А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-312-6.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-312-6

ВІД АВТОРІВ

Любі десятикласники та десятикласниці!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях — вивчати математику за програмою профільного рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання.

У 9 класі ви завершили вивчення курсу планіметрії — розділу геометрії, у якому розглядали плоскі фігури та їхні властивості. Однак більшість об'єктів, що нас оточують, — створених як людиною (рис. 1), так і природою (рис. 2), — не є плоскими.

*Розділ геометрії, у якому вивчають фігури в просторі та їхні властивості, називають **стереометрією**.*

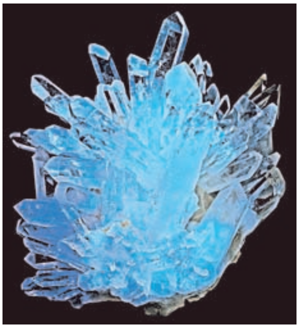
Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «стереос» — «об'ємний», «просторовий» і «метрео» — «вимірювати».

Дзвіниця Києво-Печерської лаври

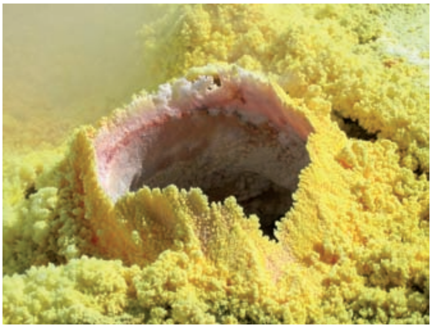
Українськіий літак Ан-225 «Мрія» — найбільший літак у світі

Старовинне місто інків Мачу-Пікчу (Перу)

Рис. 1



Кристал



Відкладення сірки у фумарол

Сталактити та сталагміти

Планета Земля

Рис. 2

Ви починаєте вивчати стереометрію.

Знати стереометрію надзвичайно важливо. Без просторової уяви та глибоких геометричних знань неможливо опанувати інженерні професії, будівельну або архітектурну справу, працювати в галузі комп'ютерної графіки, дизайну, моделювання одягу та взуття тощо. І це зрозуміло, адже стереометрія досліджує математичні моделі тих матеріальних об'єктів, з якими люди щодня мають справу. Узагалі, стереометрія є одним з основних інструментів пізнання навколишнього світу.

Крім того, стереометрія — красивий та цікавий шкільний предмет, який розвиває логічне й абстрактне мислення, увагу й акуратність. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

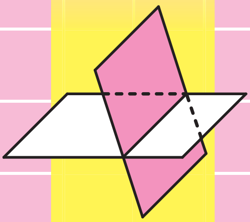
У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
	завдання, які можна виконувати за допомогою комп'ютера;
◄	закінчення доведення теореми, розв'язання задачі.



§ 1. Вступ до стереометрії

1. **Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії**
2. **Наслідки з аксіом стереометрії**
3. **Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з основними поняттями стереометрії, аксіомами стереометрії та наслідками з них.
- Отримаєте початкові уявлення про многогранники.

1. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії

Вивчаючи математику, ви з багатьма поняттями ознайомилися за допомогою означень. Так, із курсу планіметрії вам добре відомі означення чотирикутника, трапеції, кола тощо.

Означення будь-якого поняття основане на інших поняттях, зміст яких вам уже відомий. Наприклад, розглянемо означення трапеції: «Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні». Бачимо, що означення трапеції ґрунтується на таких уже введених поняттях, як чотирикутник, сторона чотирикутника, паралельні та непаралельні сторони тощо. Отже, означення вводять за принципом «нове основане на старому». Тоді зрозуміло, що мають існувати первинні поняття, яким означень не дають. Їх називають **основними поняттями** (рис. 1.1).

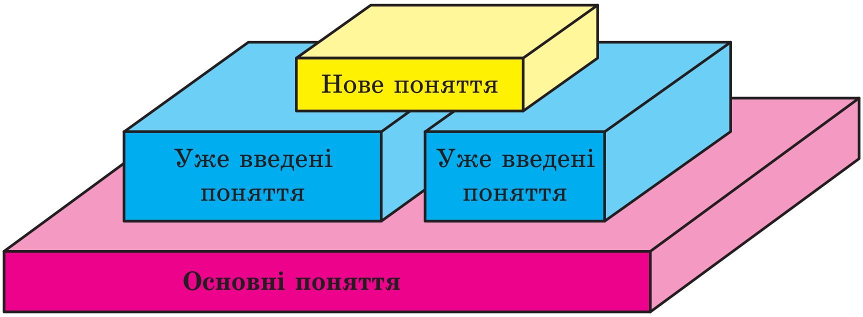


Рис. 1.1

У курсі планіметрії, який ви вивчили, означення не давали таким фігурам, як точка й пряма. У стереометрії, крім них, до основних понять віднесемо ще одну фігуру — **площину**.

Наочне уявлення про площину дають поверхня водойми в безвітряну погоду, поверхня дзеркала, поверхня полірованого стола, подумки продовжені в усіх напрямах.

Використовуючи поняття площини, можна вважати, що в планіметрії ми розглядали тільки одну площину, і всі фігури, які вивчалися, належали цій площині. У стереометрії ж розглядають безліч площин, розміщених у **просторі**.

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 1.2) або інших обмежених частин площини (рис. 1.3).

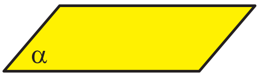


Рис. 1.2

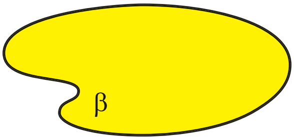


Рис. 1.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

Існує кілька випадків взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Наведемо приклади.

На рисунку 1.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині* α або *площина* α *проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$.

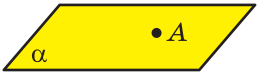


Рис. 1.4

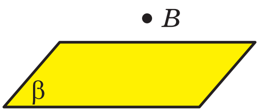


Рис. 1.5

На рисунку 1.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

На рисунку 1.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині* α або *площина* α *проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$.

Рис. 1.6

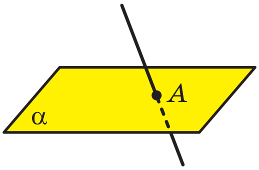


Рис. 1.7

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 1.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують: $a \cap \alpha = A$.

Далі, говорячи «дві точки», «три прямі», «дві площини» тощо, матимемо на увазі, що це різні точки, різні прямі та різні площини.

Якщо всі спільні точки двох площин утворюють пряму, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

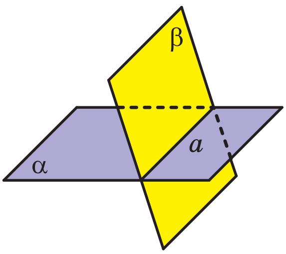


Рис. 1.8

На рисунку 1.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

На початковому етапі вивчення стереометрії неможливо доводити теореми, спираючись на інші твердження, оскільки цих тверджень ще немає. З огляду на це перші властивості, які стосуються точок, прямих і площин у просторі, приймають без доведення та називають аксіомами.

Зазначимо, що деякі аксіоми стереометрії за формулюваннями дослівно збігаються з відомими вам аксіомами планіметрії. Наприклад:

- *якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй;*
- *через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.*

Ми не будемо ознайомлюватися зі строгою аксіоматичною побудовою стереометрії. Розглянемо лише деякі твердження, що виражають основні властивості площин простору, спираючись на які зазвичай будують курс стереометрії в школі.

Аксіома А1. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

Якщо в будь-якій площині простору виконуються аксіоми планіметрії, то виконуються і наслідки із цих аксіом, тобто теореми планіметрії. Отже, у стереометрії можна користуватися всіма відомими нам властивостями плоских фігур.

Аксіома А2. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Рисунки 1.9–1.11 ілюструють цю аксіому.

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить

Рис. 1.9

Рис. 1.10

Рис. 1.11

через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 1.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 1.12).

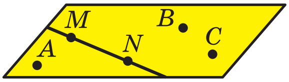


Рис. 1.12

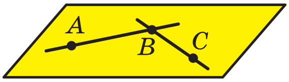


Рис. 1.13

Аксіома А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 1.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Із цієї аксіоми випливає, що коли пряма не належить площині, то вона має з даною площиною не більше ніж одну спільну точку.

Твердження, сформульоване в аксіомі **А3**, часто використовують на практиці, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня рівною (плоскою). Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею (рис. 1.14).

Рис. 1.14

Аксіома А4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Цю аксіому можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або за допомогою вашого підручника (рис. 1.15).

Рис. 1.15

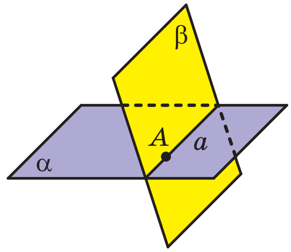


Рис. 1.16

Задача. Доведіть, що коли дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Розв'язання. Нехай точка A є спільною для двох площин α і β, тобто $A \in \alpha$ і $A \in \beta$ (рис. 1.16). За аксіомою **A4** площини α і β перетинаються по прямій. Нехай $\alpha \cap \beta = a$. Тоді всі спільні точки площин α і β належать прямій a. Точка A є спільною для площин α і β. Отже, $A \in a$. ◄

1. Як у математиці називають первинні поняття, яким не дають означення?
2. Які фігури входять до списку основних понять стереометрії?
3. У якому разі говорять, що пряма перетинає площину?
4. У якому разі говорять, що площини перетинаються?
5. Сформулюйте аксіоми **A1, A2, A3, A4**.

ВПРАВИ

1.1.° Пряма a лежить у площині α. Який із наведених знаків потрібно поставити замість зірочки в записі $a * \alpha$?
1) $\in$; 2) $\subset$; 3) $\supset$; 4) $\cup$.

1.2.° Відомо, що площини α і β мають спільну точку. Скільки ще спільних точок мають ці площини?

1.3.° Скільки площин можна провести через дві точки?

1.4.° Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих укажіть пряму, яка не лежить у площині ACD.
1) AC; 2) AD; 3) CD; 4) BD.

1.5.° Дано п'ять точок A, B, M, N і K. Площина α проходить через точки A і B, але не проходить через жодну з точок M, N і K. Серед даних точок укажіть точку, яка не може належати прямій AM.
1) B; 3) K;
2) N; 4) будь-яка з даних точок може належати прямій AM.

1.6.° Зобразіть площину α, точку M, що їй належить, і точку K, що їй не належить. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.7.° Зобразіть площину γ, яка проходить через пряму a. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.8.° Зобразіть площину α і пряму b, яка перетинає дану площину в точці A. Запишіть це за допомогою відповідних символів. Скільки точок прямої b належить площині α?

1.9.° Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

1.10.° Пряма a проходить через точку A площини α. Чи випливає із цього, що пряма a перетинає площину α?

1.11.° Запишіть за допомогою символів взаємне розміщення точок, прямих і площини, зображених на рисунку 1.17.

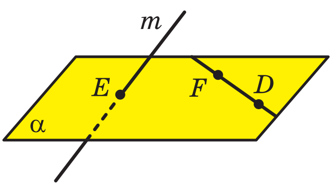


Рис. 1.17

1.12.° Дано точки A, B і C такі, що $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Скільки площин можна провести через точки A, B і C?

1.13.° Дано точки D, E і F такі, що $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Скільки площин можна провести через точки D, E і F?

1.14.° У кімнаті на люстрі сиділи три мухи. Одночасно вони почали літати: перша — кружляти навколо люстри на однаковій висоті, друга — спускатися від люстри вертикально вниз і підніматися вгору, третя — рухатися від люстри до ручки дверей та назад. Швидкість усіх мух однакова. Через який час усі три мухи опиняться в одній площині?

1.15.° Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

1.16.° Зобразіть площини α і β, пряму c, точки A і B, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$, $B \in \alpha$, $B \notin \beta$.

1.17.° Зобразіть площини α, β, γ і пряму m, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = m$.

1.18.° Зобразіть площини α, β, γ і прямі a, b, c, якщо відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$.

1.19.• Пряма m — лінія перетину площин α і β (рис. 1.18). Точки A і B належать площині α, а точка C — площині β. Побудуйте лінії перетину площини ABC із площиною α і з площиною β.

