А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.

ISBN 978-966-474-310-2.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-474-310-2

ВІД АВТОРІВ

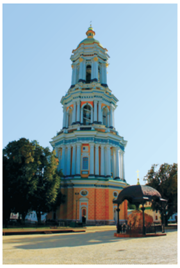
Любі десятикласники та десятикласниці!

У наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Сподіваємось, що отримати ґрунтовні математичні знання вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Він складається з двох розділів: перший присвячений алгебрі і початкам аналізу (пункти 1–26), другий — стереометрії (пункти 27–43).

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий навчальний предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Цього року ви починаєте знайомство з елементами математичного аналізу; вам доведеться розглядати нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

Розділ геометрії, у якому вивчають фігури в просторі та їхні властивості, називають **стереометрією**. Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «стереос» — «об'ємний», «просторовий» і «метрео» — «вимірювати». Знати стереометрію надзвичайно важливо. Без просторової уяви та глибоких геометричних знань неможливо опанувати інженерні професії, будівельну або архітектурну справу, працювати в галузі комп'ютерної графіки, дизайну, моделювання одягу та взуття тощо. І це зрозуміло, адже більшість об'єктів, що нас оточують, — створених як людиною, так і природою, — не є плоскими (рис. 1).



Дзвіниця Києво-Печерської лаври

Українськії літак «Мрія» — найбільший літак у світі

Вид Землі з космосу

Рис. 1

Підручник поділено на пункти. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

◀ — закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які можна розв'язувати усно.

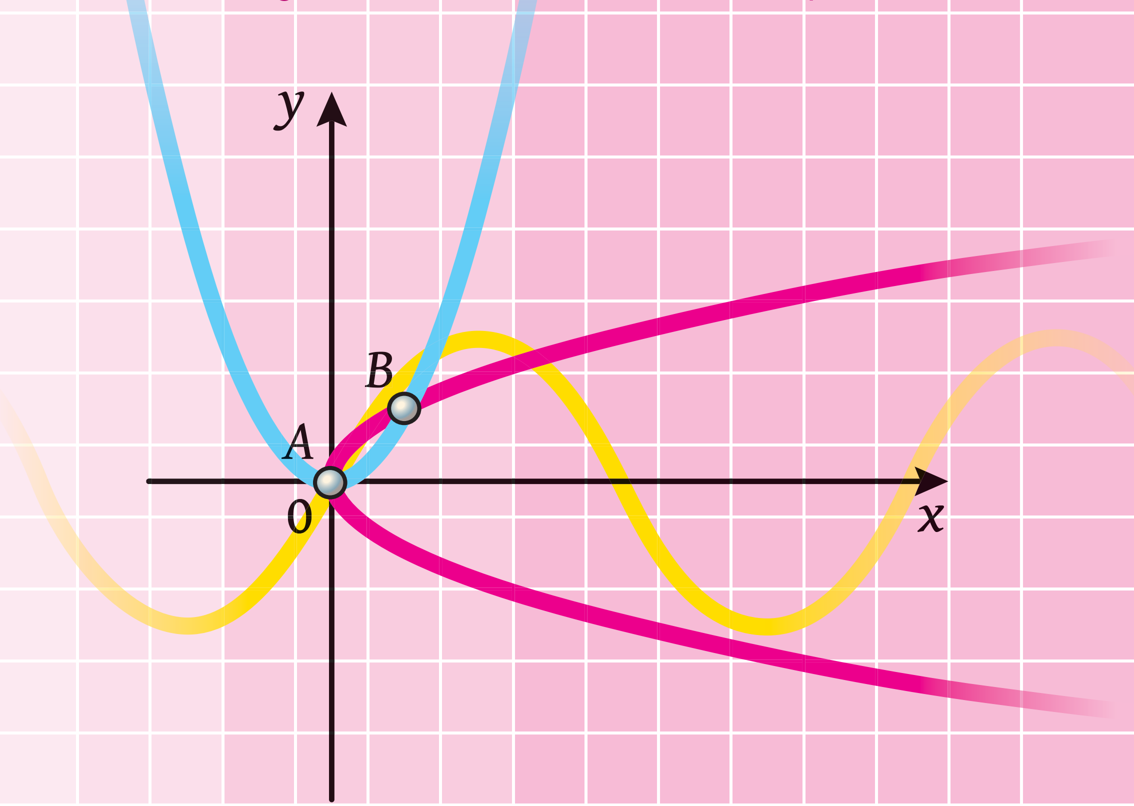
Розділ 1

Алгебра і початки аналізу

§1. Функції, їхні властивості та графіки

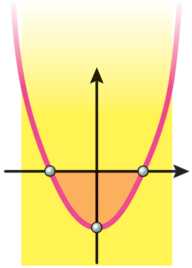
§2. Тригонометричні функції

§3. Похідна та її застосування



ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

§1



У цьому параграфі ви повторите основні відомості про функцію; дізнаєтеся, що називають найбільшим і найменшим значеннями функції на множині, які функції називають парними, а які — непарними; ознайомитеся з властивостями графіків парних і непарних функцій.

Ви дізнаєтесь, яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником, які властивості має ця функція; що називають коренем n-го степеня, які властивості має корінь n-го степеня; що називають степенем з раціональним показником і які його властивості; які рівняння називають ірраціональними.

Ви навчитеся добувати корені n-го степеня; виконувати піднесення до степеня з раціональним показником; перетворювати вирази, які містять степені з раціональним показником і корені n-го степеня; розв'язувати ірраціональні рівняння.

1. Найбільше і найменше значення функції. Парні та непарні функції

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо виконати вправи 1.24–1.28.

У 7 класі ви ознайомилися з поняттям функції і під час вивчення багатьох розділів курсу алгебри неодноразово зверталися до цього поняття. Таке значне місце функція займає не випадково, адже математичними моделями багатьох реальних процесів є саме функції.

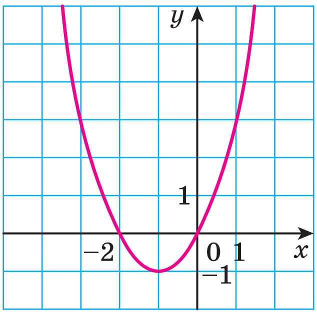


Рис. 1.1

Вам відомі такі поняття, як *область визначення, область значень, нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання та спадання* функції.

Наприклад, для функції $y = x^2 + 2x$, графік якої зображено на рисунку 1.1, маємо:

- область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- область значень: $E(y) = [-1; +\infty)$;
- нулі: числа -2 і 0;

- проміжки знакосталості: функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$, а від'ємних значень — на проміжку $(-2; 0)$;
- проміжки зростання та спадання: функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

Наведений вище перелік аж ніяк не вичерпує тих властивостей, які доцільно вивчати під час дослідження функції. Розглянемо нові поняття, які допомагають детальніше охарактеризувати функцію.

Означення. Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Позначають: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Означення. Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Позначають: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для функції $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо (рис. 1.2): $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$.

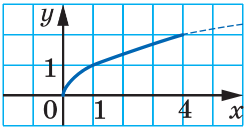


Рис. 1.2

Для функції $f(x) = x^2$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо (рис. 1.3): $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 4$.

