А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглибл. рівні, проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.

ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-000-0

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу. Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчання в математичному класі, і сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією.

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Це не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним та акуратним, при цьому найголовніше — не залишатися байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

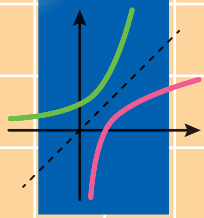
Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
◄	закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки»;
1.5.	зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи;
1.6.	синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. **Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція**

2. **Показникові рівняння**

3. **Показникові нерівності**

4. **Логарифм і його властивості**

5. **Логарифмічна функція та її властивості**

6. **Логарифмічні рівняння**

7. **Логарифмічні нерівності**

8. **Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником.
- Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Розглянемо послідовність (α_n) раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність (2^{α_n}) степенів з раціональними показниками:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Доведемо збіжність цієї послідовності. Розглянемо відношення степенів з раціональними показниками: $\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$. Оскільки $\alpha_{n+1}-\alpha_n$ — додатне раціональне число, то його можна подати у вигляді дробу $\alpha_{n+1}-\alpha_n = \frac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Маємо: $\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{2^p} > 1$. Оскільки $2^{\alpha_n} > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то послідовність (2^{α_n}) є зростаючою. Водночас $2^3 \leqslant 2^{\alpha_n} \leqslant 2^4$, тому послідовність (2^{α_n}) є обмеженою. За теоремою Вейєрштрасса послідовність (2^{α_n}) є збіжною. Границю цієї послідовності називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел (α_n). Далі розглядають послідовність (b^{α_n}) степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел (α_n). Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α. Справді, якщо послідовність раціональних чисел (α_n) збігається до числа α, то $1^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} 1^{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ і будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: $\left(x^{\alpha_n}\right)$, $\left(x^{\beta_n}\right)$ і $\left(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}\right)$.

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n+\beta_n}$.

Тому можна записати:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty} x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}\left(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}\right) = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

Таким чином, властивість 1 доведено.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}}=\frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1}=1.$$ ◄

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x)=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a>0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x>0$.

Доведемо цю властивість для $a>1$ (випадок $0<a<1$ можна розглянути аналогічно). Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). Оскільки послідовність (x_n) є збіжною, то вона є обмеженою. Тому існує таке раціональне число r, що $x_n \geqslant r$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Використовуючи властивості степеня з раціональним показником, маємо, що $a^{x_n}\geqslant a^r>0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді $a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}\geqslant a^r>0$.

Таким чином, область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a>0$ і $a\neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x=b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- Покажемо, що *при* $a>1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a>1$ ***і*** $x>0$, ***то*** $a^x>1$; ***якщо*** $0<a<1$ ***і*** $x>0$, ***то*** $0<a^x<1$.

Доведення проведемо для випадку, коли $a>1$ і $x>0$ (другу частину леми доведіть самостійно).

Оскільки $x > 0$, то існує таке раціональне число r, що $x > r > 0$. Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). З умови $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x > r$ випливає, що, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність $x_n > r$. Оскільки $a > 1$ і числа x_n і r є раціональними, то $a^{x_n} > a^r > 1$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тоді маємо, що $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} \geqslant a^r > 1$. ◄

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Запишемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1)$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$.

Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

↳ Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*

↳ Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

↳ *Показникова функція є неперервною.*

Покажемо, як можна довести неперервність показникової функції $f(x) = a^x$ у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадок $a > 1$ (випадок, коли $0 < a < 1$, можна розглянути аналогічно).

Нехай (x_n) — довільна збіжна до x_0 послідовність аргументів показникової функції. Виберемо дві послідовності раціональних чисел (y_n) і (z_n) збіжних до x_0 і таких, що $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. Оскільки $a > 1$, то можна записати $a^{y_n} \leqslant a^{x_n} \leqslant a^{z_n}$. З означення числа a^{x_0} випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{z_n} = a^{x_0}$. Використовуючи теорему про двох конвоїрів, можна зробити висновок, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Звідси випливає неперервність функції $f(x) = a^x$ у точці x_0.