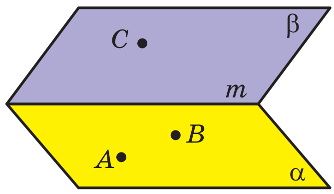


Рис. 1.18

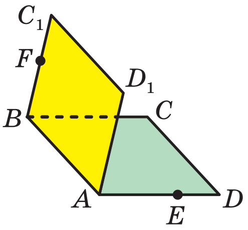


Рис. 1.19

1.20.• Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині (рис. 1.19). На відрізку AD позначили точку E, а на відрізку BC_1 — точку F. Побудуйте точку перетину:

1) прямої CE з площиною ABC_1;

2) прямої FD_1 із площиною ABC.

1.21.• Чи є правильним твердження: будь-яка пряма, що проходить через центри вписаного та описаного кіл даного трикутника, лежить у площині цього трикутника?

1.22.• Про площини α і β та пряму a відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = M$. Доведіть, що $a \cap c = M$.

1.23.• Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що жодні три з них не лежать на одній прямій.

1.24.• Доведіть, що коли дві сусідні вершини чотирикутника й точка перетину його діагоналей належать одній площині, то й дві інші вершини належать цій площині.

1.25.• Вершина D чотирикутника $ABCD$ належить площині α, а всі інші вершини лежать поза цією площиною. Продовження сторін BA і BC перетинають площину α в точках M і K відповідно. Доведіть, що точки M, D і K лежать на одній прямій.

1.26.• Вершина A трикутника ABC належить площині α, а вершини B і C лежать поза цією площиною. Продовження медіан BM і CN трикутника ABC перетинають площину α в точках K і E відповідно. Доведіть, що точки A, K і E лежать на одній прямій.

1.27.•• Про площини α, β і γ відомо, що $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $a \cap c = M$. Доведіть, що $M \in b$.

1.28.•• Точка M — спільна точка двох площин ABC і BCD. Знайдіть відрізок BC, якщо $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

1.29.* П'ять точок, що є серединами ланок замкненої ламаної $ABCDE$, належать площині α. Доведіть, що точки A, B, C, D і E належать цій самій площині.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.30. На висоті BD рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили точку M. Знайдіть відношення площі трикутника AMC до площі трикутника ABC, якщо $BD = 12$ см, $BM = 8$ см.

1.31. Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) ділить кут BAD навпіл (рис. 1.20). Точка E — середина відрізка AB. Пряма, яка проходить через точку E паралельно основам трапеції, перетинає відрізок AC у точці K, а відрізок CD — у точці F. Знайдіть периметр трапеції $ABCD$, якщо $EK = 3$ см, $KF = 5$ см.

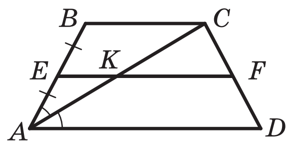


Рис. 1.20

2. Наслідки з аксіом стереометрії

У попередньому пункті ви ознайомилися з деякими аксіомами стереометрії. Крім аксіом, існують й інші наочно очевидні властивості, які описують взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі. Тепер, спираючись на аксіоми, ці властивості можна довести.

Теорема 2.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A, яка не лежить на ній (рис. 2.1). Доведемо, що через пряму a і точку A проходить площина.

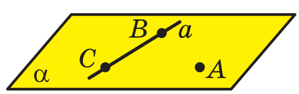


Рис. 2.1

Позначимо на прямій a дві довільні точки B і C. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Тоді за аксіомою **А2** через точки A, B і C проходить деяка площина α. Дві точки B і C прямої a належать площині α.

Тоді за аксіомою **А3** площині α належить і пряма a. Отже, через пряму a і точку A проходить площина α.

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через пряму a і точку A. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $A \in \beta$. Площина β проходить через точки A, B і C. Таким чином, через точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, проходять дві площини α і β, що суперечить аксіомі **А2**. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через пряму a і точку A. ◄

Теорема 2.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано дві прямі a і b, які перетинаються в точці M (рис. 2.2). Доведемо, що через прямі a і b проходить площина.

Позначимо на прямій a точку A, відмінну від точки M. Точка A не належить прямій b, оскільки у прямих a і b тільки одна спільна точка M. Тоді за теоремою 2.1 через точку A та пряму b проходить деяка площина α. Дві точки M і A прямої a належать площині α. Тоді за аксіомою **А3** пряма a також належить площині α. Отже, через прямі a і b проходить площина α.

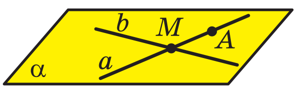


Рис. 2.2

Доведемо, що α — єдина площина, яка проходить через прямі a і b. Припустимо, що існує ще одна площина β така, що $a \subset \beta$ і $b \subset \beta$. Площина β проходить через пряму b і точку A. Таким чином, через пряму b і точку A, яка не лежить на ній, проходять дві площини α і β, що суперечить теоремі 2.1. Отже, наше припущення хибне, і площина α є єдиною площиною, яка проходить через прямі a і b. ◄

З аксіоми **А2** і теорем 2.1 і 2.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій;*
3) *двома прямими, що перетинаються.*

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

?

1. Які наслідки з аксіом стереометрії ви знаєте?
2. Укажіть способи однозначного задання площини.

ВПРАВИ

2.1.° П'ять точок не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість цих точок може лежати на одній прямій?

2.2.° Пряма a перетинає площину α і лежить у площині β. Скільки спільних точок мають площини α і β?

2.3.° Які з даних тверджень є правильними?
1) Якщо діаметр кола належить площині, то всі точки кола належать цій площині.
2) Якщо три вершини паралелограма належать площині, то всі точки паралелограма належать цій площині.
3) Якщо пряма має спільну точку з кожною зі сторін AC і BC трикутника ABC, то вона лежить у площині цього трикутника.
4) Якщо бісектриса трикутника та центр кола, вписаного в даний трикутник, належать площині, то всі точки трикутника належать цій площині.

2.4.° Скільки площин можна провести через дані пряму та точку?

2.5.° Доведіть, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки можна провести таких площин?

2.6.° Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

2.7.° Центр O і хорда AB кола лежать у деякій площині. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить будь-яка точка даного кола?

2.8.° Сторона AC і центр O описаного кола трикутника ABC лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що в цій площині лежить вершина B?

2.9.° Прямі a і b перетинаються. Чи всі прямі, які перетинають прямі a і b, лежать в одній площині?

2.10.° Дано пряму a і точку A поза нею. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A та перетинають пряму a, лежать в одній площині.

2.11.° Прямі m і n перетинаються в точці A. Точка B належить прямій m, точка C — прямій n, точка D — прямій BC. Доведіть, що прямі m і n та точка D лежать в одній площині.

2.12.° Прямі AB і AC перетинають площину α в точках B і C, точки D і E належать цій площині (рис. 2.3). Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною ABC.

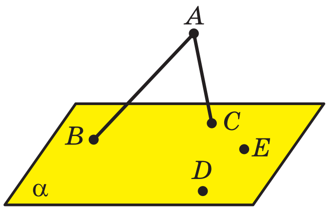


Рис. 2.3

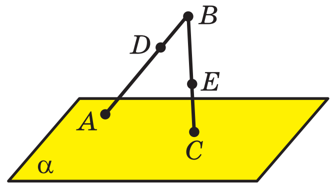


Рис. 2.4

2.13.° Пряма BA перетинає площину α в точці A, пряма BC — у точці C (рис. 2.4). На відрізку AB позначили точку D, на відрізку BC — точку E. Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною α.

2.14.• Три прямі перетинаються в одній точці. Через кожні дві із цих прямих проведено площину. Скільки всього площин проведено?

2.15.• Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині?

2.16.• Знайдіть помилку на рисунку 2.5, якщо відомо, що вершина D чотирикутника $ABCD$ лежить у площині α, вершини A, B і C не лежать у цій площині, пряма AB перетинає площину α в точці E, пряма BC — у точці F. Зробіть правильний рисунок.

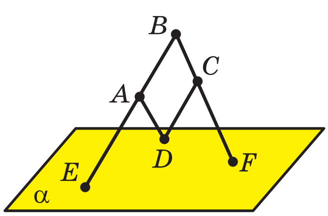


Рис. 2.5

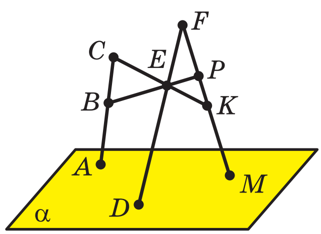


Рис. 2.6

2.17.• Знайдіть помилку на рисунку 2.6, якщо відомо, що прямі BP і CK перетинаються в точці E, пряма BP перетинає пряму AC у точці B, пряму FM — у точці P, пряма CK перетинає пряму FM у точці K, прямі AC, FE і FM перетинають площину α в точках A, D і M відповідно. Зробіть правильний рисунок.

2.18.$^{\bullet}$ Точка C лежить на прямій AB, а точка D не лежить на цій прямій. Точка E лежить на прямій AD. Доведіть, що площини ABD і CDE збігаються.

2.19.$^{\bullet}$ Прямі a, b і c попарно перетинаються, причому точки їхнього перетину не збігаються. Чи лежать прямі a, b і c в одній площині?

2.20.* На рисунку 2.7 буквами P, E і Q позначено точки перетину прямих MK і BC, MN і CA, KN і AB відповідно. Чи можна стверджувати, що площини ABC і MNK збігаються?

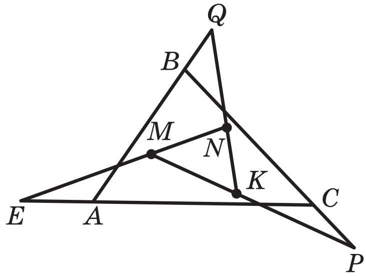


Рис. 2.7

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.21. На стороні BC паралелограма $ABCD$ позначили точку M. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо площа трикутника AMD дорівнює 16 см^2.

2.22. Відрізки AB і CD перетинаються в точці E, прямі AD і BC паралельні. Знайдіть відрізок BE, якщо $AE = 10$ см, $CE = 3$ см, $DE = 6$ см.

ПРО АКСІОМИ

Вам не раз доводилося чути такі твердження: математика — строга наука, математика любить точність у міркуваннях, математика підпорядковується логіці тощо. Із завданнями на кшталт «доведіть», «обґрунтуйте», «роз’ясніть» ви стикаєтеся на кожному уроці математики. Узагалі, математика базується виключно на доказових міркуваннях — це те, що відрізняє її від більшості інших наук.

Ви довели багато теорем планіметрії, чимала «доказова робота» чекає на вас і в стереометрії. Вивчення геометричних фігур за принципом «нове зі старого» спонукало нас до необхідності введення основних понять і аксіом. Проте, незважаючи на все сказане, шкільний курс геометрії не є строгим. Нехай цей факт вас не засмучує. Навпаки, якщо ви зрозумієте причини відхилення від строгості, то це допоможе краще зрозуміти, як математики діляться своїми знаннями, роблячи їх більш образними та доступними.

Річ у тім, що в шкільному курсі геометрії під час доведення цілої низки теорем ми не лише користуємося чисто логічними міркуваннями, але й спираємося на очевидну наочність. Наприклад, навряд чи хтось із вас має сумніви в тому, що будь-який промінь, початок якого лежить усередині кола, перетинає це коло (рис. 2.8). Наведене істинне твердження в нашому курсі не є аксіомою, а отже, потребує доведення. Однак таке доведення ми не зможемо провести. Причина полягає в тому, що для доведення деяких фактів нам не вистачає аксіом, і цей недолік ми вимушені компенсувати наочністю. Такий підхід обумовлений лише навчальними цілями. Наочні пояснення та ілюстрації часто передають сутність сказаного значно швидше й роблять матеріал доступнішим.

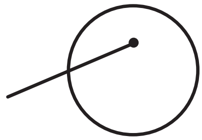


Рис. 2.8

Створити систему аксіом, яка дає змогу відмовитися від наочності та проводити доведення, базуючись лише на логічних міркуваннях, — задача непроста. Реалізовуючи ідеї великого давньогрецького філософа Аристотеля (384–322 до н. е.), Евклід (III ст. до н. е.) у своїй праці «Начала» першим спробував застосувати аксіоматичний метод для побудови геометрії. Завершив цю роботу в 1899 р. видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943). Понад 2000 років список аксіом, створений Евклідом, доповнювався та уточнювався. Отриману систему аксіом називають аксіоматикою евклідової геометрії. Саме евклідову геометрію вивчають у школі.