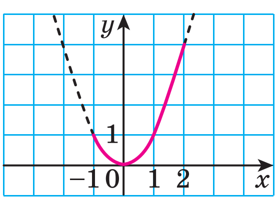


Рис. 1.3

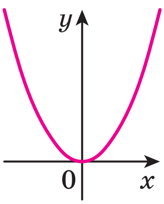


Рис. 1.4

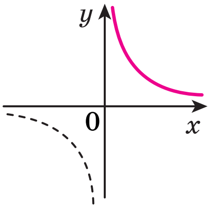


Рис. 1.5

Не будь-яка функція на заданій множині має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині дійсних чисел ця функція не має (рис. 1.4).

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $(0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень (рис. 1.5).

Означення. **Функцію f називають *парною*, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають *непарною*, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.**

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ є парною, а функція $g(x) = x^3$ — непарною. Справді, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f є симетричною відносно початку координат, тобто має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$.

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути ні парною, ні непарною.

Наприклад, областю визначення функції $y = \dfrac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

Задача. Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Отже, функція f є непарною. ◄

Теорема 1.1. **Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.**

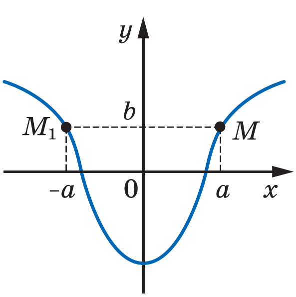


Рис. 1.6

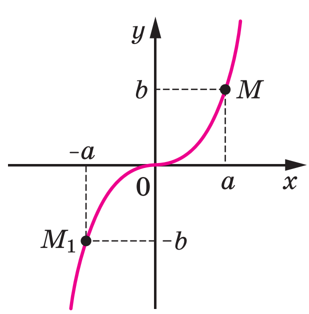


Рис. 1.7

Теорема 1.2. Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Твердження теорем 1.1 і 1.2 проілюстровано на рисунках 1.6 і 1.7 відповідно.

1. Яке число називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині?
2. Як позначають найбільше (найменше) значення функції f на множині M?
3. Яку функцію називають парною (непарною)?
4. Яку властивість має графік парної (непарної) функції?

ВПРАВИ

1.1.° На рисунку 1.8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:

1) $[1; 2]$; 2) $[-2,5; 1]$; 3) $[-2,5; 3,5]$.

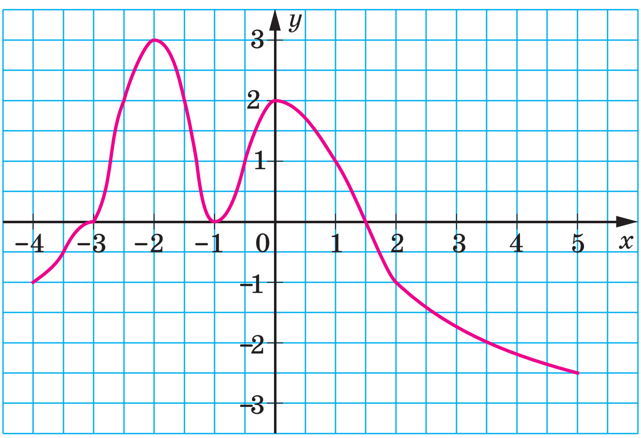


Рис. 1.8

1.2.° На рисунку 1.9 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:

1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$.

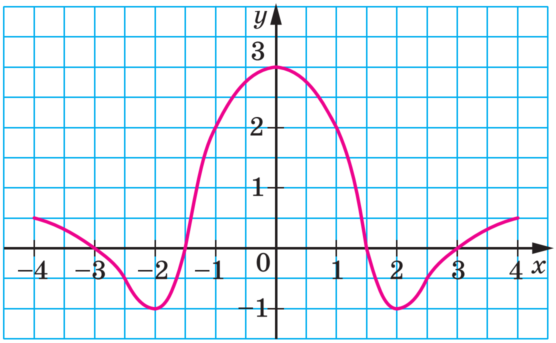


Рис. 1.9

1.3.° Відомо, що $f(7) = -16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

1.4.° Відомо, що $f(-3) = 8$. Знайдіть $f(3)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

1.5.• Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:
1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$?

1.6.• Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:
1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$?

1.7.• Чи є парною функція, задана формулою $y = x^2$, якщо її областю визначення є множина:
1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

1.8.• На проміжку $[2; 5]$ знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x) = -\frac{10}{x}$; 2) $f(x) = \frac{20}{x}$.

1.9.• Доведіть, що є парною функція:
1) $f(x) = -5x^4$; 2) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$.

1.10.• Доведіть, що є парною функція:
1) $f(x) = x^6$; 2) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$.

1.11.• Доведіть, що є непарною функція:
1) $f(x) = 4x^7$; 2) $f(x) = 2x - 3x^5$.

1.12.• Доведіть, що є непарною функція:
1) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$.

1.13.•• Знайдіть:

1) $\max\limits_{[1;\,2]} (-x^2 + 6x)$; 2) $\min\limits_{[1;\,4]} (-x^2 + 6x)$; 3) $\max\limits_{[4;\,5]} (-x^2 + 6x)$.

1.14.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = x^2 + 2x - 8$ на проміжку:

1) $[-5;\ -2]$; 2) $[-5;\ 1]$; 3) $[0;\ 3]$.

1.15.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2}{x^3 - x}$.

1.16.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$; 2) $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2 - 9}$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$.

1.17.•• Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку 1.10?

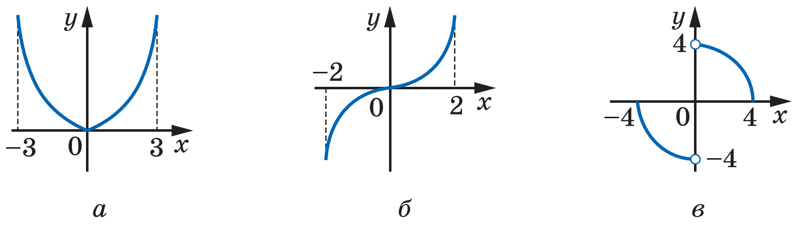


Рис. 1.10

1.18.•• На рисунку 1.11 зображено частину графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5;\ 5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

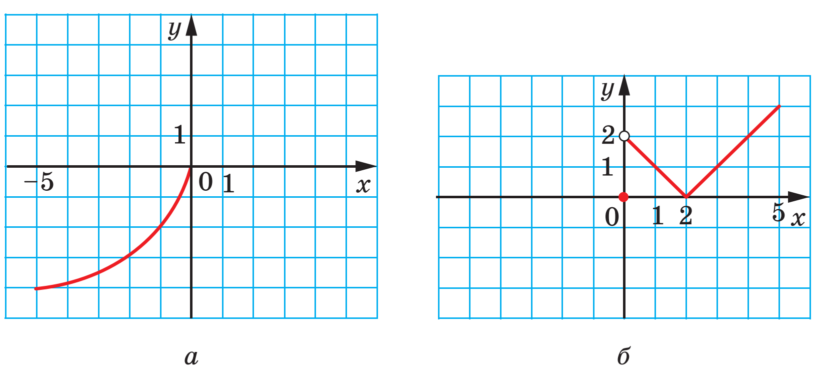


Рис. 1.11

1.19.•• Ламана $ABCD$, де $A\,(0;\ 0)$, $B\,(2;\ -2)$, $C\,(3;\ 4)$, $D\,(6;\ 1)$, є частиною графіка функції $y = f\,(x)$, визначеної на проміжку $[-6;\ 6]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є:
1) парною;
2) непарною.