↳ *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

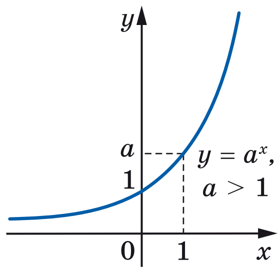


Рис. 1.1

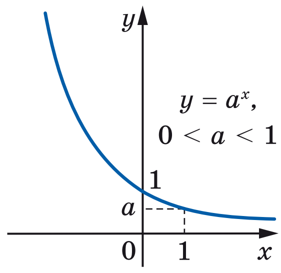


Рис. 1.2

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

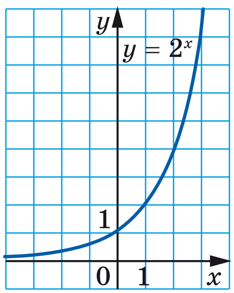


Рис. 1.3

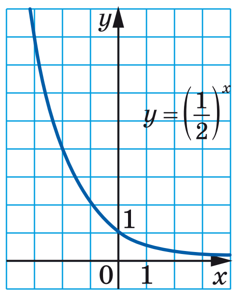


Рис. 1.4

Для показникової функції неважко довести такі твердження: якщо $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; якщо $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Тому при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

У 10 класі ви дізналися, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі показникові функції $f(x) = a^x$ мають таку властивість:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R},$$

тобто властивість

$$f(x+y) = f(x)f(y), \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що останню рівність називають функціональним рівнянням Коші. Можна довести (див. задачі 1.53, 1.54), що серед неперервних функцій, відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x) = a^x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення показникової функції.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Наприклад, біологам відомо, що маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів.

Нехай маса колонії бактерій у момент часу $t = x$ дорівнює $f(x)$. Тоді за проміжок від $t = x$ до $t = x + y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t = 0$ до $t = y$, тобто

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}.$$

Якщо в момент часу $t = 0$ маса колонії бактерій дорівнювала 1, то останню рівність можна переписати так:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Природно вважати, що функція, яка описує залежність маси колонії бактерій від часу, є неперервною.

Тому маса колонії бактерій у момент часу t дорівнює $f(t) = a^t$.

Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші на рахунок у банку під певний відсоток, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$

Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на відрізку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^0 = 1.$$

Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0. ◄

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3.° Порівняйте із числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$; 5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$; 6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.4.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{-\pi}$.

1.5.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції, можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3{,}2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2{,}9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}6}$?

1.6.° Порівняйте:

1) $5^{3{,}4}$ і $5^{3{,}26}$; 3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;
2) $0{,}3^{0{,}4}$ і $0{,}3^{0{,}3}$; 4) $0{,}17^{-3}$ і 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2{,}7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2{,}8}$.

1.7.° Порівняйте із числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}62^{-0{,}4}$; 6) $3{,}14^{-0{,}4}$.

1.8.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0{,}3} > a^{1{,}4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1{,}2}$.

1.9.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.° Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;
2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;
3) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;
4) $\dfrac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

1.11.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;
2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.12.° Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y=0{,}2^x$ на проміжку $[-1;\ 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y=4-7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y=6^x+5$ є проміжок $[5;\ +\infty)$;
4) найменше значення функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 2]$ дорівнює 16?

1.13.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=-9^x$;
2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$;
3) $y=7^x-4$;
4) $y=6^{|x|}$.