Можна побудувати різні аксіоматики евклідової геометрії. Наприклад, у нашому курсі твердження «Через будь-які три точки простору, що не належать одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна» є аксіомою, а твердження «Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна» — теоремою. Проте можна друге твердження прийняти за аксіому, тоді перше стане теоремою. Цю теорему ви можете легко довести, спираючись на «нову» та «старі» аксіоми. Переконайтеся в цьому самостійно.

Нові аксіоматики евклідової геометрії з'являються не лише в результаті «перестановки» аксіоми та наслідку з неї. Так, можна змінити список основних понять. Наприклад, замість прямої вважати поняттям, якому не дають означення, відрізок. Оскільки аксіоми розкривають сутність основних понять (описують їхні властивості), то, вибравши новий список основних понять, ми неминуче прийдемо до нової системи аксіом.

Наголосимо, що, користуючись різними системами аксіом евклідової геометрії, можна довести одні й ті самі властивості геометричних фігур. Системи аксіом фактично є різними наборами інструментів. Учені, які вивчають математику, добираючи доречний комплект аксіом, зводять будівлю геометричної науки.

Евклідова геометрія створювалась як наука, що описує навколишній світ. Проте систему аксіом можна змінити так, що вона вже не відображатиме звичні для нас властивості реальних предметів. Для цього можна одну з аксіом замінити на твердження, що її спростовує. Наприклад, аксіому «Через точку, яка не належить даній прямій, проходить не більше ніж одна пряма, паралельна даній» замінити такою аксіомою: «Через точку, яка не належить даній прямій, проходить більше ніж одна пряма, паралельна даній». Так зробив видатний російський математик Микола Іванович Лобачевський, тим самим побудувавши зовсім нову геометрію, відмінну від евклідової. Якщо ви виберете професію математика, то зможете ознайомитися з геометрією Лобачевського та з іншими неевклідовими геометріями.

М. І. Лобачевський
(1792–1856)

3. Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають просторові фігури, тобто фігури, не всі точки яких лежать в одній площині. З деякими з просторових фігур ви вже ознайомилися. Так, на рисунку 3.1 зображено циліндр, конус і кулю. Ці фігури ви докладно вивчатимете в 11 класі.

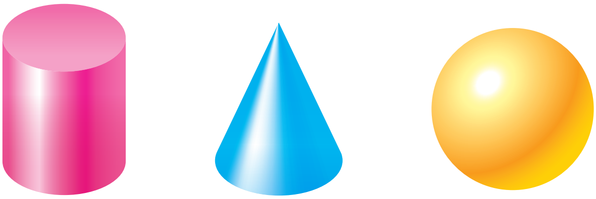


Рис. 3.1

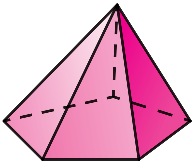


Рис. 3.2

На рисунку 3.2 зображено ще одну відому вам просторову фігуру — піраміду. Ця фігура є окремим видом **многогранника.**

Приклади многогранників показано на рисунку 3.3.

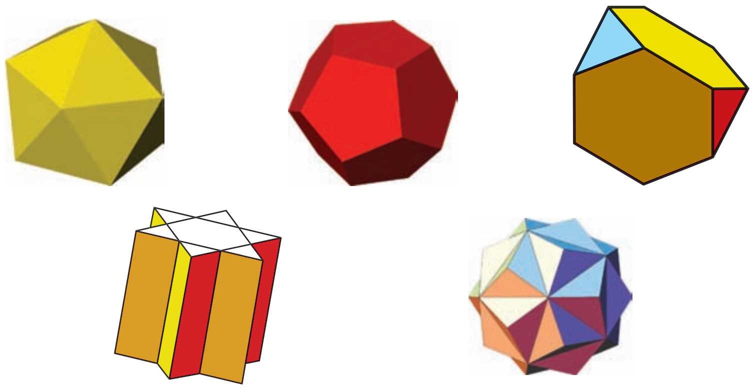


Рис. 3.3

Поверхня многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника.** Сторони многокутників називають **ребрами многогранника**, а вершини — **вершинами многогранника** (рис. 3.4).

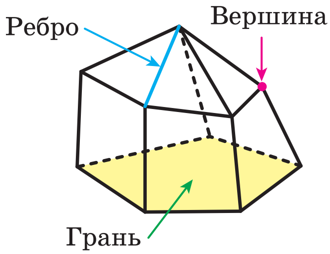


Рис. 3.4

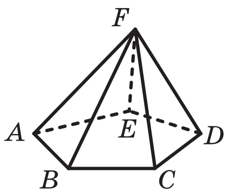


Рис. 3.5

На рисунку 3.5 зображено п'ятикутну піраміду $FABCDE$. Поверхня цього многогранника складається з п'яти трикутників, які називають **бічними гранями піраміди**, та одного п'ятикутника, який називають **основою піраміди**. Вершину F, яка є спільною для всіх бічних граней, називають **вершиною піраміди**. Ребра FA, FB, FC, FD і FE називають **бічними ребрами піраміди**, а ребра AB, BC, CD, DE і EA — **ребрами основи піраміди.**

На рисунку 3.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Трикутну піраміду називають також **тетраедром**.

Ще одним окремим видом многогранника є **призма**. На рисунку 3.7 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Цей многогранник має п’ять граней, дві з яких — рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Їх називають **основами призми**. Решта граней призми — паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми**. Ребра AA_1, BB_1 і CC_1 називають **бічними ребрами призми**.

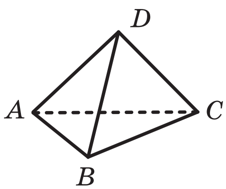


Рис. 3.6

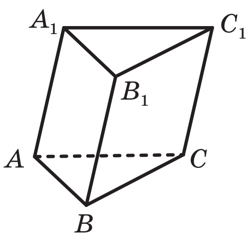


Рис. 3.7

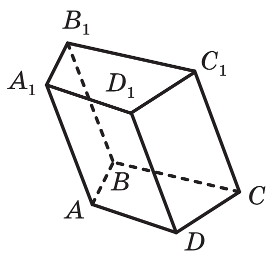


Рис. 3.8

На рисунку 3.8 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її поверхня складається з двох рівних чотирикутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (основи призми) і чотирьох паралелограмів (бічні грані призми).

Ви ознайомилися також з окремим видом чотирикутної призми — **прямокутним паралелепіпедом**. На рисунку 3.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

У свою чергу, окремим видом прямокутного паралелепіпеда є **куб**. Усі грані куба — рівні квадрати (рис. 3.10).

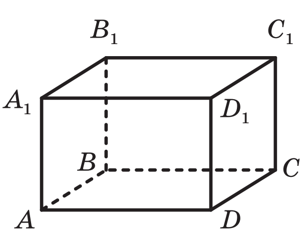


Рис. 3.9

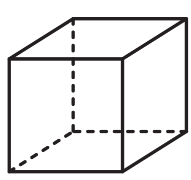


Рис. 3.10

Чотирикутну призму, основою якої є паралелограм, називають **паралелепіпедом**.

У курсі геометрії 11 класу ви докладніше ознайомитеся з многогранниками та їхніми окремими видами.

Задача 1. На ребрах AA_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM \neq DN$ (рис. 3.11). Побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC.

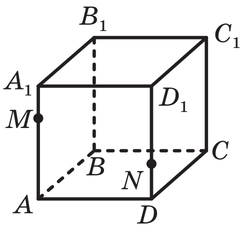


Рис. 3.11

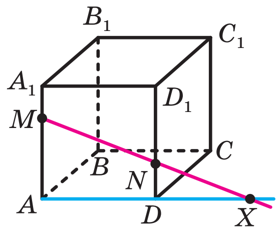


Рис. 3.12

Розв'язання. Точки M і N належать площині AA_1D_1. Тоді за аксіомою **А3** пряма MN належить цій площині. Аналогічно пряма AD також належить площині AA_1D_1. Із планіметрії відомо, що прямі, які лежать в одній площині, або є паралельними, або перетинаються. Оскільки $AM \neq DN$, то прямі AD і MN перетинаються. Нехай X — точка їхнього перетину (рис. 3.12).

Точки A і D належать площині ABC. Тоді за аксіомою **А3** пряма AD належить цій самій площині. Точка X належить прямій AD. Отже, точка X належить площині ABC. Оскільки точка X також належить прямій MN, то пряма MN перетинає площину ABC у точці X. ◄

Нехай у просторі задано многогранник і площину.

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника площиною**, а саму площину — **січною площиною**.

На рисунку 3.13 січну площину задають точки A, A_1 і C_1. Перерізом призми цією площиною є бічна грань AA_1C_1C.

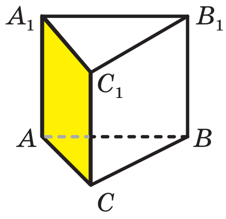


Рис. 3.13

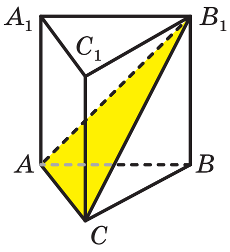


Рис. 3.14

На рисунку 3.14 січну площину задають пряма AC і точка B_1. Перерізом призми цією площиною є трикутник AB_1C.

На рисунку 3.15 січну площину задають дві прямі AE і CE, що перетинаються. Перерізом піраміди цією площиною є трикутник AEC.

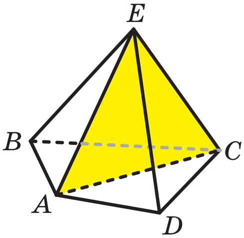


Рис. 3.15

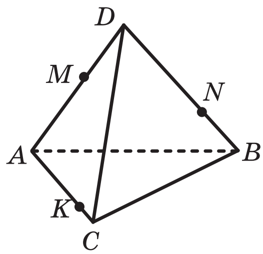


Рис. 3.16

Задача 2. На ребрах AD, DB і AC тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, N і K (рис. 3.16). Побудуйте переріз тетраедра площиною KMN, якщо відрізок MN не паралельний ребру AB.

Розв'язання. Точки M і N є спільними для площини KMN і площини ADB. Отже, ці площини перетинаються по прямій MN. Тоді січна площина перетинає грань ADB по відрізку MN (рис. 3.17). Аналогічно робимо висновок, що площина KMN перетинає грань ADC по відрізку KM.

Січна площина KMN і площина ABC мають спільну точку K. Отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку K. Щоби побудувати цю пряму, треба знайти ще одну спільну точку площин ABC і KMN. Для цього знайдемо точку перетину прямої MN і площини ABC.

Нехай пряма MN перетинає пряму AB у точці X (рис. 3.18). Оскільки $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Оскільки $MN \subset KMN$, то

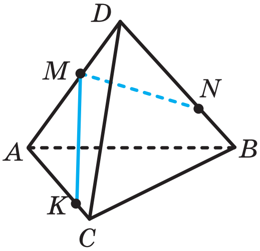


Рис. 3.17

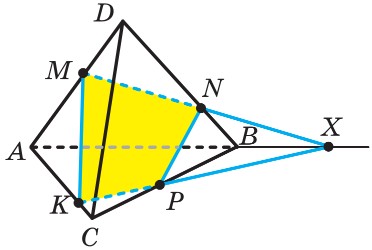


Рис. 3.18

$X \in KMN$. Отже, точки K і X є спільними для площин ABC і KMN. Таким чином, ці площини перетинаються по прямій KX.

Нехай пряма KX перетинає відрізок CB у точці P. Тоді січна площина перетинає грані ABC і CDB відповідно по відрізках KP і PN.

Отже, чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◄

Задача 3. Точка M належить бічному ребру BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Пряма a належить площині ABC і розміщена так, як показано на рисунку 3.19. Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через пряму a і точку M.

Розв'язання. Нехай пряма AB перетинає пряму a в точці X (рис. 3.20). Точки M і X є спільними для січної площини та площини AA_1B_1. Отже, ці площини перетинаються по прямій MX. Нехай пряма MX перетинає ребро AA_1 у точці K. Тоді січна площина перетинає бічну грань AA_1B_1B по відрізку KM.

Аналогічно будуємо відрізок MN, по якому січна площина перетинає грань CC_1B_1B.