1.20.•• Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:
1) найбільше значення, якого може набувати добуток цих чисел;
2) найменше значення, якого може набувати сума квадратів цих чисел.

1.21.•• Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

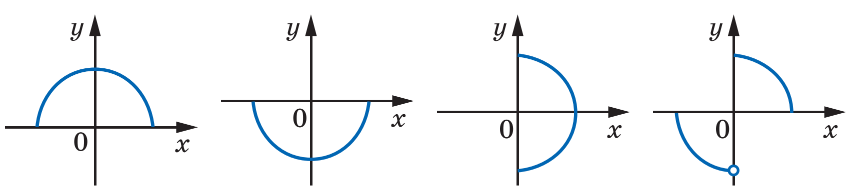
1.22.•• Функція f є парною і $\min\limits_{[1;\,3]} f\,(x) = 2$, $\max\limits_{[1;\,3]} f\,(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;\,-1]} f\,(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f\,(x)$.

1.23.•• Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;\,5]} f\,(x) = 1$, $\max\limits_{[2;\,5]} f\,(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;\,-2]} f\,(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f\,(x)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.24. Функцію задано формулою $f\,(x) = -3x^2 + 2x$.
1) Знайдіть: $f\,(1)$; $f\,(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\,(-2)$.
2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції f дорівнює: 0; −1; −56.

1.25. Укажіть на рисунку 1.12 фігуру, яка не може слугувати графіком функції.



а *б* *в* *г*

Рис. 1.12

1.26. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{9}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{x-6}{4}$;
3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;
5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;
7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

1.27. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$.

1.28. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}+2$;
2) $f(x)=7-x^2$;
3) $f(x)=-6$.

2. Степенева функція з натуральним показником

Властивості та графіки функцій $y=x$ і $y=x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником**.

Оскільки вираз x^n, $n\in\mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x=0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• **Перший випадок: $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k=1$ отримуємо функцію $y=x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a\geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k}=a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y=x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0;+\infty)$.

Якщо $x\neq 0$, то $x^{2k}>0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty;\ 0]$, $x_2 \in (-\infty;\ 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(-\infty;\ 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0;\ +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 2.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 2.2.

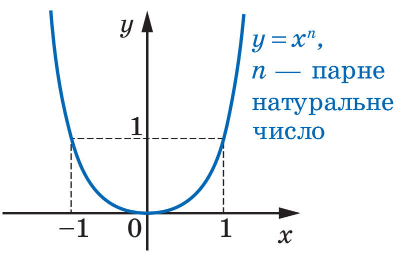


Рис. 2.1

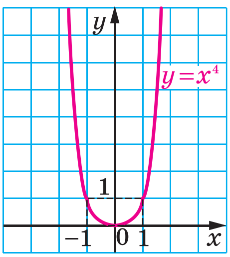


Рис. 2.2

• **Другий випадок: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ або $k = 0$**

Зазначимо, що при $k = 0$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$, *де* n *— непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де* n *— непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, *де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n *— непарне натуральне число*, *є зростаючою*.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 2.3). Зокрема, графік функції $y = x^3$ зображено на рисунку 2.4.

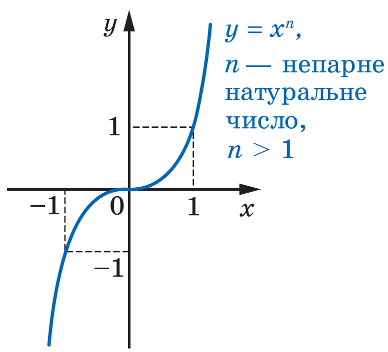


Рис. 2.3

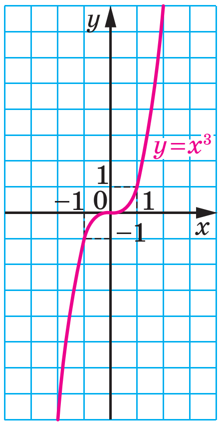


Рис. 2.4

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

1. Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
2. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$.
3. Зобразіть схематично графік функції $y = x^n$.

ВПРАВИ

2.1.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:
1) $A\ (-1;\ 1)$; 2) $B\ (2;\ 32)$; 3) $C\ (-3;\ -243)$?

2.2.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^4$:
1) $A\ (2;\ 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$; 3) $C\ (0{,}5;\ -0{,}0625)$?

2.3.• Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:
1) $f(1{,}4)$ і $f(1{,}8)$; 3) $f(-6{,}9)$ і $f(6{,}9)$;
2) $f(-7{,}6)$ і $f(-8{,}5)$; 4) $f(0{,}2)$ і $f(-12)$.

2.4.• Функцію задано формулою $f(x) = x^{50}$. Порівняйте:
1) $f(9{,}2)$ і $f(8{,}5)$; 3) $f(19)$ і $f(-19)$;
2) $f(-1{,}1)$ і $f(-1{,}2)$; 4) $f(-7)$ і $f(9)$.

2.5.• Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:
$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5,\ \left(-2\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5,\ \left(-2\frac{2}{5}\right)^5.$$

2.6.• Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:
$$(1{,}06)^4,\ (-0{,}48)^4,\ (-2{,}12)^4,\ (-3{,}25)^4.$$

2.7.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:
1) $[0;\ 2]$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -2]$.

2.8.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5$ на проміжку:
1) $[-3;\ 3]$; 2) $[-2;\ 0]$; 3) $[1;\ +\infty)$.

2.9.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$.

2.10.•• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

2.11.* Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

2.12. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2,3)^0-5^{-2}$; 5) $0,5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 4) $9\cdot 0,1^{-1}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$.

2.13. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2}+a^{-3}$; 2) $mn^{-4}+m^{-4}n$; 3) $(c^{-1}-d^{-1})(c-d)^{-2}$.

3. Степенева функція із цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y=x^n$, де $n\in\mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією із цілим показником.**

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y=x^0$ є множина $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 3.1.

Розглянемо функцію $y=x^{-n}$, де $n\in\mathbb{N}$.

Окремий випадок цієї функції, коли $n=1$, тобто функція $y=\frac{1}{x}$, відомий вам з курсу алгебри 8 класу.

Запишемо функцію $y=x^{-n}$ у вигляді $y=\frac{1}{x^n}$. Тоді стає зрозумілим, що *областю визначення функції* $y=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

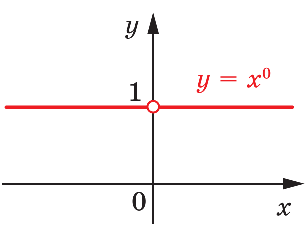


Рис. 3.1

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y=x^{-n}$, де $n\in\mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок:** $\boldsymbol{n=2k,\ k\in\mathbb{N}}$.

Маємо: $x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.

Оскільки для будь-якого $x \neq 0$ виконується нерівність $\frac{1}{x^{2k}} > 0$, то *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*.

Функція $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є парною*. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ і $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$. Звідси $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Можна також показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 3.2). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 3.3.

• Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

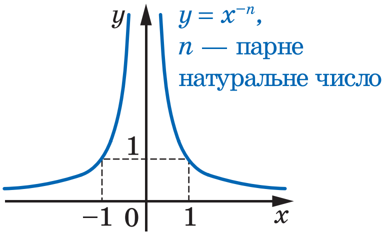


Рис. 3.2

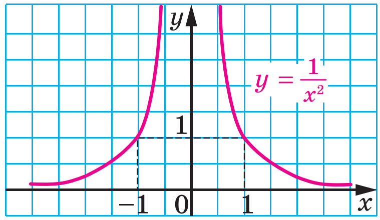


Рис. 3.3

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число*.

Функція $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є непарною*. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 3.4). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 3.5.

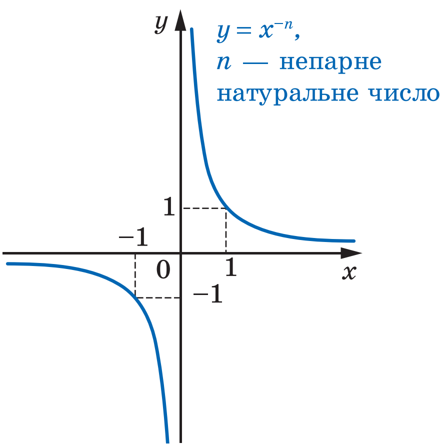


Рис. 3.4

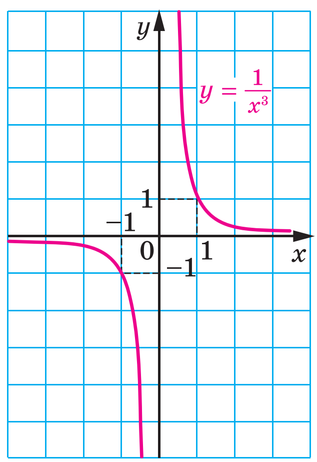


Рис. 3.5

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0;\ +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	—	—
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0;\ +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty;\ 0)$, спадає на проміжку $(0;\ +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$

1. Яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником?
2. Яка фігура є графіком функції $y = x^0$?
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Зобразіть схематично графік функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

ВПРАВИ

3.1.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

3.2.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0;\ 0)$; 2) $B\ (-1;\ -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

3.3.• Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f(1{,}6)$ і $f(2)$; 3) $f(-9{,}6)$ і $f(9{,}6)$;
2) $f(-5{,}6)$ і $f(-6{,}5)$; 4) $f(0{,}1)$ і $f(-10)$.

3.4.• Функцію задано формулою $f(x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) $f(6{,}2)$ і $f(5{,}5)$;
2) $f(-1{,}6)$ і $f(-1{,}7)$;
3) $f(24)$ і $f(-24)$;
4) $f(-8)$ і $f(6)$.

3.5.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

3.6.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = (x-2)^0$;
2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$.

3.7.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(y+2)^0 = x - 2$;
2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

3.8.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;
3) $[1; +\infty)$.

3.9.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $(-\infty; -3]$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

3.10. Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$;
2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09} - 2$;
3) $\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2$.

3.11. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{33}$ і 6;
3) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$.

4. Означення кореня n-го степеня

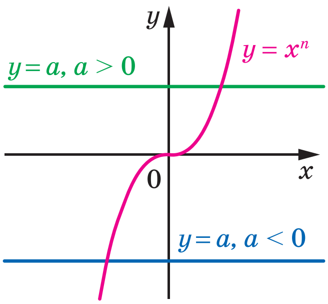
Ви знаєте, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа a називають таке число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем п'ятого степеня із числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня із числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня із числа 81 є числа 3 і −3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

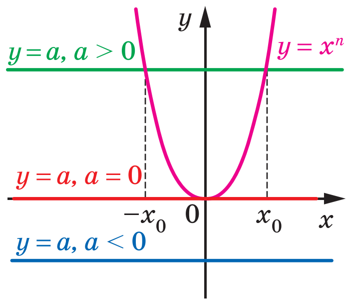
Якщо n — непарне натуральне число, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ при будь-якому a перетинаються в одній точці (рис. 4.1). Це означає, що рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь n-го степеня, причому тільки один.



n — непарне натуральне число, $n > 1$

Рис. 4.1



n — парне натуральне число

Рис. 4.2

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{\ }$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Корінь третього степеня прийнято називати також **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «кубічний корінь із числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, визначений при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

З рисунка 4.2 видно: якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n ***— парне натуральне число, то при*** $a < 0$ ***корінь*** n***-го степеня із числа*** a ***не існує; при*** $a = 0$ ***корінь*** n***-го степеня із числа*** a ***дорівнює*** 0***; при*** $a > 0$ ***існують два протилежних числа, кожне з яких є коренем*** n***-го степеня із числа*** a***.***

Ви знаєте, що арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення арифметичного кореня n-го степеня.

Означення. Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, **якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є єдине число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що:

1) $\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \geqslant 0}$**, де** $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ (наприклад, $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$);

2) $\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$**, де** $\boldsymbol{a \geqslant 0}$ (наприклад, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$);

3) $\boldsymbol{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$ (наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Вище було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Зазначене правило задає функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, де $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 4.3. На рисунку 4.4 зображено графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

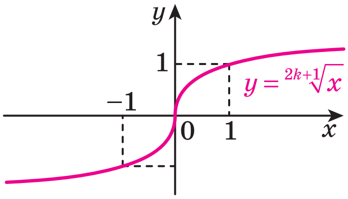


Рис. 4.3

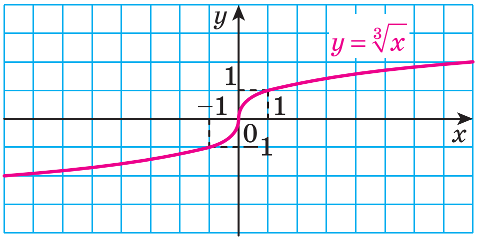


Рис. 4.4

Аналогічно дають означення функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Областю визначення цієї функції є проміжок $[0; +\infty)$.

На рисунку 4.5 зображено графік функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, а на рисунку 4.6 — графік функції $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

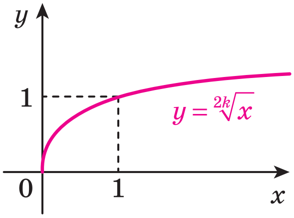


Рис. 4.5

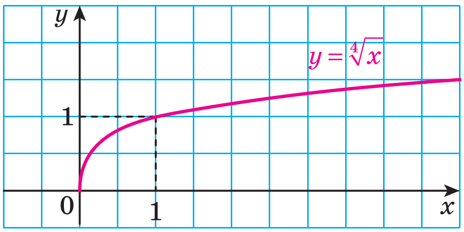


Рис. 4.6

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$.

Властивість	n — непарне натуральне число, $n > 1$	n — парне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

Задача. Розв'яжіть нерівність: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$.

Розв'язання. 1) Дану нерівність перепишемо таким чином: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y = \sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y = \sqrt[4]{t}$ є зростаючою та визначена на множині $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2; 3)$. ◄

1. Що називають коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
3. Що називають арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
4. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
5. Які властивості має функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$?
6. Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, та зобразіть схематично її графік.
7. Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, та зобразіть схематично її графік.

ВПРАВИ

4.1.° Чи має зміст запис:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

4.2.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

4.3.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем із числа 8;
2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 81;
3) число −3 не є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 81.

4.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{216}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 3) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 6) $\sqrt[6]{8^2}$.

4.5.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 3) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

4.6.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 4) $-\sqrt[8]{7^8}$.