1.14.° Знайдіть найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

1.15.° На якому проміжку найбільше значення функції $y=2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

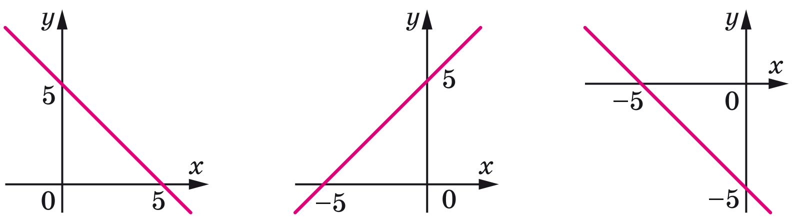
1.16.° На якому проміжку найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.17.° Розв’яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.18.° Розв’яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.19.• Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



а *б* *в*

Рис. 1.5

1.20.• Порівняйте $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5{,}2}$ і $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5{,}6}$.

1.21.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.22.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\, 2^x - 1 \,\right|$; 4) $y = 2^{|x+1|} - 2$; 7) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{\left|2^x - 1\right|}$.

2) $y = \left|\, 2^{x+1} - 2 \,\right|$; 5) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$;

3) $y = 2^{|x|} + 1$; 6) $y = \left|2^{-|x|} - 1\right|$;

1.24.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\, 3^x - 2 \,\right|$; 3) $y = 3^{|x+1|} - 1$; 5) $y = \left|1 - 3^{|x|}\right|$;

2) $y = 3^{|x|} - 1$; 4) $y = \left|3^x - 1\right|$; 6) $y = y = \frac{\left|1 - 3^{-x}\right|}{3^{|x|} - 1}$.

1.25.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.26.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\sin x} - 2}$.

1.27.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y=3^{|\sin x|}-2$.

1.28.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=6^{\cos x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|}+5$.

1.29.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\operatorname{tg} x}>0$; 2) $2^{\arcsin x}>-\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x}>\arccos x-\pi$.

1.30.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x}>\sin x-1$; 2) $2^{x}>\arcsin x-\frac{\pi}{2}$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x}>\cos x-1$.

1.31.° Знайдіть область значень функції $f(x)=2^{(\sin x+\cos x)^2}$.

1.32.° Знайдіть область значень функції $f(x)=3^{|\sin x\cos x|}$.

1.33.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x}=x^2+2$; 2) $2^{\sqrt{x}}=\cos x$.

1.34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=x^2+1$; 2) $2^{|x|}=\cos x$.

1.35.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}\geqslant\sin x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant|\sin x|+1$; 3) $2^{\sqrt{x}}\geqslant 1-x^2$.

1.36.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}>\cos x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant x^2+1$.

1.37.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$; 2) $y=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

1.38.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y=\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$; 2) $y=\left(\sqrt{2}+1\right)^x-\left(\sqrt{2}-1\right)^x$.

1.39.° Дослідіть на неперервність функцію:

1) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

1.40.° Дослідіть на неперервність функцію:

1) $y=5^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

1.41.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.42.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{3^x}{3^x - 9}$.

1.43.•• Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 5^x + \dfrac{25}{5^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде парною?

1.44.•• Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 3^x - \dfrac{27}{3^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x + a)$ буде непарною?

1.45.•• При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x) = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^x + \dfrac{7}{2} \cdot 3^{-x} - 3a^2$ на відрізку $[-1; 0]$ є від'ємним числом?

1.46.•• При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 4^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{5a}{2} + \frac{a^2 + 12}{6}$$

набуває в усіх точках відрізка $[-1; 1]$ значень, більших за 2?

1.47.•• Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^y = z, \\ y^z = x, \\ z^x = y. \end{cases}$

1.48.•• Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^{\frac{1}{y}} = z, \\ y^{\frac{1}{z}} = x, \\ z^{\frac{1}{x}} = y. \end{cases}$

1.49.•• Доведіть, що похідна показникової функції $f(x) = a^x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє рівність $f'(x) = a^x \cdot f'(0)$.

1.50.* Чи існують такі ірраціональні числа a і b, що a^b — раціональне число?

1.51.* Про функцію f відомо, що $f(1) = 3$ і для всіх x, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x + y) = f(x)f(y)$. Знайдіть:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(20)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

1.52.* Про неперервну функцію f відомо, що $f(1) = 3$ і для всіх x, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x + y) = f(x)f(y)$. Доведіть, що $f(x) = 3^x$.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8,$

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 2.1. ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ◄

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 2.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$.

Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню $-3x = 7$. Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5+4)$; $3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5};\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9 = 5 \cdot 6^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0. \qquad (3)$$

Якщо зробити заміну $2^x = u$, $3^x = v$, то рівняння (3) набуде такого вигляду: $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$.

Оскільки $v = 3^x \neq 0$, то, поділивши обидві частини цього рівняння на v^2, отримаємо:

$$3\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\left(\frac{u}{v}\right) + 2 = 0.$$

Далі за допомогою заміни $\frac{u}{v} = t$ отримуємо квадратне рівняння $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Звідси $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = 1$. Оскільки $t = \frac{u}{v} = \frac{2^x}{3^x}$, то початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0. \end{array}\right.$$

Відповідь: 0; 1. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також спадна, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 3)\ 2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a + 3)\ t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a має один корінь або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Рівняння $2^x = a - 1$ не має коренів при $a - 1 \leqslant 0$, тобто при $a \leqslant 1$.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$. ◄

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}6^{2x-3}=1$;
2) $8^x=16$;
3) $0{,}16^x=\frac{5}{2}$;
4) $\sqrt{5^x}=25$;
5) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
6) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$;
7) $2^x\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$;
8) $36^x=\left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
9) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$;
10) $3^{x-1}=6^x\cdot 2^{-x}\cdot 3^{x+1}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$;
2) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$;
3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$;
4) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$;
5) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;
6) $2^{x-1}\cdot 3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot 6^{2x+5}$;
7) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;
8) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$;
9) $16^{5-3x}=0{,}125^{5x-6}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2}+3^x=30$;
2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$;
3) $2^{x+4}-2^x=120$;
4) $7^{x+1}+4\cdot 7^x=77$;
5) $5^x+7\cdot 5^{x-2}=160$;
6) $6^{x+1}-4\cdot 6^{x-1}=192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x=150$;
2) $2^x+2^{x-3}=18$;
3) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x-1}=347$;
4) $4^x-3\cdot 4^{x-2}=52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$;
2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$;
3) $25^x-5^x-20=0$;
4) $100\cdot 0{,}3^{2x}+91\cdot 0{,}3^x-9=0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x}-3\cdot 6^x-18=0$;
2) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4=0$.

2.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x\cdot 3^{x+1}=0{,}25\cdot 12^{3x-1}$;
3) $4\cdot 2^{\cos x}=\sqrt{8}$;
4) $0{,}25\cdot 2^{x^2}=\sqrt[3]{0{,}25\cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8.° Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;

2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;

3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.° Розв’яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;

2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;

3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;

4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;

5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;

6) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$;

7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47$;

8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

2.10.° Розв’яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;

2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;

3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;

4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;

5) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;

6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

2.11.° Розв’яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;

2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;

3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$;

4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3$;

5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;

6) $\frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2$.

2.12.° Розв’яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;

3) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$;

4) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4$;

5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$;

6) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2$.

2.13.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

2.14.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

2.15.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

2.16.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2.17.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

2.18.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

2.20.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

2.21.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2.22.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2.23.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.

2.24.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a+1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

2.25.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

2.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x-(a+1)\cdot 2^x+2a-2=0$$

має два різних корені?

2.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x=3-x$;
2) $3^x+4^x=5^x$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4^x$;
4) $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

2.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x=11-x$;
2) $3^{x-2}=\frac{9}{x}$;
3) $4^{x-2}+6^{x-3}=100$;
4) $\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(3+\sqrt{7}\right)^x=7^x$.

2.29.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(3^{2x}-4\cdot 3^x+3\right)=0$$

має два різних корені?

2.30.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(2^{2x}-10\cdot 2^x+16\right)=0$$

має два різних корені?

2.31.•• Розв'яжіть рівняння $4^x-(19-3x)\cdot 2^x+34-6x=0$.