Для завершення розв'язання залишилося сполучити точки N і K. Трикутник KMN — шуканий переріз. ◄

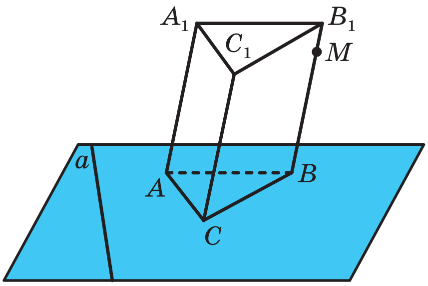


Рис. 3.19

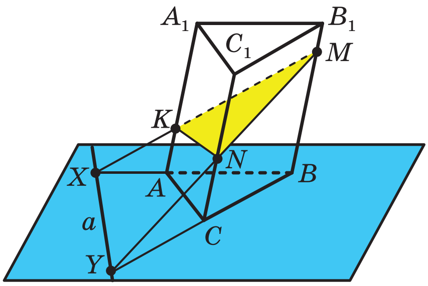


Рис. 3.20

1. Назвіть відомі вам просторові фігури.
2. З яких фігур складається поверхня многогранника? Як їх називають?
3. Що називають ребрами многогранника? вершинами многогранника?
4. Які види многогранників ви знаєте? Опишіть ці многогранники.

ВПРАВИ

3.1.° На рисунку 3.21 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:
1) основи паралелепіпеда;
2) бічні грані паралелепіпеда;
3) бічні ребра паралелепіпеда;
4) ребра нижньої основи паралелепіпеда;
5) ребра, паралельні ребру AB;
6) ребра, паралельні ребру BB_1.

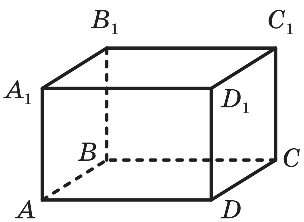


Рис. 3.21

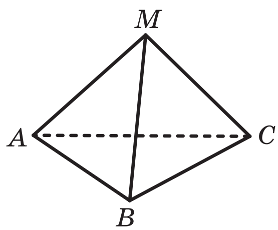


Рис. 3.22

3.2.° На рисунку 3.22 зображено піраміду $MABC$. Укажіть:
1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

3.3.° На ребрі DC тетраедра $DABC$ позначили точку M (рис. 3.23). Серед даних прямих укажіть пряму перетину площин AMB і ADC.

1) AB; 2) CD; 3) AC; 4) AM.

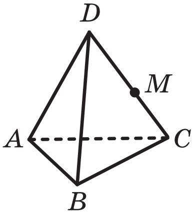


Рис. 3.23

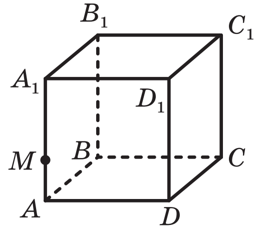


Рис. 3.24

3.4.° На рисунку 3.24 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M належить ребру AA_1. Серед даних прямих укажіть пряму, якій належить точка перетину прямої BM із площиною $A_1D_1C_1$.

1) A_1C_1; 2) A_1B_1; 3) B_1C_1; 4) A_1D_1.

3.5.° Точки M і K належать ребрам CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (рис. 3.25). Серед даних прямих укажіть пряму перетину площин CC_1D_1 і AMK.

1) MK; 2) AK; 3) BM.

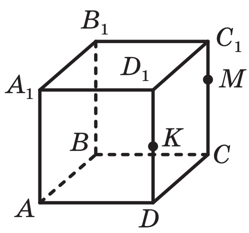


Рис. 3.25

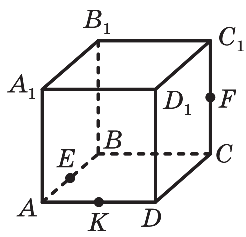


Рис. 3.26

3.6.° Точки E, F і K є серединами ребер AB, CC_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно (рис. 3.26). Скільки ребер куба перетинає площина EFK?

3.7.° На ребрі BC тетраедра $SABC$ позначили точку D. Яка пряма є лінією перетину площин: 1) ASD і ABC; 2) ASD і BSC; 3) ASD і ASC? Побудуйте переріз тетраедра площиною ASD.

3.8.° Точка M належить грані ASC тетраедра $SABC$, точка D — ребру BC (рис. 3.27). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму SD і точку M.

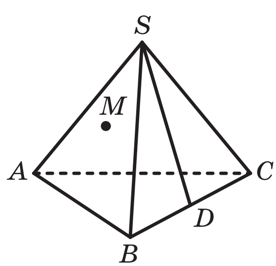


Рис. 3.27

3.9.° На бічних ребрах SA і SB піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AB не є паралельними.

3.10.° На бічних ребрах SA і SC піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AC не є паралельними.

3.11.° Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: 1) точки A, C і B_1; 2) пряму BD і точку C_1.

3.12.° Побудуйте переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через прямі AC_1 і BC_1.

3.13.• Дано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.28). Точка E належить прямій A_1B_1, точка F — прямій BB_1, точка M — прямій B_1C_1. Побудуйте переріз призми площиною EFM.

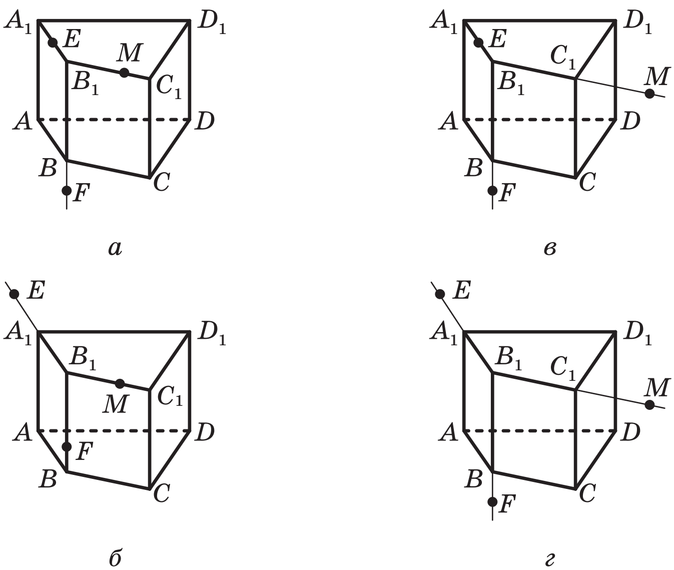


Рис. 3.28

3.14.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.29). Точка D належить прямій AC, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною DEC_1.

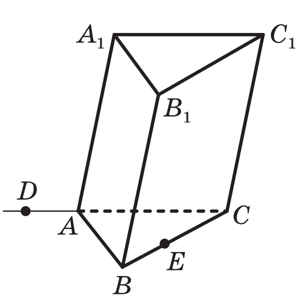


Рис. 3.29

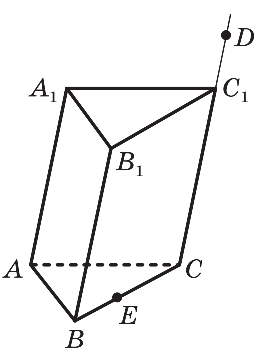


Рис. 3.30

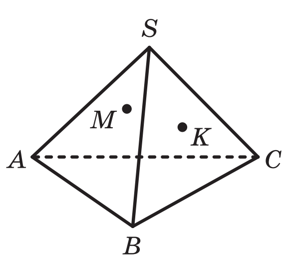


Рис. 3.31

3.15.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3.30). Точка D належить прямій CC_1, точка E — ребру BC. Побудуйте переріз призми площиною AED.

3.16.• Точка M належить грані ASB тетраедра $SABC$, точка K — грані BSC (рис. 3.31). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

3.17.• Точка M належить грані ASB піраміди $SABCD$, точка K — грані CSD (рис. 3.32). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

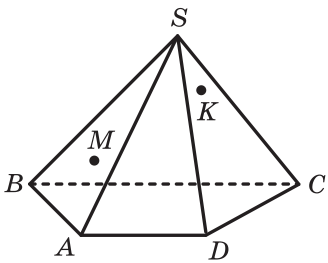


Рис. 3.32

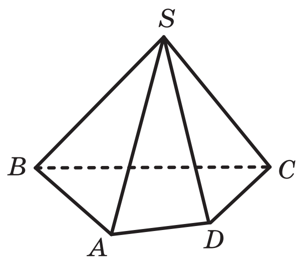


Рис. 3.33

3.18.• Дано піраміду $SABCD$ (рис. 3.33). Побудуйте лінію перетину площин ASB і CSD.

3.19.• Дано піраміду $SABCDE$ (рис. 3.34). Побудуйте лінію перетину площин ASE і BSC.

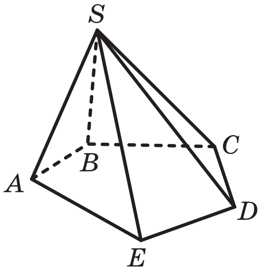


Рис. 3.34

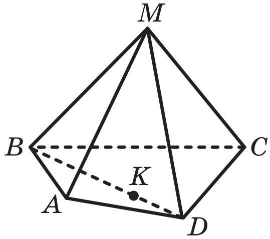


Рис. 3.35

3.20.• На ребрах AB і CD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F. Побудуйте лінію перетину площин AFB і CED.

3.21.• Дано піраміду $MABCD$, точка K належить відрізку BD (рис. 3.35). Побудуйте лінію перетину площин MCK і MAB.

3.22.° На ребрах AD і CD піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K (рис. 3.36). Побудуйте лінію перетину площин BSC і MSK.

3.23.•• На ребрах AB, AD і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і M (рис. 3.37). Побудуйте переріз куба площиною EFM.

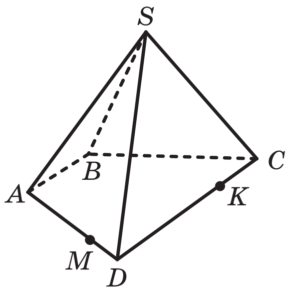


Рис. 3.36

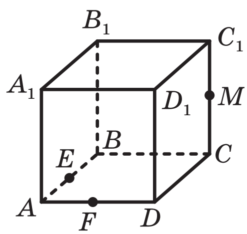


Рис. 3.37

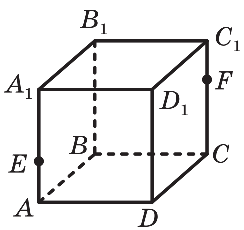


Рис. 3.38

3.24.•• На ребрах AA_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E і F (рис. 3.38). Побудуйте переріз куба площиною EB_1F.

3.25.•• На ребрах BB_1, CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки E, F і K (рис. 3.39). Побудуйте переріз куба площиною EFK.

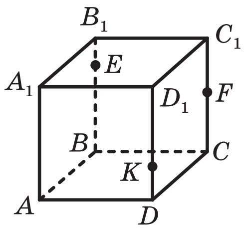


Рис. 3.39

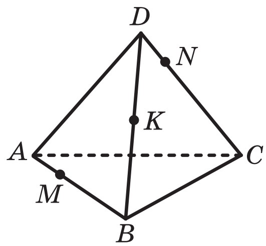


Рис. 3.40

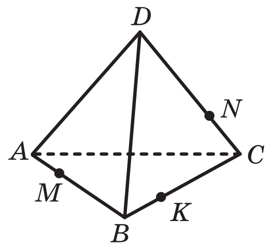


Рис. 3.41

3.26.•• На ребрах AB, BD і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.40). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.27.•• На ребрах AB, BC і CD тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, K і N (рис. 3.41). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

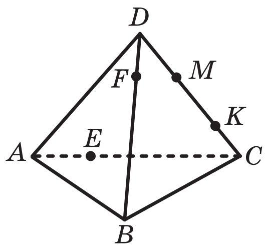


Рис. 3.42

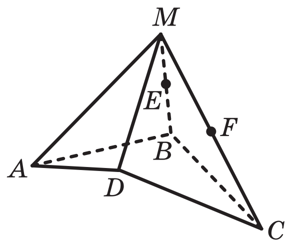


Рис. 3.43

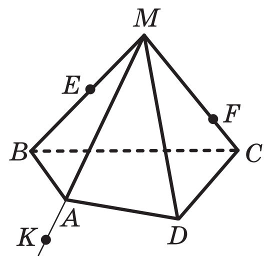


Рис. 3.44

3.28.•• На ребрах AC і BD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F, а на ребрі CD — точки M і K так, що точка K лежить між точками C і M (рис. 3.42). Побудуйте лінію перетину площин ABM і EFK.