4.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$.

4.8.• Обчисліть: $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$.

4.9.• Обчисліть: $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$.

4.10.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x+1}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$.

4.11.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 2) $y = \sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$.

4.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;
2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x-2)^3 = 125$;
3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x+5)^4 = 10\ 000$.

4.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;
2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$.

4.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$.

4.15.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

4.16.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

4.17.•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

4.18.•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1}=0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3}=0$.

4.20.•• Розв'яжіть рівняння $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3}=0$.

4.21.•• Побудуйте графік функції $y=\left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4+\left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4+1$.

4.22.•• Побудуйте графік функції $y=\left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8+\left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

4.23. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}64\cdot36}$; 2) $\sqrt{6^2\cdot3^4}$; 3) $\sqrt{\dfrac{81}{100}}$.

4.24. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3\cdot3}\cdot\sqrt{2^5\cdot3^3}$; 3) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

5. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 5.1 (перша теорема про корінь із степеня). **Для будь-якого $a\in\mathbb{R}$ і $k\in\mathbb{N}$ виконуються рівності:**

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|.$$

Доведення. Щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x}=y$, достатньо показати, що $y^{2k+1}=x$. Для першої рівності, що доводиться, $x=a^{2k+1}$, а $y=a$. Звідси рівність $y^{2k+1}=x$ є очевидною.

Щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x}=y$, достатньо показати, що $y\geqslant0$ і $y^{2k}=x$. Для другої рівності, що доводиться, маємо: $|a|\geqslant0$ і $(|a|)^{2k}=a^{2k}$. ◄

Теорема 5.2 (корінь з добутку). Якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ◄

Теорема 5.3 (корінь із частки). Якщо $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Теорема 5.4 (степінь кореня). Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$.

Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◄

Теорема 5.5 (корінь з кореня). Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◄

Теорема 5.6 (друга теорема про корінь із степеня). Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◄

Задача 1. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання. 1) Скориставшись теоремою 5.1, можна записати: $\sqrt[4]{(-7,3)^4}=|-7,3|=7,3.$

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}=1,2^2=1,44.$

3) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, отримаємо:

$$\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\cdot 2}=\sqrt[5]{32}=2.$$

4) Замінивши частку коренів коренем із частки, матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}=\sqrt[3]{\frac{24}{375}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}.$$ ◄

Задача 2. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a\leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$.

Розв'язання. 1) Застосувавши теорему 5.1, отримаємо: $\sqrt[4]{a^{28}}=\sqrt[4]{(a^7)^4}=|a^7|.$

2) Маємо: $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|$. Оскільки за умовою $a\leqslant 0$, то $a^3\leqslant 0$. Тоді $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|=-2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}}=\sqrt[4]{a}.$

4) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}=\sqrt[3]{|a|}.$ ◄

Задача 3. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$.

Розв'язання. 1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є кубом раціонального числа, і винесемо множник з-під знака кореня:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) З умови випливає, що $b\geqslant 0$.

Тоді $\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|b^5|\sqrt[8]{b^3}=b^5\sqrt[8]{b^3}.$ ◄

Задача 4. Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $c\sqrt[10]{c^7}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}.$

2) З умови випливає, що $c\geqslant 0$.

Тоді $c\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{17}}.$ ◄

Задача 5. Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання. Розклавши чисельник і знаменник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}.$$ ◄

1. Сформулюйте першу теорему про корінь із степеня.
2. Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
3. Сформулюйте теорему про корінь із частки.
4. Сформулюйте теорему про степінь кореня.
5. Сформулюйте теорему про корінь з кореня.
6. Сформулюйте другу теорему про корінь із степеня.

ВПРАВИ

5.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{64\cdot125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot7^5}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot11^4}{5^8\cdot2^{16}}}$.

5.2.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot343}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 3) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24}\cdot3^{16}}{5^{16}}}$.

5.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$.

5.4.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 6) $\sqrt[12]{n^{36}}$.

5.5.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$.

5.6. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$.

5.7. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[4]{162}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 4) $\sqrt[3]{40a^5}$; 5) $\sqrt[3]{-a^7}$.

5.8. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$.

5.9. Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$; 5) $c\sqrt[3]{\frac{5}{c^2}}$.

5.10. Внесіть множник під знак кореня:

1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\frac{x^3}{8}}$.

5.11. Замініть вираз $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$ на тотожно рівний йому.

5.12. Спростіть вираз $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$.

5.13. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

5.14. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

5.15. Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

5.16. Спростіть вираз $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

5.17. При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

5.18. При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

5.19. При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$;

3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

5.20. При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

5.21.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;
4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
5) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;
6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$.

5.22.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$.

5.23.•• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;
2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;
3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

5.24.•• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;
3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

5.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$.

5.26.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$;
2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;
3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$.

5.27.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$;
2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$;
3) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

5.28.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a > 0$.

5.29.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$.

5.30.* Внесіть множник під знак кореня:

1) $b\sqrt[6]{6}$;
2) $a\sqrt[6]{-a}$.

5.31.* Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$;
2) $a\sqrt[6]{a}$;
3) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

5.32.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

5.33. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $\dfrac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$; 3) $a^{-5}\cdot a^{10}\cdot a^{-12}$; 5) $a^{12}\cdot a^{-20} : a^{-9}$;

2) $a^5\cdot a^{-8}$; 4) $a^{-3} : a^{-15}$; 6) $(a^{-5})^4$.

5.34. Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-9}\cdot 2^{-12} : a^{-22}$; 3) $\dfrac{14^{-5}}{7^{-5}}$; 5) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{-7}\cdot\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}\right)^{5}$;

2) $3^{-3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; 4) $9^{-4}\cdot 27^2$; 6) $\dfrac{22^6\cdot 2^{-8}}{44^{-3}\cdot 11^9}$.

6. Означення та властивості степеня з раціональним показником

У 7 класі ви дізналися, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1) $a^m\cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими й для степеня із цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r = \dfrac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано зробити це так, щоб степінь із дробовим показником мав усі властивості степеня із цілим показником. Підказкою для потрібного означення може слугувати такий приклад.

Позначимо через x шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, тобто $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можемо записати: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь із числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким чином, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від того, у вигляді якого дробу подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $\mathbf{0^{\frac{m}{n}} = 0}$, **де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.**

Звертаємо увагу, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Наголосимо, що в означеннях не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість призвела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ «дорівнює» додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником.**

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є числом додатним, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

На рисунку 6.1 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

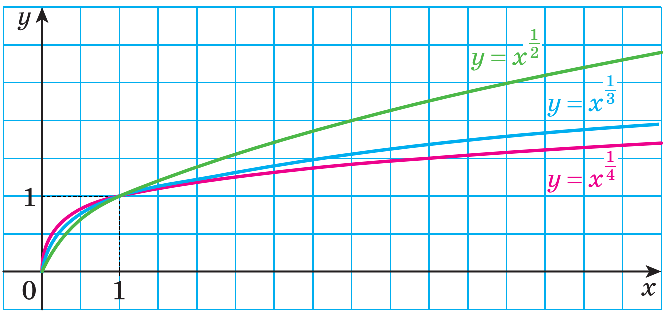


Рис. 6.1

Покажемо, що властивості степеня із цілим показником залишаються справедливими і для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 6.1 (добуток степенів). Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Маємо:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^{p} = a^{-p+p} = a^{0} = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^{p}}$. ◀

Теорема 6.2 (частка степенів). Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$\boxed{a^{p} : a^{q} = a^{p-q}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{q} \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^{p}$. Звідси $a^{p-q} = a^{p} : a^{q}$. ◀

Теорема 6.3 (степінь степеня). Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність

$$\boxed{(a^{p})^{q} = a^{pq}}$$

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, і $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 1$. Маємо:

$$(a^{p})^{q} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}.$$ ◀

Теорема 6.4 (степінь добутку та степінь частки). Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності

$$\boxed{(ab)^{p} = a^{p}b^{p}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача 1. Спростіть вираз
$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2})$.