2.32.•• Розв'яжіть рівняння $9^x-(14-x)\cdot 3^x+33-3x=0$.

2.33.•• Розв'яжіть рівняння $4^{\operatorname{tg} x}+4^{\operatorname{ctg} x}=8$.

2.34.•• Розв'яжіть рівняння $2^{\cos x}+2^{\sin x}=2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

2.35.* При яких значеннях параметра a рівняння $2^{|x|}=ax^2+a^2$ має єдиний розв'язок?

2.36.* При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=\left(a+\frac{1}{3}\right)x^2+a^2$ має єдиний розв'язок?

2.37.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=(3a+1)|x|+2a^2$$

має єдиний розв'язок?

2.38.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2(a-1)x^2+\frac{1}{2}a^2$$

має єдиний розв'язок?

2.39.* При яких значеннях параметра a рівняння $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16$ і $|a-9|\cdot 3^{x-2}+a\cdot 9^{x-1}=1$ рівносильні?

2.40.* При яких значеннях параметра a рівняння $3^x + 3^{x+3} = 3^{x+1} + 25$ і $|a-4|2^x + a \cdot 4^x = 4$ рівносильні?

2.41.* Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $(p-4)\,9^x + (p+1)\,3^x + 2p - 1 = 0$ не має розв'язків.

2.42.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a-1)\cdot 3^{2x} - (2a-1)\cdot 3^x - 1 = 0$$

має два різних корені?

3. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

Під час розв'язування багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 3.1. ***При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2}, 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^{x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x};$$

$$\left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\right)^{x}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Оскільки $0 < \frac{3}{5} < 1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x \leqslant 4x$; $x \geqslant 0$.

Відповідь: $[0; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$;

$$2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0;$$

$$2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

Нехай $2^{-x} = t$. Тоді $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

Звідси $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$.

Оскільки $2^{-x} > 0$, то нерівність $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ виконується при всіх x. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^{-x} < 4$.

Маємо: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Відповідь: $(-2; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$.

Розв'язання. Маємо: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0$.

Оскільки $5^{2x} > 0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^{x} > 0$.

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◀

ВПРАВИ

3.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

3.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $2^{x^2-1} < 8$;
6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{4}$; 5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^{x}$;

2) $10^{x} < 0{,}001$; 4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$; 6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4.° Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

3.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$; 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2}-27}}$.

3.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1-6^{x-4}}$.

3.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{5}$; 4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;

2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;

3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$; 6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$; 3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$; 4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0{,}5}$.

3.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^{x} > 5$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^{x} < 36$; 5) $2 \cdot 6^{x} + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

3) $2^{x} + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x} - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} - 4\cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4\cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8\cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0{,}25^x - 12\cdot 0{,}5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3}\cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

3.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2\cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;

4) $25^x - 26\cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

3.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

3.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

3.17.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

2) $2\cdot 16^x - 3\cdot 2^{4x-1} + 7\cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

3.18.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9\cdot 3^{-x} - 8 > 0$;

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.19.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1} - 2\cdot 3^{1-x} > 7$;

2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.20.• Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.21.• Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

3.22.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$; 2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.23.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$; 2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

3.24.•• Розв'яжіть нерівність $\left(5 - \sqrt{24}\right)^x + \left(5 + \sqrt{24}\right)^x \geqslant 98$.

3.25.•• Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}\right)^x < 8$.

3.26.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$; 2) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

3.27.•• Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

3.28.•• Розв'яжіть рівняння $\left|3^x - 1\right| + \left|3^x - 9\right| = 8$.

3.29.•• Розв'яжіть рівняння $\left|2^x - 1\right| + \left|2^x - 2\right| = 1$.

3.30.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x > 6 - x$; 2) $5^x + 12^x < 13^x$.

3.31.•• Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

3.32.•• Розв'яжіть нерівність $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

3.33.•• Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

3.34.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geqslant 0$.

3.35.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leqslant 0$.

