4; 4) 10.

ЗМІСТ

Від авторів 3
Умовні позначення 4
1. Вступ до алгебри 5
● Книга про відновлення та протиставлення 11

§ 1. Лінійне рівняння з однією змінною 12
2. Лінійне рівняння з однією змінною 12
3. Розв'язування задач за допомогою рівнянь 18
Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі 25
Головне в параграфі 1 26

§ 2. Цілі вирази 27
4. Тотожно рівні вирази. Тотожності 27
5. Степінь з натуральним показником 32
6. Властивості степеня з натуральним показником 39
7. Одночлени 47
8. Многочлени 54
9. Додавання і віднімання многочленів 58
Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі 64
10. Множення одночлена на многочлен 65
11. Множення многочлена на многочлен 71
12. Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки 77
13. Розкладання многочлена на множники. Метод групування 84
Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі 87
14. Добуток різниці та суми двох виразів 88
15. Різниця квадратів двох виразів 93
16. Квадрат суми та квадрат різниці двох виразів 99
17. Перетворення многочлена у квадрат суми або різниці двох виразів 107
Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі 113
18. Сума й різниця кубів двох виразів 114
19. Застосування різних способів розкладання многочлена на множники 120
Завдання № 5 «Перевірте себе» в тестовій формі 126
● Мова, зрозуміла всім 127
Головне в параграфі 2 130

§ 3. Функції 132
20. Зв'язки між величинами. Функція 132
21. Способи задання функції 143
22. Графік функції 150
23. Лінійна функція, її графік і властивості 160
Завдання № 6 «Перевірте себе» в тестовій формі 170
Головне в параграфі 3 172

§ 4. Системи лінійних рівнянь із двома змінними 173
24. Рівняння з двома змінними 173
25. Лінійне рівняння з двома змінними та його графік 181
● Як будували міст між геометрією та алгеброю 189
26. Системи рівнянь із двома змінними. Графічний метод розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними 190
27. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом підстановки 197
28. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом додавання 200
29. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь 206
Завдання № 7 «Перевірте себе» в тестовій формі 215
Головне в параграфі 4 217

Вправи для повторення курсу алгебри 7 класу 219
● Дружимо з комп'ютером.... 229

Відомості з курсу математики 5–6 класів 235
Відповіді та вказівки до вправ 245
Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі 252
Предметний покажчик 253

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

**Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *М. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцького*
Технічний редактор *О. В. Лісневська*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,68.
Тираж 3000 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003