Розв'язання. Розкриємо дужки, використовуючи правило множення многочленів і формулу різниці квадратів, а потім зведемо подібні доданки:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$
$$= \underline{3a^{0,6}} - \underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}} + \underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}} - 4b^{0,4} - \underline{a^{0,6}} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}.$$ ◀

Задача 2. Спростіть вираз $\frac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \frac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^{\frac{1}{3}} = y$. Тоді даний вираз набуває такого вигляду:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Цей вираз легко спростити. Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◄

1. Що називають степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

2. Що називають степенем числа 0 з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?

3. Яку функцію називають степеневою функцією з раціональним показником?

4. Сформулюйте властивості степеня з раціональним показником.

ВПРАВИ

6.1.° Подайте у вигляді кореня степінь із дробовим показником:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$.

6.2.° Подайте у вигляді кореня степінь із дробовим показником:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$.

6.3.° Подайте вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$.

6.4.° Подайте вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$.

6.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $32^{-0{,}2}$.

6.6.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

6.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $3^{1,8}\cdot 3^{-2,6}\cdot 3^{2,8}$; 3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$; 5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5}\cdot 1,2^{4,5}$;

2) $(-5^{-0,8})^{6}\cdot 5^{4,8}$; 4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 6) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$.

6.8.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{3,4}\cdot 5^{-1,8}\cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^{8} : 7^{-7,6}$; 3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$; 4) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

6.9.• Розкрийте дужки:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;

3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$;

4) $(b^{0,4}+3)^{2}-6b^{0,4}$;

5) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;

6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$.

6.10.• Розкрийте дужки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;

2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;

3) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;

4) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;

5) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^{2}+8y^{2}$;

6) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$.

6.11.• Обчисліть значення виразу:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;

2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;

3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot (0,81)^{-0,5}$;

4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$.

6.12.• Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;

3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$.

6.13.•• Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$; 2) $\frac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$; 3) $\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 5) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$.

6.14.•• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$.

6.15.•• Спростіть вираз $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$.

6.16.•• Спростіть вираз $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$.

6.17.•• Доведіть тотожність $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$.

6.18.•• Доведіть тотожність $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

6.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x-7}=0$; 3) $\sqrt{x^2-64}=6$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;

2) $\sqrt{4x-1}=6$; 4) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$; 6) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$.

7. Ірраціональні рівняння

Під час розв'язування рівнянь інколи виникає потреба піднести обидві частини рівняння до одного й того самого степеня. З'ясуємо, як це перетворення впливає на множину коренів даного рівняння.

Теорема 7.1. **Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.**

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Звідси $x^2 - 2 = x$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Відповідь: −1; 2. ◄

Рівняння, яке ми розглянули в задачі 1, містить змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3} = 2;$$

$$\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 1 = 0;$$

$$\sqrt{3-x} = \sqrt[3]{2+x}.$$

Під час розв'язування задачі 1 нам довелося перетворювати рівняння, яке містило корені непарного степеня. Розглянемо рівняння, що містить корені парного степеня.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Розв'язання. Застосовуючи формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, замінимо дане рівняння таким:

$$3x + 4 = x - 2. \qquad (2)$$

Звідси $x = -3$.

Проте перевірка показує, що число −3 не є коренем початкового рівняння. Говорять, що число −3 є **стороннім коренем** рівняння (1).

Отже, рівняння (1) не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ◄

Причина появи стороннього кореня під час розв'язування задачі 2 полягає в тому, що, застосувавши формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, ми не взяли до уваги обмеження $a \geqslant 0$. Через це рівняння (2) виявилося не рівносильним рівнянню (1).

Означення. Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.

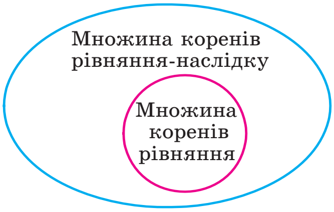


Рис. 7.1

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$. Переконайтеся в цьому самостійно.

Також говорять, що з рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2 = 25$.

На рисунку 7.1 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Ще однією причиною появи сторонніх коренів є те, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає рівність $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 7.2. При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x} = x$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2.$$

Звідси $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Перевірка показує, що число -1 — сторонній корінь, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4. ◄

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$
$$x^2 - 44x + 84 = 0; \quad x_1 = 42, \ x_2 = 2.$$

Перевірка показує, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 2. ◄

Задача 5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x^3+1} = t$. Тоді $\sqrt{x^3+1} = t^2$. Тепер початкове рівняння набуває вигляду

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Звідси $t = -3$ або $t = 1$.

У випадку, коли $t = -3$, отримуємо рівняння $\sqrt[4]{x^3+1} = -3$, яке не має розв'язків.

У випадку, коли $t = 1$, отримуємо рівняння $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$. Закінчіть розв'язування самостійно.

Відповідь: 0. ◄

Нагадаємо, що метод, використаний під час розв'язування останнього рівняння, відомий вам ще з курсу алгебри 8–9 класів. Цей метод називають *методом заміни змінної*.

1. Яке рівняння називають ірраціональним?
2. Обидві частини рівняння піднесли до непарного степеня. Чи обов'язково початкове й отримане рівняння будуть рівносильними?
3. Обидві частини рівняння піднесли до парного степеня. Чи обов'язково початкове й отримане рівняння будуть рівносильними?
4. Як можна виявити сторонні корені рівняння?

ВПРАВИ

7.1.° Поясніть, чому не має коренів рівняння:
1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$.

7.2.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$.

7.3.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{x-3}=4$;
2) $\sqrt{3x^2-x-15}=3$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

7.4.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$.

7.5.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$.

7.6.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$.

7.7.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
4) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

7.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4$;   2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x$.

7.9.• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1$.

7.10.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$;

3) $2x - 7\sqrt{x} - 15 = 0$;

4) $2\sqrt{x+1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1} = 2$;

6) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}} = 8$.

7.11.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$;

2) $\sqrt[3]{x^2} + 8 = 9\sqrt[3]{x}$;

3) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$;

4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}} = 2{,}5$.

7.12.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x+1$;   2) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = x-1$.

7.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$;

2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$;

3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;

4) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1$.

7.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$;   2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$.

7.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$;

2) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4$;

3) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$;

4) $\sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5$.

7.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3$;   2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3$.

7.17.•• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2-5x+20} = 0$;

2) $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2-2} = 0$;

3) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 = 3x+7$;

4) $\sqrt{3x^2-9x-26} = 12 + 3x - x^2$.

7.18.•• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0;$

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2;$

3) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123.$

7.19.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x-2}} = 6.$

7.20.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 6.$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.21. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{якщо } x < 1, \\ x - 1, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, визначте проміжки зростання і спадання даної функції.

7.22. Задайте формулою лінійну функцію f, якщо $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$.