3.36.* При яких значеннях параметра a нерівність

$$4^{\cos x} - 2(a - 3) \cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

3.37.* При яких значеннях параметра m нерівність

$$(m + 2) \cdot 4^{|x-1|} - 2m \cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

4. Логарифм і його властивості

Рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$ розв'язати легко. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці $A\ (x_0;\ 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0.

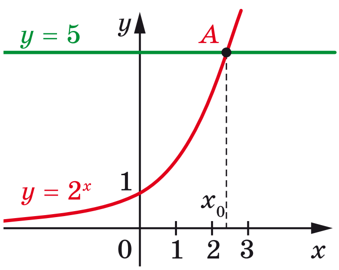


Рис. 4.1

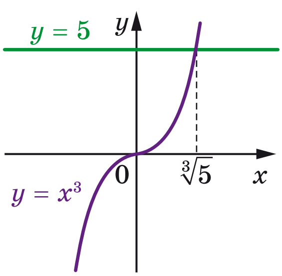


Рис. 4.2

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10 класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.2). Потреба називати й записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» і позначення $\sqrt[3]{5}$.

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа** 5 **з основою** 2 та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.3).

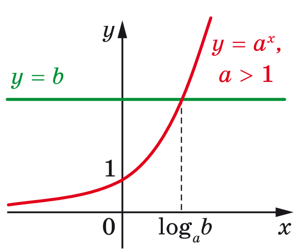


Рис. 4.3

Його називають логарифмом числа b з основою a та позначають $\log_a b$.

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, оскільки $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, оскільки $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, оскільки $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, оскільки $100^0 = 1$.

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю.**

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a**. Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$, тому при $b \leqslant 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x>0$, $y>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy=\log_a x+\log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів*.

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x+\log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy}=xy;$$

$$a^{\log_a x+\log_a y}=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy}=a^{\log_a x+\log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$. ◄

Теорема 4.2 (логарифм частки). ***Якщо $x>0$, $y>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів*.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 4.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3 (логарифм степеня). ***Якщо $x>0$, $a>0$ і $a\neq 1$, то для будь-якого $\beta\in\mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^{\beta}=\beta\log_a x}$$

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a x^{\beta}}$ і $a^{\beta\log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $a^{\log_a x^{\beta}}=x^{\beta}$;

$$a^{\beta\log_a x}=\left(a^{\log_a x}\right)^{\beta}=x^{\beta}.$$

Отже, $a^{\log_a x^{\beta}}=a^{\beta\log_a x}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a x^{\beta}=\beta\log_a x$.

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 4.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ◄

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \ ◄$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \ ◄$$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$;

2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Маємо: $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $f(x) = 5^{\log_5 (x-3)}$.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки для всіх значень $x \in D(f)$ виконується рівність $5^{\log_5 (x-3)} = x - 3$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 4.4). ◄

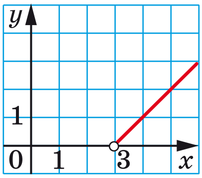


Рис. 4.4

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо: $\lg 56 = \lg(8 \cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 =$

$$= \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3\lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba.$$ ◄

ВПРАВИ

4.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 3) $\log_{0,01} 10 = 2$; 5) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;

2) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 4) $\lg 0,0001 = -4$; 6) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$?

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 100; 3) 0,1; 5) 0,00001;
2) 1000; 4) 0,01; 6) 0,000001.

4.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

1) $\sqrt{10}$; 2) 0,1; 3) 1000; 4) 0,0001?