3.29.•• На бічних ребрах MB і MC піраміди $MABCD$ позначили відповідно точки E і F (рис. 3.43). Побудуйте лінію перетину площин AEC і BDF.

3.30.•• Дано піраміду $MABCD$ (рис. 3.44). На бічних ребрах MB і MC позначили відповідно точки E і F, а на продовженні ребра MA за точку A — точку K. Побудуйте переріз піраміди площиною EFK.

3.31.•• На ребрі CC_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку E (рис. 3.45). Побудуйте переріз призми площиною BA_1E.

3.32.* Чи можна стверджувати, що коли всі грані многогранника — рівні квадрати, то цей многогранник — куб?

3.33.* Точки M, N і K належать відповідно граням ADB, BDC і CDA тетраедра $DABC$ (рис. 3.46). Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK.

3.34.* Чи може рисунок 3.47 бути зображенням деякого многогранника $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

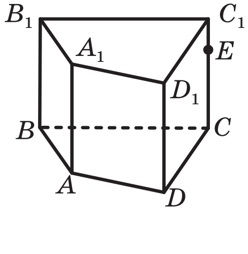


Рис. 3.45

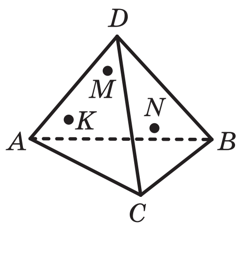


Рис. 3.46

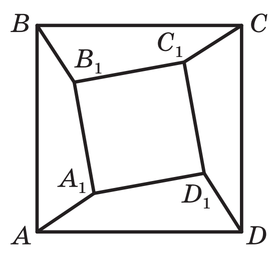


Рис. 3.47

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.35. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

3.36. Через точку перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення площі трикутника EBF до площі трикутника ABC.

МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ

У попередньому пункті ви ознайомилися з поняттям перерізу многогранника й почали вчитися будувати перерізи. Уміння правильно будувати переріз дає змогу коректно будувати фігури, які утворюються в результаті перетину многогранників і площин. Крім того, побудова перерізу може бути ключем до розв'язання низки стереометричних задач. Продемонструємо сказане на прикладах.

Задача 1. На ребрах SA, SB, SC трикутної піраміди $SABC$ позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1. Відомо, що прямі AB і A_1B_1 перетинаються в точці X, прямі BC і B_1C_1 — у точці Y, а прямі AC і A_1C_1 — у точці Z. Доведіть, що точки X, Y і Z лежать на одній прямій.

Семен Петрович Ярошенко
(1846–1917)

Український математик, народився в м. Херсоні. Його робота «Начала новой геометрии» (1873) — перша вітчизняна книга з проективної геометрії.

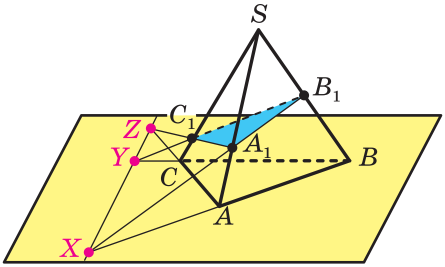


Рис. 3.48

Розв'язання. Розглянемо площини ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.48). Оскільки точка X належить прямій A_1B_1, то точка X належить і площині $A_1B_1C_1$. Крім того, точка X належить прямій AB, а отже, належить площині ABC. Таким чином, точка X належить прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Аналогічно можна довести, що точки Y і Z також належать прямій перетину площин $A_1B_1C_1$ і ABC. Отже, точки X, Y і Z лежать на одній прямій. ◄

Задача 1 пов'язана з важливою теоремою (теоремою Дезарга) розділу математики, який називають проективною геометрією. Якщо в шкільному курсі геометрії одними з головних об'єктів вивчення є величини (довжини відрізків, міри кутів, площі многокутників тощо), то в проективній геометрії головними «дійовими особами» є прямі та точки їхнього перетину. Характерним прикладом твердження проективної геометрії є теорема Дезарга.

Теорема Дезарга. ***Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені на площині так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в одній точці, то точки перетину прямих AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1 належать одній прямій.***

Жерар Дезарг
(1591–1662)

Французький математик, архітектор, військовий інженер. Заклав основи проективної та нарисної геометрій.

Зверніть увагу, що коли на рисунок 3.48 подивитися як на планіметричний (рис. 3.49), то він буде ілюстрацією теореми Дезарга.

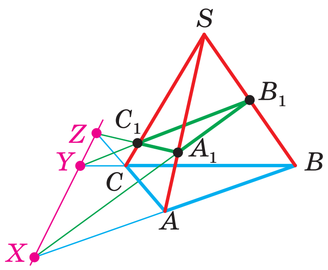


Рис. 3.49

Задача 2. Точки M і K є серединами сторін AC і BC трикутника ABC, а точка S не належить площині ABC. У якому відношенні площина, що проходить через пряму AB і середину відрізка SC, ділить відрізки SM і SK (рис. 3.50)?

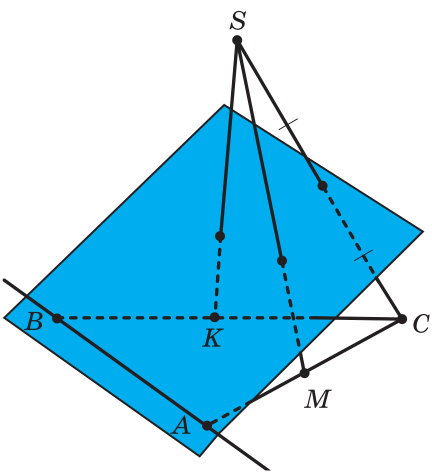


Рис. 3.50

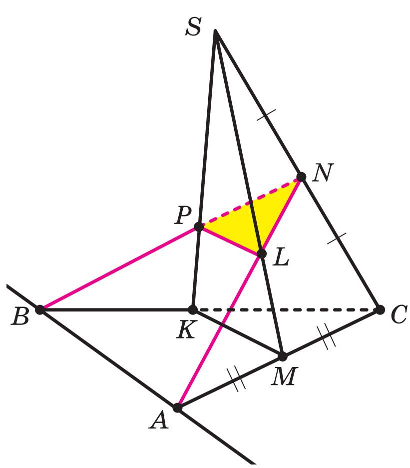


Рис. 3.51

Розв'язання. Позначимо через N середину відрізка SC і побудуємо переріз трикутної піраміди $SKMC$ площиною ABN (рис. 3.51). Для цього проведемо прямі AN і BN та сполучимо точки L і P перетину цих прямих відповідно з ребрами SM і SK. Отримаємо трикутник PNL, який є перерізом. Оскільки точка M — середина сторони AC, а точка N — середина сторони SC, то відрізки AN

і SM є медіанами трикутника ASC (рис. 3.52). Таким чином, точка їхнього перетину L ділить медіану SM у відношенні 2 : 1, рахуючи від точки S. Звідси отримуємо, що $SL : LM = 2 : 1$. Аналогічно можна довести, що $SP : PK = 2 : 1$. ◄

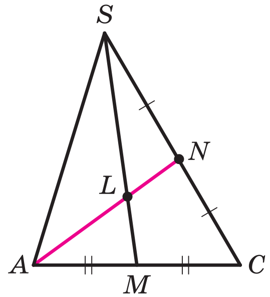


Рис. 3.52

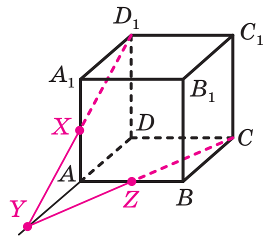


Рис. 3.53

Задача 3. Точка X є серединою ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У якому відношенні площина XCD_1 ділить ребро AB?

Розв'язання. Знайдемо точку перетину площини XCD_1 і прямої AB (рис. 3.53). Нехай пряма D_1X перетинає пряму DA в точці Y. Трикутник YAX подібний трикутнику YDD_1 (рис. 3.54), тому $\frac{YA}{YD} = \frac{AX}{DD_1} = \frac{1}{2}$. Оскільки точки Y і C належать площині перерізу, то й пряма YC також лежить у площині перерізу. Нехай пряма YC перетинає пряму AB у точці Z. Точка Z належить площині перерізу та прямій AB, тому точка Z є точкою перетину площини XCD_1 і прямої AB. Оскільки трикутник YAZ подібний трикутнику YDC (рис. 3.55), то $\frac{YA}{YD} = \frac{AZ}{DC} = \frac{1}{2}$. Звідси випливає, що точка Z є серединою сторони AB, тобто площина XCD_1 ділить ребро AB навпіл.

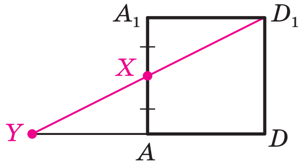


Рис. 3.54

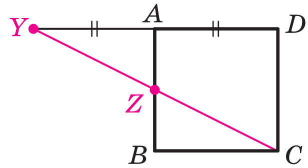


Рис. 3.55

Задача 4. На ребрах AB і BC чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки X і Y так, що $2AX = BX$ і $4BY = BC$. Площина XYC_1 перетинає ребро AA_1 у точці Z. Знайдіть відрізок ZA_1, якщо бічне ребро призми дорівнює 6 см.

Розв'язання. Нехай пряма C_1Y перетинає пряму B_1B у точці K (рис. 3.56). Оскільки трикутник KBY подібний трикутнику KB_1C_1 (рис. 3.57), то $\frac{KB}{KB_1} = \frac{BY}{B_1C_1} = \frac{1}{4}$. Маємо: $KB_1 = KB + BB_1 = KB + 6$ см. Тоді з рівності $\frac{KB}{KB_1} = \frac{1}{4}$ знаходимо, що $KB = 2$ см. Оскільки трикутник KBX подібний трикутнику ZAX (рис. 3.58), то $\frac{KB}{ZA} = \frac{BX}{AX} = 2$. З рівності $\frac{KB}{ZA} = 2$ знаходимо, що $ZA = 1$ см. Звідси $ZA_1 = 5$ см.

Відповідь: 5 см. ◄

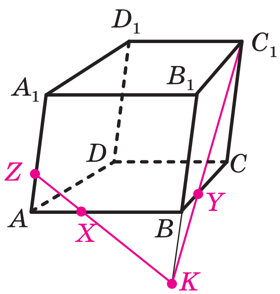


Рис. 3.56

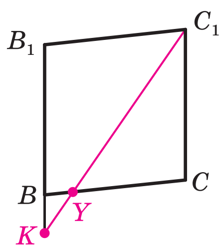


Рис. 3.57

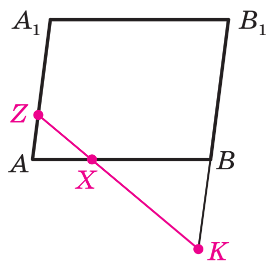


Рис. 3.58

ВПРАВИ

3.37. На ребрах AD, AC і CB тетраедра $DABC$ позначено відповідно точки M, N і K. Прямі NM і CD перетинаються в точці X, а прямі NK і AB — у точці Y. Доведіть, що прямі XK, MY і BD перетинаються в одній точці.

3.38. Доведіть, що середини ребер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1 і A_1A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежать в одній площині.

3.39. На ребрах AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили відповідно точки X і Y так, що $AX : XA_1 = BY : YB_1$. Доведіть, що пряма перетину площин XYC_1 і ABC паралельна прямій AB.

3.40. На ребрах AB і AA_1 чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки X і Y так, що $AX = 2XB$. Побудуйте переріз призми площиною XYC_1. У якому відношенні точка Y ділить ребро AA_1, якщо площина XYC_1 перетинає ребро A_1D_1 у його середині?

3.41. Через вершину A та середини ребер A_1D_1 і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели площину. Побудуйте переріз куба цією площиною та знайдіть, у якому відношенні площина перерізу ділить ребро BC.