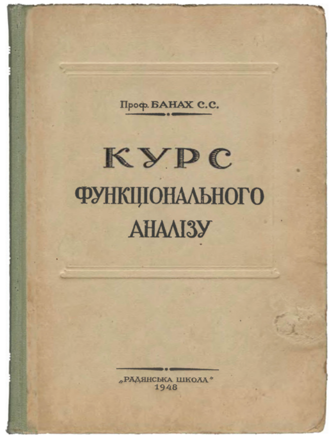
ЛЬВІВСЬКА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА

Ви вивчаєте розділ «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — «функціонального аналізу». Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юлій Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії

Стефан Банах
(1892–1945)



Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме С. Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Вручення гусака

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Найменше і найбільше значення функції

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині M і записують: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині M і записують: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Парна і непарна функції

Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення $f(-x) = f(x)$.

Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.

Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Корінь n-го степеня

Коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Для будь-якого a і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

Степінь з раціональним показником

Степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
$0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником.

Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконуються рівності: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

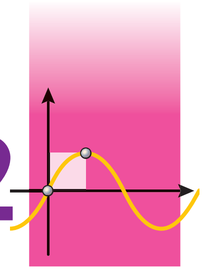
Ірраціональні рівняння

Рівняння, які містять змінну під знаком кореня, називають ірраціональним.

Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ §2



Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про тригонометричні функції та їхні властивості; дізнаєтеся, що таке радіанна міра кута, які функції називають періодичними.

Ознайомитеся з формулами, які пов'язують різні тригонометричні функції, навчитеся застосовувати їх для виконання обчислень, спрощення виразів, доведення тотожностей.

Дізнаєтеся, які рівняння називають найпростішими тригонометричними рівняннями; ознайомитеся з формулами коренів найпростіших тригонометричних рівнянь.

8. Радіанна міра кутів

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею виміру кутів. Її називають **радіаном**.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 8.1 зображено центральний кут AOB, що спирається на дугу AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану. Записують: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Записують: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Це твердження проілюстровано на рисунку 8.2.

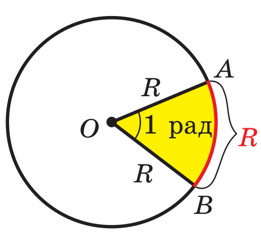


Рис. 8.1

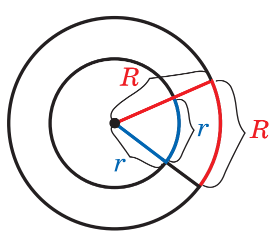


Рис. 8.2

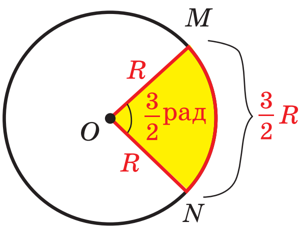


Рис. 8.3

На рисунку 8.3 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. Тоді радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR, то говорять, що **радіанна міра** цього центрального кута дорівнює α рад.

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить $180°$. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: 1 рад $\approx 57°$.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$\boxed{\mathbf{1° = \frac{\pi}{180}\ рад}} \qquad (2)$$

Із цієї рівності легко встановити, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Записуючи радіанну міру кута, зазвичай позначення «рад» опускають. Наприклад, записують: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусні та радіанні міри кутів, які трапляються найчастіше:

Градусна міра кута	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола.

Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, що містить α рад, позначити через l, то можна записати:

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним.**

Нехай точка P, починаючи рух від точки $P_0\,(1;\ 0)$, переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.4).

Говоритимемо, що **точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°).

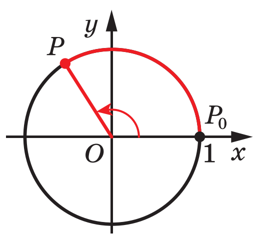


Рис. 8.4

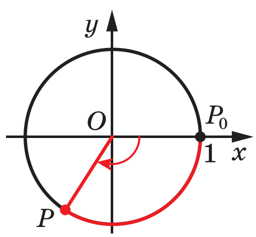


Рис. 8.5

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою та зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.5). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут $-120°$).

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки (рис. 8.4), то кут повороту вважають додатним, а за годинниковою стрілкою (рис. 8.5) — від'ємним.

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунка 8.6. Можна сказати, що точку A отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°). Точку B отримано в результаті повороту точки P_0 на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°). Точку C отримано в результаті повороту точки P_0 на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°).

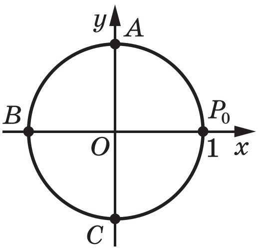


Рис. 8.6

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить один повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто −360°).

Якщо точка P зробить півтора оберти проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто −540°).

Величина кута повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 8.7) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д. Зауважимо, що всі ці кути можна отримати за допомогою формули $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

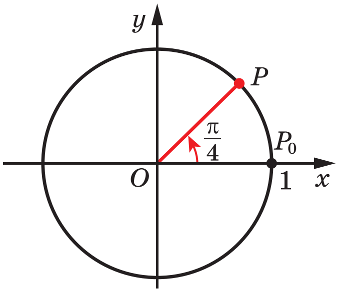


Рис. 8.7

1. Що називають кутом в один радіан?
2. Якою є радіанна міра кута, рівного 1°?
3. Чому дорівнює довжина дуги кола радіуса R, яка містить α рад?

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

8.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

8.3.° Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		12°	36°			105°	225°			240°
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

8.4.° Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якої дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

8.5.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

8.6.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) 150°; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) −45°; 5) −120°; 6) −450°.

8.7.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) −60°; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 320°; 4) 420°; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$.

8.8.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) 127°; 4) 400°; 7) −470°; 10) $2{,}4\pi$;

2) 89°; 5) 600°; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;

3) 276°; 6) −400°; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) −2?

8.9.° У якій чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) 94°; 2) 176°; 3) 200°; 4) −100°;

5) $-380°$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 11) 1;

6) $700°$; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$; 12) -3?

8.10.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) $-90°$; 4) $-180°$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π.

8.11.° Які координати має точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$?

8.12.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку з координатами:

1) $(0; 1)$; 2) $(-1; 0)$.

8.13.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку з координатами:

1) $(0; -1)$; 2) $(1; 0)$.

8.14.•• Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0; 1)$; 2) $P_2(-1; 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

8.15.•• Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1; 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0; -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.16.•• Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

8.17.•• Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути:

1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

8.18.•• Доведіть, що площа сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2-6}{x-3} = \dfrac{x}{x-3}$; 2) $\dfrac{3x-1}{x} - \dfrac{4}{x-2} = \dfrac{10-9x}{x^2-2x}$.

8.20. У деякому місті проживає 88 200 мешканців. Скільки мешканців було в цьому місті два роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

9. Тригонометричні функції числового аргументу

У 9 класі, вводячи означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180°, ми користувалися одиничним півколом. Узагальнимо ці означення для довільного кута повороту α.

Розглянемо одиничне коло (рис. 9.1).

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки P (x; y), яку отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) навколо початку координат на кут α (рис. 9.1).