3.42. Точка K — середина ребра BC тетраедра $DABC$. Через точку перетину медіан грані ABD і середини відрізків AK і DK провели площину. Побудуйте переріз піраміди цією площиною та знайдіть відстань між точкою A і точкою перетину січної площини з прямою AC, якщо $AC = 12$ см.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основні аксіоми стереометрії

А1. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

А2. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

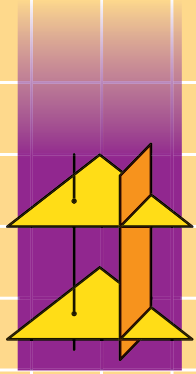
А4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Площина однозначно визначається:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не належить цій прямій;
3) двома прямими, що перетинаються.

Переріз многогранника

Якщо всі спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають перерізом многогранника площиною, а саму площину — січною площиною.



§ 2. Паралельність у просторі

4. **Взаємне розміщення двох прямих у просторі**

5. **Паралельність прямої та площини**

6. **Паралельність площин**

7. **Перетворення фігур у просторі. Паралельне проектування**

- У цьому параграфі ви дізнаєтеся про взаємне розміщення двох прямих, прямої та площини, двох площин у просторі.
- Ознайомитеся з правилами, за якими зображають просторові фігури на площині.
- Отримаєте уявлення про перетворення фігур у просторі.

4. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Із курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку. Таке саме означення прямих, що перетинаються, дають і в стереометрії.

Вам відомо також, що дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються. Чи можна це означення перенести в стереометрію?

Звернемося до рисунка 4.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

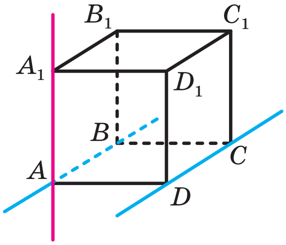


Рис. 4.1

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. **Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.**

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. **Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.**

Наприклад, на рисунку 4.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди дерев'яного зрубу (рис. 4.2).

Міжнародний центр культури і мистецтв, м. Київ

Корабельний ліс

Дерев’яний зруб

Рис. 4.2

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дроти ліній електропередачі, різні елементи будівельних конструкцій (рис. 4.3.)

Рис. 4.3

Отже, існують три можливих випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

1) прямі перетинаються;
2) прямі паралельні;
3) прямі мимобіжні.

Сказане ілюструє рисунок 4.4.

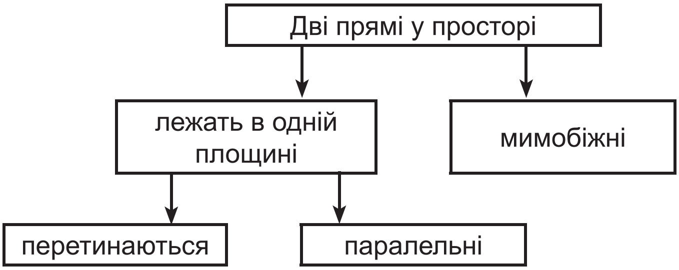


Рис. 4.4

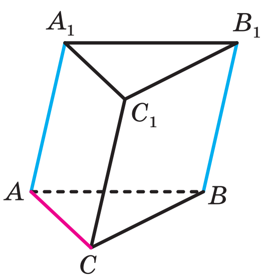


Рис. 4.5

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

Розглянемо деякі властивості паралельних прямих.

Теорема 4.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Існування площини α, яка проходить через прямі a і b, випливає з означення паралельних прямих.

Якщо припустити, що існує ще одна площина, яка проходить через прямі a і b, то через пряму a і деяку точку прямої b проходитимуть дві різні площини, що суперечить теоремі 2.1. ◄

У п. 2 було вказано три способи задання площини. Теорему 4.1 можна розглядати як ще один спосіб задання площини — за допомогою двох паралельних прямих.

Нехай точка A не належить прямій a. Скільки існує прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a? У планіметрії відповідь на це запитання міститься в аксіомі паралельності прямих — існує єдина пряма, яка проходить через точку A та паралельна прямій a. У стереометрії це твердження також можна було б узяти за аксіому. Проте в нашому курсі вже накопичилося чимало змістовних фактів, які дають змогу вивести його як наслідок з інших істинних тверджень.

Теорема 4.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній прямій, проходить пряма, паралельна даній, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано пряму a і точку A такі, що $A \notin a$. Доведемо, що існує єдина пряма b така, що $b \parallel a$ і $A \in b$.

За теоремою 2.1 існує єдина площина α така, що $A \in \alpha$ і $a \subset \alpha$ (рис. 4.6).

За аксіомою **A1** у площині α виконується аксіома паралельності прямих. Тоді в площині α через точку A можна провести пряму, паралельну прямій a. На рисунку 4.6 це пряма b.

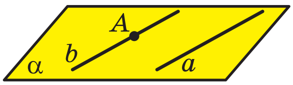


Рис. 4.6

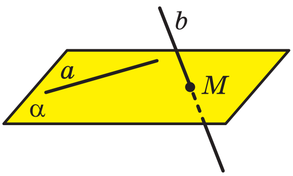


Рис. 4.7

Аксіома паралельності прямих гарантує, що в площині α така пряма b єдина. Проте сказане ще не означає, що в просторі немає інших прямих, які проходять через точку A та паралельні прямій a.

Нехай існує пряма b_1, яка не належить площині α, така, що $A \in b_1$ і $b_1 \parallel a$. Паралельні прямі b_1 і a задають деяку площину β. Площини α і β проходять через пряму a і точку A. Отже, за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Звідси отримуємо, що $b_1 \subset \alpha$. Це суперечить зробленому припущенню.

Отже, пряма b — єдина пряма така, що $b \parallel a$ і $A \in b$. ◄

Установити паралельність двох прямих, які лежать в одній площині, можна за допомогою відомих вам з курсу планіметрії ознак паралельності двох прямих. А як установити, чи є дві прямі мимобіжними? Відповісти на це запитання дає змогу така теорема.

Теорема 4.3 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі мимобіжні.***

Доведення. Нехай дано площину α та прямі a і b такі, що $a \subset \alpha$ і $b \cap \alpha = M$, причому $M \notin a$ (рис. 4.7). Доведемо, що прямі a і b мимобіжні.

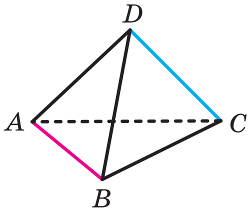


Рис. 4.8

Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними. Тоді вони належать деякій площині β. Площини α і β проходять через пряму a і точку M, яка не належить прямій a. Тоді за теоремою 2.1 ці площини збігаються. Таким чином, $b \subset \alpha$, що суперечить умові $b \cap \alpha = M$. Отже, прямі a і b є мимобіжними. ◄

На рисунку 4.8 ребра AB і DC тетраедра $DABC$ є мимобіжними. Справді, пряма DC перетинає площину ABC у точці C, яка не належить прямій AB. Отже, за ознакою мимобіжних прямих прямі AB і DC є мимобіжними.

Задача. Доведіть, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині (рис. 4.9).

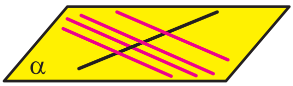


Рис. 4.9

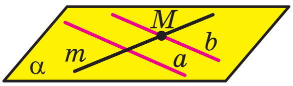


Рис. 4.10

Розв'язання. Нехай a — одна з паралельних прямих, які перетинають дану пряму m. За теоремою 2.2 через прямі a і m, що перетинаються, проходить єдина площина α (рис. 4.10). Доведемо, що будь-яка пряма, що паралельна прямій a та перетинає пряму m, лежить у площині α.

Розглянемо пряму b, яка паралельна прямій a та перетинає пряму m у деякій точці M (рис. 4.10). Припустимо, що пряма b не належить площині α. Оскільки точка M не належить прямій a, то за ознакою мимобіжних прямих прямі b і a є мимобіжними, що суперечить умові $b \parallel a$. Отже, пряма b належить площині α. ◄

?

1. Які дві прямі в просторі називають паралельними?
2. Які дві прямі в просторі називають мимобіжними?
3. Які існують випадки розміщення прямих у просторі?
4. Які два відрізки називають паралельними? мимобіжними?
5. Сформулюйте теорему про площину, яку задають дві паралельні прямі.
6. Сформулюйте теорему про пряму, яка проходить через дану точку паралельно даній прямій.
7. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

ВПРАВИ

4.1.° Дві прямі не паралельні та не перетинаються. Скільки площин можна провести через ці прямі?

4.2.° Точка M лежить поза площиною трикутника ABC. Яким є взаємне розміщення прямих AM і BC:

1) перетинаються;
2) паралельні;
3) мимобіжні;
4) визначити неможливо?

4.3.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.11). Назвіть його ребра: 1) паралельні ребру CD; 2) мимобіжні з ребром CD.

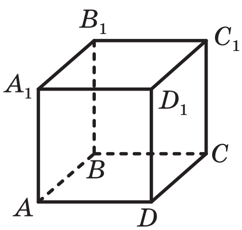


Рис. 4.11

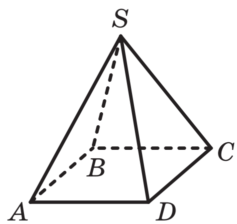


Рис. 4.12

4.4.° Укажіть моделі мимобіжних прямих, використовуючи предмети класної кімнати.

4.5.° Дано піраміду $SABCD$ (рис. 4.12). Назвіть ребра піраміди, мимобіжні з ребром SA.

4.6.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.13). Укажіть взаємне розміщення прямих:

1) BC і A_1C;
2) AB і C_1D_1;
3) BD і CC_1;
4) AB_1 і DC_1;
5) DC_1 і BB_1;
6) AA_1 і CC_1.

4.7.° Чи є правильним твердження:

1) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;
2) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;
3) дві прямі, які лежать в одній площині, перетинаються;
4) дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються та не паралельні?

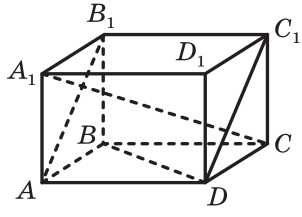


Рис. 4.13

4.8.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.11). Доведіть, що прямі AA_1 і BC мимобіжні.

4.9.° Трикутники ABC і ADB лежать у різних площинах (рис. 4.14). Яким є взаємне розміщення прямих AD і BC? Відповідь обґрунтуйте.

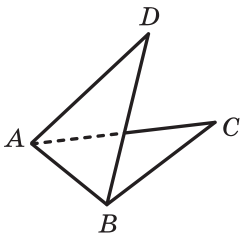


Рис. 4.14

4.10.° Через точку, що не лежить на прямій a, проведено дві прямі, які не мають спільних точок з прямою a. Доведіть, що хоча б одна із цих прямих і пряма a є мимобіжними.

4.11.° Прямі a і b мимобіжні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.12.° Прямі a і b паралельні. Точки A і B належать прямій a, точки C і D — прямій b. Яким є взаємне розміщення прямих AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

4.13.• Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c, якщо:
1) прямі a і b перетинаються, а прямі a і c паралельні;
2) прямі a і b паралельні, а прямі a і c мимобіжні?

4.14.• Скільки площин можуть задавати три попарно паралельні прямі? Зробіть рисунок.

4.15.• Скільки площин задають чотири попарно паралельні прямі, жодні три з яких не лежать в одній площині? Зробіть рисунок.

4.16.• Кінець A відрізка AB належить площині α. Через точку B і точку C, що належить відрізку AB, проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно.
1) Доведіть, що точки A, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок BB_1, якщо точка C — середина відрізка AB і $CC_1 = 5$ см.
3) Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AC : BC = 3 : 4$ і $BB_1 = 28$ см.

4.17.• Кінець C відрізка CD належить площині β. На відрізку CD позначили точку E так, що $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D і E провели паралельні прямі, які перетинають площину β у точках D_1 і E_1 відповідно. Знайдіть відрізок DD_1, якщо $EE_1 = 12$ см.

4.18.• На відрізку AB, який не перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно.

1) Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.
2) Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $B_1C_1 = 10$ см.

4.19.• Точка C — середина відрізка AB, який не перетинає площину β. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину β у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

4.20.• Прямі a, b і c перетинають площину α в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій (рис. 4.15). Пряма b перетинає пряму a в точці D, а пряма c — у точці E. Доведіть, що прямі b і c мимобіжні.

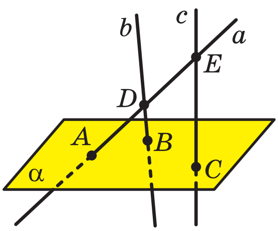


Рис. 4.15

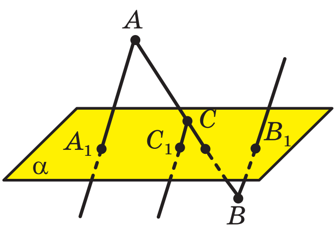


Рис. 4.16

4.21.• Відомо, що прямі a і b мимобіжні та прямі b і c мимобіжні. Чи можна стверджувати, що прямі a і c є мимобіжними?

4.22.• Для прямих на площині є правильним твердження: «Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму». Чи є правильним це твердження для прямих у просторі?

4.23.• Точка M не належить жодній із мимобіжних прямих a і b. Чи можна через точку M провести дві прямі, кожна з яких перетинатиме і пряму a, і пряму b?

4.24.• Точка M не належить жодній із паралельних прямих a і b. Відомо, що через точку M можна провести пряму, яка перетинатиме кожну з прямих a і b. Доведіть, що прямі a і b та точка M лежать в одній площині.

4.25.•• Через кінці відрізка AB, що перетинає площину α, і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно (рис. 4.16). Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

4.26.•• На відрізку AB, який перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC : BC = 5 : 3$. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 10$ см, $CC_1 = 4$ см і точки A і C лежать по різні боки від площини α.

4.27.•• Трикутник ABC не має спільних точок із площиною α. Відрізок BM — медіана трикутника ABC, точка O — середина відрізка BM. Через точки A, B, C, M і O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 і O_1 відповідно. Знайдіть відрізок BB_1, якщо $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

4.28.* Вершина A паралелограма $ABCD$ належить площині α. Через вершини B, C і D проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $DD_1 = 9$ см, $BB_1 = 26$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.29. Пряма перетинає сторону AB трикутника ABC у точці M, а сторону BC — у точці K таких, що $\frac{BM}{MA} = \frac{BK}{KC}$. Доведіть, що $MK \parallel AC$.

4.30. Точка E — середина медіани BM трикутника ABC. Пряма AE перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відношення, у якому точка K ділить відрізок BC, рахуючи від вершини B.

5. Паралельність прямої та площини

Вам уже відомі два можливих випадки взаємного розміщення прямої та площини:

1) пряма належить площині, тобто всі точки прямої належать площині;
2) пряма перетинає площину, тобто пряма має з площиною тільки одну спільну точку.

Зрозуміло, що можливий і третій випадок, коли пряма та площина не мають спільних точок. Наприклад, пряма, яка містить ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не має спільних точок із площиною ABC (рис. 5.1).

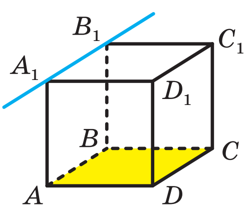


Рис. 5.1

Означення. **Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.**

Якщо пряма a та площина α паралельні, то записують: $a \parallel \alpha$. Також прийнято говорити, що пряма a паралельна площині α, а площина α паралельна прямій a.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад бруси, паралельні площині підлоги (рис. 5.2). Інший приклад — водостічна труба: вона паралельна площині стіни (рис. 5.3).

Рис. 5.2

Рис. 5.3

З'ясовувати, чи є дані пряма та площина паралельними, за допомогою означення складно. Набагато ефективніше користуватися такою теоремою.

Теорема 5.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Доведення. Нехай пряма a, яка не належить площині α, і пряма b, яка належить площині α, є такими, що $a \parallel b$. Доведемо, що $a \parallel \alpha$.

Припустимо, що пряма a перетинає площину α в деякій точці M (рис. 5.4). Якщо $M \in b$, то прямі a і b перетинатимуться, що суперечить умові $a \parallel b$. Якщо $M \notin b$, то за ознакою мимобіжних прямих прямі a і b будуть мимобіжними, що також суперечить умові $a \parallel b$. Отже, пряма a не може перетинати площину α. Таким чином, $a \parallel \alpha$. ◄

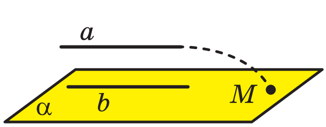


Рис. 5.4

На рисунку 5.1 прямі A_1B_1 і AB містять протилежні сторони квадрата ABB_1A_1. Ці прямі паралельні. Оскільки $AB \subset ABC$, то за ознакою паралельності прямої та площини $A_1B_1 \parallel ABC$.

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він належить прямій, паралельній цій площині. Наприклад, ребро AB куба паралельне площині CDD_1 (рис. 5.1).

Ви вмієте встановлювати паралельність двох прямих за допомогою теорем-ознак, відомих із планіметрії. Розглянемо теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 5.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

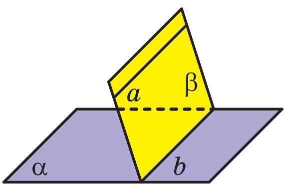


Рис. 5.5

Доведення. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = b$ (рис. 5.5). Доведемо, що $a \parallel b$.

Прямі a і b лежать в одній площині. Отже, вони або перетинаються, або паралельні. Якщо пряма a перетинає пряму b, то вона також перетинатиме площину α, що суперечить умові $a \parallel \alpha$. Отже, прямі a і b не перетинаються, тобто $a \parallel b$. ◄

Наслідок. ***Якщо пряма паралельна площині, то в цій площині існує пряма, паралельна даній прямій.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 5.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b та площини α і β такі, що $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5.6). Доведемо, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

Оскільки $a \parallel b$ і $b \subset \beta$, то за ознакою паралельності прямої та площини отримуємо, що $a \parallel \beta$. Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину β по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$. ◄

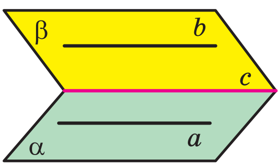


Рис. 5.6

Теорема 5.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Доведення. Нехай дано три прямі a, b і c такі, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Випадок, коли прямі a, b і c лежать в одній площині, розглянуто в планіметрії. Тепер розглянемо випадок, коли ці прямі не лежать в одній площині.

Виберемо на прямій a довільну точку M. Через пряму b і точку M проведемо площину α, а через пряму c і точку M — площину β (рис. 5.7). Нехай $\alpha \cap \beta = a_1$. Оскільки $b \parallel c$, то за теоремою 5.3 отримуємо, що $b \parallel a_1$ і $c \parallel a_1$. Тоді через точку M проходять дві прямі a і a_1, паралельні прямій c. Отже, прямі a і a_1 збігаються. Отримали, що $a \parallel b$. ◄

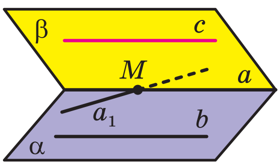


Рис. 5.7

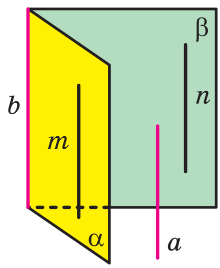


Рис. 5.8

Задача 1. Доведіть, що коли пряма паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, то вона паралельна прямій їхнього перетину.

Розв'язання. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 5.8). Доведемо, що $a \parallel b$.

За наслідком із теореми 5.2 у площинах α і β знайдуться відповідно такі прямі m і n, що $m \parallel a$ і $n \parallel a$. Якщо хоча б одна з прямих m і n збігається з прямою b, то твердження задачі доведено. Якщо ж кожна з прямих m і n відмінна від прямої b, то за теоремою 5.4 отримуємо, що $m \parallel n$.

Скориставшись теоремою 5.3, доходимо висновку, що $b \parallel n$. Але $n \parallel a$, отже, $a \parallel b$. ◄

Задача 2. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через ребро AC основи та точку M, що належить ребру A_1B_1 другої основи.

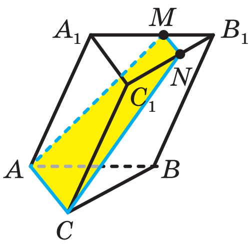


Рис. 5.9

Розв'язання. Січна площина та площина $A_1B_1C_1$ мають спільну точку M, отже, вони перетинаються по прямій, яка проходить через точку M (рис. 5.9).

Оскільки чотирикутник AA_1C_1C — паралелограм, то пряма AC паралельна прямій A_1C_1. Отже, $AC \parallel A_1B_1C_1$. Тоді за теоремою 5.2 січна площина перетинає площину $A_1B_1C_1$ по прямій, паралельній прямій AC.

У площині $A_1B_1C_1$ через точку M проведемо пряму, паралельну прямій A_1C_1 (рис. 5.9). Нехай ця пряма перетинає ребро B_1C_1 у точці N. За теоремою 5.4 отримуємо, що $MN \parallel AC$. Тоді чотирикутник $AMNC$ — шуканий переріз. ◄

Задача 3. Побудуйте переріз тетраедра $DABC$ площиною, яка проходить через середини M і N відповідно ребер AD і BD та точку P, що належить ребру BC.

Розв'язання. Сполучимо точки M і N (рис. 5.10). Оскільки відрізок MN — середня лінія трикутника ADB, то $MN \parallel AB$. Отже, $MN \parallel ABC$.

За теоремою 5.2 січна площина перетинає площину ABC по прямій, паралельній прямій MN, причому ця пряма проходить через точку P. Проведемо через точку P пряму, паралельну прямій MN. Нехай K — точка перетину проведеної прямої зі стороною AC (рис. 5.11). Чотирикутник $KMNP$ — шуканий переріз. ◄

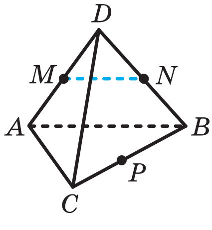


Рис. 5.10

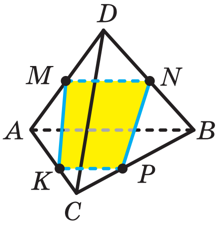


Рис. 5.11

1. У якому разі пряму та площину називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.
3. Який відрізок називають паралельним площині?
4. Сформулюйте теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

ВПРАВИ

5.1.° Укажіть серед предметів, що вас оточують, моделі площини та прямої, яка їй паралельна.

5.2.° Прямі a і b паралельні площині α. Яким є взаємне розміщення прямих a і b:
1) паралельні;
2) перетинаються;
3) мимобіжні;
4) визначити неможливо?

5.3.° На рисунку 5.12 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед даних пар прямих укажіть пару паралельних прямих:
1) A_1D і B_1C_1;
2) AA_1 і BD;
3) A_1B_1 і A_1C_1;
4) DC і A_1B_1.

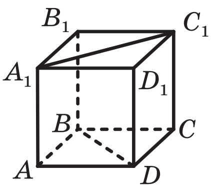


Рис. 5.12

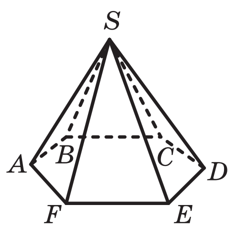


Рис. 5.13

5.4.° Прямі a і b паралельні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a та паралельні прямій b?

5.5.° Прямі a і b мимобіжні. Скільки існує площин, які проходять через пряму a та паралельні прямій b?

5.6.° На рисунку 5.13 зображено піраміду $SABCDEF$, основою якої є правильний шестикутник $ABCDEF$. Площина якої з бічних граней паралельна прямій AB?

5.7.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.14). Площинам яких граней куба паралельне ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

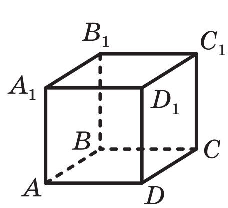


Рис. 5.14

5.8.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.15), точки E і F — середини ребер CC_1 і DD_1 відповідно. Запишіть грані паралелепіпеда, яким паралельна пряма: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

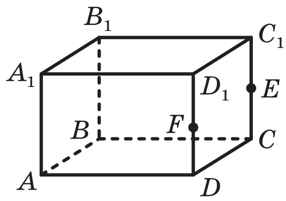


Рис. 5.15

5.9.° Пряма a паралельна площині α. Чи є правильним твердження, що пряма a паралельна будь-якій прямій, що лежить у площині α?