Записують: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Точки P_0, A, B і C (рис. 9.2) мають відповідно координати (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Ці точки отримано в результаті повороту

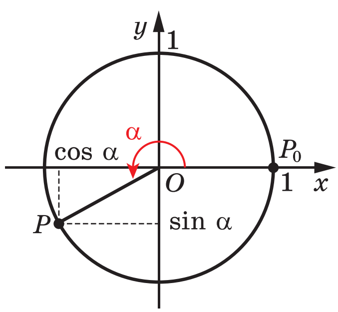


Рис. 9.1

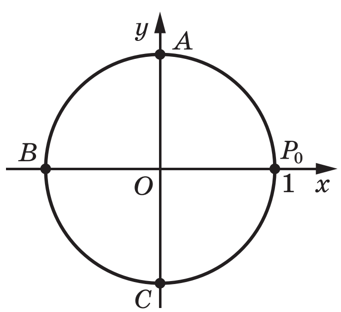


Рис. 9.2

точки $P_0(1;\ 0)$ відповідно на кути $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$. Отже, користуючись даним означенням, можна скласти таку таблицю:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

Задача 1. Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Розв'язання. 1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 9.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ \ldots \text{ і}$$
$$-\pi,\ -2\pi, -3\pi,\ -4\pi,\ \ldots .$$

Усі ці кути можна записати за допомогою формули $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 9.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \frac{\pi}{2}+4\pi,\ \ldots \text{ і}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \frac{\pi}{2}-4\pi,\ \ldots .$$

Усі ці кути можна записати за допомогою формули $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. ◄

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{1} = 0,\ \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = -1.$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Через це залежність значення синуса (косинуса, тангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ і $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дає змогу розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис «sin 2» означає «синус кута у 2 радіани».

З означень синуса та косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси й ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\alpha &= \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos\alpha &= \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Область визначення функції $y = \mathrm{tg}\,x$ складається з усіх дійсних чисел, крім чисел виду $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Областю значень функції $y = \mathrm{tg}\,x$ є множина $\mathbb{R}$.

Можна довести, що справедлива така формула:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}}$$

Задача 2. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $1 - 4\cos\alpha$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення даного виразу дорівнює 5; вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$. ◄

1. Що називають косинусом кута повороту? синусом кута повороту? тангенсом кута повороту?
2. Якою є область визначення функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?
3. Якою є область значень функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?
4. Чому дорівнює $\sin(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?
5. Якою є область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$?
6. Якою є область значень функції $y = \operatorname{tg} x$?
7. Чому дорівнює $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?

ВПРАВИ

9.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

9.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

9.3.° Чи є можливою рівність:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
2) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$?

9.4.° Чи може дорівнювати числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$?

9.5.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin\alpha$;
2) $4 + \cos\alpha$;
3) $2 - \sin\alpha$;
4) $\sin^2\alpha$.

9.6.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $-5\cos\alpha$;
2) $\cos\alpha - 2$;
3) $5 + \sin^2\alpha$.

9.7.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\sin x = 1$;
2) $\sin x = -1$.

9.8.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.9.•• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

9.10.•• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:
1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.11.•• Користуючись рисунком 9.3, доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

9.12.•• Доведіть, що

$$\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

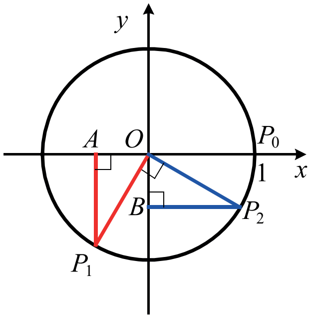


Рис. 9.3

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

9.13. Порівняйте з нулем координати точки $A\ (x;\ y)$, якщо ця точка лежить:
1) у I координатній чверті;
2) у II координатній чверті;
3) у III координатній чверті;
4) у IV координатній чверті.

9.14. Парною чи непарною є функція:
1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

10. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I координатній чверті, то говорять, що α **є кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису й ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Якщо α — кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Знаки значень синуса та косинуса схематично показано на рисунку 10.1.

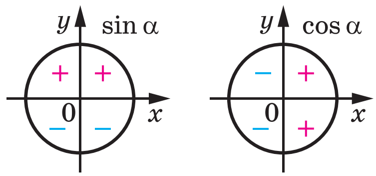


Рис. 10.1

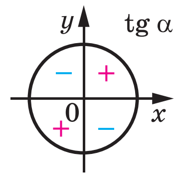


Рис. 10.2

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то тангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 10.2).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 10.3).

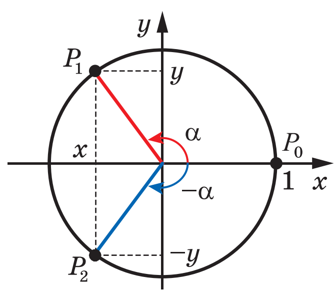


Рис. 10.3

Для будь-якого кута α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді з означень синуса та косинуса випливає, що для будь-якого дійсного числа α

$$\boxed{\begin{array}{c} \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{array}}$$

Зміст

Від авторів 3
Умовні позначення 4

Розділ 1. **АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ**

§ 1. Функції, їхні властивості та графіки 6

1. Найбільше і найменше значення функції. Парні та непарні функції 6
2. Степенева функція з натуральним показником 13
3. Степенева функція із цілим показником 17
4. Означення кореня n-го степеня 21
5. Властивості кореня n-го степеня 27
6. Означення та властивості степеня з раціональним показником 33
7. Ірраціональні рівняння 39
   - Львівська математична школа 44

Головне в параграфі 1 47

§ 2. Тригонометричні функції

8. Радіанна міра кутів 49
9. Тригонометричні функції числового аргументу 55
10. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій 59
11. Властивості та графіки тригонометричних функцій 63
12. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу 72
13. Формули додавання 76
14. Формули зведення 82
15. Рівняння $\cos x = b$ 85
16. Рівняння $\sin x = b$ і $\operatorname{tg} x = b$ 90
17. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних 96
   - Ставай Остроградським! 99

Головне в параграфі 2 100

§ 3. Похідна та її застосування

18. Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції 103
19. Поняття похідної 108
20. Правила обчислення похідних 114

21. Рівняння дотичної 118
22. Ознаки зростання і спадання функції 120
23. Точки екстремуму функції 123
24. Найбільше і найменше значення функції 128
25. Побудова графіків функцій 131
Головне в параграфі 3 134
26. Вправи для повторення курсу алгебри і початків аналізу 10 класу 136

Розділ 2. **СТЕРЕОМЕТРІЯ**

§ 4. Паралельність у просторі

27. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії 142
28. Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники ... 149
29. Взаємне розміщення двох прямих у просторі 154
30. Паралельність прямої та площини 160
31. Паралельність площин 164
32. Паралельне проектування 169
- Україна має таланти! 173

Головне в параграфі 4 175

§ 5. Перпендикулярність у просторі

33. Кут між прямими в просторі 177
34. Перпендикулярність прямої та площини 180
35. Перпендикуляр і похила 185
36. Кут між прямою та площиною 194
37. Двогранний кут. Кут між площинами 198
Головне в параграфі 5 208

§ 6. Координати та вектори в просторі

38. Декартові координати точки в просторі 210
39. Вектори в просторі 215
40. Додавання і віднімання векторів 219
41. Множення вектора на число 223
42. Скалярний добуток векторів 227
Головне в параграфі 6 232
43. Вправи для повторення курсу геометрії 10 класу 234

Відповіді та вказівки до вправ 240

Предметний покажчик 251