5.10.° Дано прямі a і b та площину α. Чи є правильним твердження:

1) якщо $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;

2) якщо $a \parallel b$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel \alpha$;

3) якщо $a \parallel b$ і $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

5.11.° Пряма a та площина α паралельні прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a та площини α?

5.12.° Прямі a і b перетинаються, а площина α паралельна прямій a. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

5.13.° Вершини E і F правильного шестикутника $ABCDEF$ лежать у площині α, відмінній від площини шестикутника (рис. 5.16). Яким є взаємне розміщення площини α і прямої: 1) BC; 2) AB; 3) BD; 4) AD?

5.14.° Точки M і K — середини відповідно сторін AB і BC трикутника ABC. Точка D не належить площині ABC. Доведіть, що $MK \parallel ADC$.

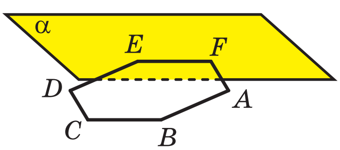


Рис. 5.16

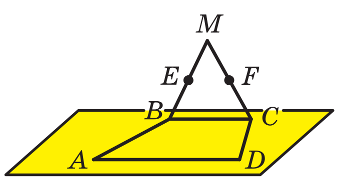


Рис. 5.17

5.15.° Точки E і F — середини відповідно бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Пряма EF лежить у площині α, відмінній від площини трапеції. Доведіть, що прямі AD і BC паралельні площині α.

5.16.° Відрізки BC і AD — основи трапеції $ABCD$. Трикутник BMC і трапеція $ABCD$ не лежать в одній площині (рис. 5.17). Точка E — середина відрізка BM, точка F — середина відрізка CM. Доведіть, що $EF \parallel AD$.

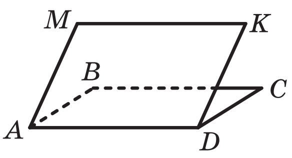


Рис. 5.18

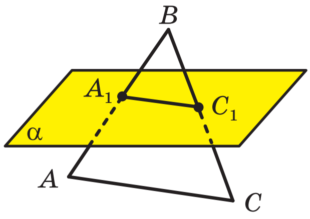


Рис. 5.19

5.17.° Паралелограми $ABCD$ і $AMKD$ не лежать в одній площині (рис. 5.18). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

5.18.• Площина α, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC у точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 5.19). Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $AC = 18$ см і $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

5.19.• Площина α, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони AC і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення $AE : EC$, якщо $CF : CB = 3 : 11$.

5.20.• Вершини A і C трикутника ABC належать площині α, а вершина B не належить цій площині. На сторонах AB і BC позначено відповідно точки E і F так, що $BA : BE = BC : BF$. Доведіть, що пряма EF паралельна площині α.

5.21.• Точка M — середина сторони AB трикутника ABC. Площина α проходить через точку M паралельно прямій AC і перетинає сторону BC у точці K. Доведіть, що точка K — середина сторони BC. Знайдіть площу чотирикутника $AMKC$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 28 см^2.

5.22.• На ребрі CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 5.20). Побудуйте лінію перетину площин: 1) ADM і BB_1C_1; 2) AA_1M і DCC_1.

5.23.• На ребрі A_1B_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 5.21). Побудуйте лінію перетину площин: 1) CC_1K і ABB_1; 2) CDK і ABB_1.

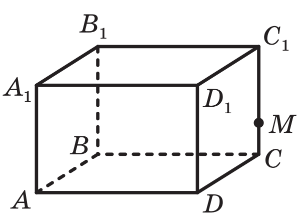


Рис. 5.20

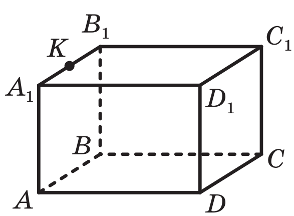


Рис. 5.21

5.24.• Точка M — середина ребра DC тетраедра $DABC$ (рис. 5.22). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку M і паралельна прямим AD і BD. Обчисліть площу перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює a.

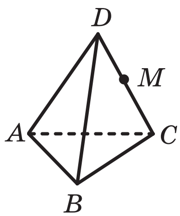


Рис. 5.22

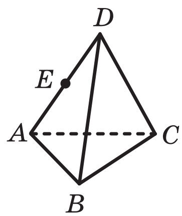


Рис. 5.23

5.25.• Точка E — середина ребра AD тетраедра $DABC$ (рис. 5.23). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точки B і E та паралельна прямій AC. Обчисліть периметр перерізу, якщо кожне ребро тетраедра дорівнює 4 см.

5.26.• Точка M належить ребру AA_1 призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.24). Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через точки M і C_1 та паралельна прямій AB.

5.27.• Точки E і F — середини відповідно ребер AB і BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.25). Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки E і F та паралельна прямій DD_1. Обчисліть периметр перерізу, якщо ребро куба дорівнює a.

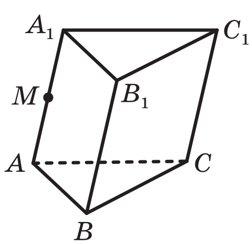


Рис. 5.24

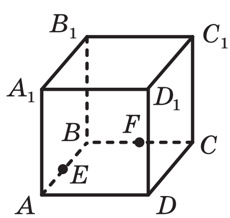


Рис. 5.25

5.28.• Дано тетраедр $DABC$. Площина α проходить через пряму CD і паралельна прямій AB. Побудуйте лінію перетину площини α і площини ABC.

5.29.• Точка M не належить площині паралелограма $ABCD$. Побудуйте лінію перетину площин AMB і CMD.

5.30.$^{\bullet}$ Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, BC, AD і CD тетраедра $DABC$. Доведіть, що відрізки MF і KE перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

5.31.$^{\bullet}$ Пряма a належить площині α, пряма b — площині β, пряма c — лінія перетину площин α і β. Доведіть, що коли пряма c не перетинає жодну з прямих a і b, то $a \parallel b$.

5.32.$^{\bullet}$ Пряма a паралельна площині α. Через точку M, яка лежить у площині α, проведено пряму b, паралельну прямій a. Доведіть, що пряма b лежить у площині α.

5.33.$^{\bullet}$ Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих проходить площина, паралельна другій прямій, і до того ж тільки одна.

5.34.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли дві дані площини, що перетинаються, перетинають третю площину по паралельних прямих, то лінія перетину даних площин паралельна цій третій площині.

5.35.$^{\bullet}$ Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, CD і AA_1. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 10$ см, $AD = 17$ см, $AA_1 = 24$ см.

5.36.$^{\bullet}$ На ребрі BC тетраедра $DABC$ позначили точку E так, що $BE : EC = 2 : 1$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через точку E паралельно прямим AB і CD. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 18$ см, $CD = 12$ см.

5.37.$^{\bullet}$ На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.26). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій CD.

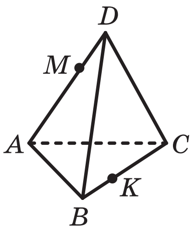


Рис. 5.26

5.38.$^{\bullet}$ На ребрах AD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K (рис. 5.26). Побудуйте переріз тетраедра площиною, яка проходить через пряму MK паралельно прямій AB.

5.39.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AB і C_1D_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте лінію перетину площин AA_1K і DD_1M. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої AA_1?

5.40.•• На ребрі BB_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точки E і F (рис. 5.27). Побудуйте лінію перетину площин AFD і A_1ED_1. Яким є взаємне розміщення побудованої прямої та прямої BC?

5.41.•• Точки E і F — середини відповідно ребер AD і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через пряму EF паралельно прямій B_1D.

5.42.•• Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки D і M паралельно прямій AC_1.

5.43.•• Точки M, N і K належать відповідно граням AA_1C_1C, AA_1B_1B і BB_1C_1C призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.28). Побудуйте переріз призми площиною MNK.

5.44.•• Основою піраміди $SABCDE$ є п'ятикутник $ABCDE$. На ребрах SE і SD позначили відповідно точки M і N (рис. 5.29). Відомо, що $\frac{SM}{SE} = \frac{SN}{SD}$. Побудуйте переріз піраміди площиною BMN.

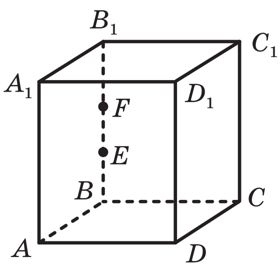


Рис. 5.27

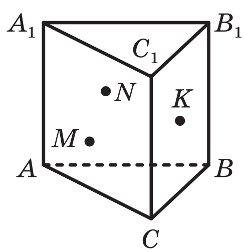


Рис. 5.28

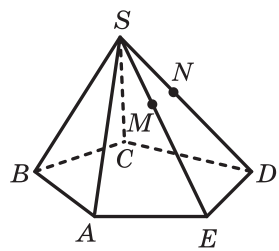


Рис. 5.29

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.45. Основи трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а одна з діагоналей — 20 см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей трапеції ділить дану діагональ.

5.46. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як 3 : 5, а різниця основ дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює 13 см.

6. Паралельність площин

Розглянемо варіанти можливого взаємного розміщення двох площин.

Ви знаєте, що дві площини можуть мати спільні точки, тобто перетинатися. Зрозуміло, що дві площини можуть і не мати спільних точок. Наприклад, площини ABC і $A_1B_1C_1$, які містять основи призми, не мають спільних точок (рис. 6.1).

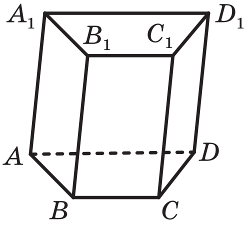


Рис. 6.1

Означення. Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Також прийнято говорити, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно (рис. 6.2).

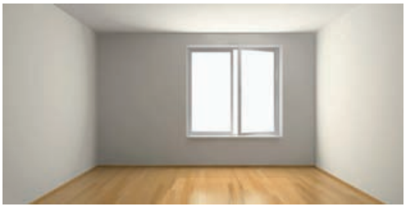


Рис. 6.2

З означення паралельних площин випливає, що *будь-яка пряма, що лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині*. Доведіть це твердження самостійно.

У тих випадках, коли треба з'ясувати, чи є дві площини паралельними, зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 6.1 (ознака паралельності двох площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b, які перетинаються та належать площині α, і прямі a_1 і b_1, які належать площині α_1, такі, що $a \parallel a_1$ і $b \parallel b_1$. Доведемо, що $\alpha \parallel \alpha_1$.

Припустимо, що площини α і α_1 перетинаються. Нехай $\alpha \cap \alpha_1 = c$ (рис. 6.3).

Оскільки $a \parallel a_1$ і $a_1 \subset \alpha_1$, то за ознакою паралельності прямої та площини $a \parallel \alpha_1$.

Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину α_1 по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$.

Таким чином, отримали, що в площині α кожна з двох прямих a і b, які перетинаються, паралельна прямій c. А це суперечить аксіомі паралельності прямих.

Отже, припущення про те, що площини α і α_1 перетинаються, є хибним, тому $\alpha \parallel \alpha_1$. ◄

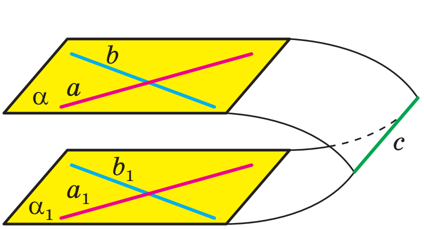


Рис. 6.3

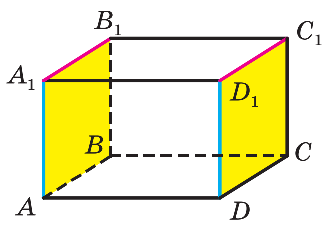


Рис. 6.4

На рисунку 6.4 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності двох площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Будемо говорити, що **два многокутники паралельні**, якщо вони лежать у паралельних площинах. Наприклад, грані AA_1B_1B і DD_1C_1C прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні (рис. 6.4).

Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

Теорема 6.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна.***

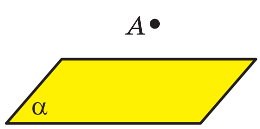


Рис. 6.5

Доведення. Нехай дано площину α і точку A, яка їй не належить (рис. 6.5). Доведемо, що через точку A проходить площина, паралельна площині α.

У площині α проведемо дві прямі a і b, що перетинаються. Через точку A проведемо

Зміст