4.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 3) $\log_2 x = 0$; 5) $\log_x 0,25 = -2$;

2) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 4) $\log_x 9 = 2$; 6) $\log_x 5 = \sqrt{2}$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x = 10$; 2) $2^{x-3} = 5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$; 4) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.13.° Обчисліть значення виразу:

1) $7^{2\log_7 2}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;

2) $64^{0{,}5\log_2 12}$; 4) $6^{1+\log_6 5}$; 6) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

4.14.° Обчисліть значення виразу:

1) $4^{\log_2 9}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 3) $10^{2+\lg 8}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

4.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$; 3) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

2) $\log_5 100 - \log_5 4$; 4) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

4.16.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

4.17.° Подайте:

1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;
2) число −1 у вигляді логарифма з основою 0,4;
3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;
4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

4.18.° Подайте:

1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;
2) число −2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

4.19.° Обчисліть значення виразу:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;
2) $8^{1-\log_2 3}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;
4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;
5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;
6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;
7) $\lg(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6})$;
8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.20.° Обчисліть значення виразу:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;
3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;
4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;
6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;
7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;
8) $5^{\log_5 4\,\cdot\,\log_2 3}$.

4.21.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$;
3) $\log_9 \log_2 8$;
4) $\log_2 \sin 135°$;
5) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 315°$;
7) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4}$;
8) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}(-120°)$.

4.22.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$; 3) $\log_6 \operatorname{tg} 225°$; 4) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4.23.° Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\log_7 27-2\log_7 3}{\log_7 45+\log_7 0,2}$;
2) $\dfrac{\log_9 125+3\log_9 2}{\log_9 1,2-\log_9 12}$.

4.24.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3\lg 4+\lg 0,5}{\lg 9-\lg 18}$;
2) $\dfrac{\lg 625-8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256-2\lg 5}$.

4.25.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;
2) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9}\cdot\log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.26.° Спростіть вираз:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;   2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.27.• Доведіть рівність:

1) $\log_b a \cdot \log_d c = \log_b c \cdot \log_d a$;   2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

4.28.• Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36 \log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4.29.• Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12 \log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

4.30.• Спростіть вираз $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \frac{a}{b}}$.

4.31.• Спростіть вираз $\dfrac{\log_a ab(\log_b a - 1 + \log_a b)}{1 + \log_a^3 b}$.

4.32.• Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}}(7 - 4\sqrt{3})$ є цілим числом.

4.33.• Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}}(9 + 4\sqrt{5})$ є цілим числом.

4.34.• Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

4.35.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;   4) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

2) $y = 5^{-\log_5 x}$;   5) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x} (3-x)^4$;

3) $y = 2^{\log_2 x^2}$;   6) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

4.36.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;   4) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \frac{1}{3}$;

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;   5) $y = \log_x x$;

3) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;   6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$.

4.37.• Доведіть, що $\log_2 3$ — ірраціональне число.

4.38.• Доведіть, що $\log_3 5$ — ірраціональне число.

4.39.•• Наведіть приклад таких ірраціональних чисел a і b, що число a^b — ціле.

4.40.•• Наведіть приклад такого раціонального числа a та ірраціонального числа b, що число a^b — ціле.

4.41.•• Обчисліть $\frac{1}{\log_2 20!}+\frac{1}{\log_3 20!}+\ldots+\frac{1}{\log_{20} 20!}$.

4.42.•• При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $\log_2(1-x^2)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$;

2) $\lg\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)$;

3) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5(2-x)$;

4) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5|x-2|$?

4.43.•• Чому дорівнює значення виразу:

1) $\lg\sin 1°\cdot\lg\sin 2°\cdot\lg\sin 3°\cdot\ldots\cdot\lg\sin 89°\cdot\lg\sin 90°$;

2) $\lg\operatorname{tg}10°\cdot\lg\operatorname{tg}15°\cdot\lg\operatorname{tg}20°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}75°\cdot\lg\operatorname{tg}80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}32°\cdot\operatorname{tg}34°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}58°\cdot\operatorname{tg}60°)$;

4) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}3°+\ldots+\lg\operatorname{tg}88°+\lg\operatorname{tg}89°$?

4.44.•• Спростіть вираз $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

4.45.•• Обчисліть значення виразу $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$.

4.46.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\lg\operatorname{tg}x+\lg\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\log_x 1$; 3) $y=10^{\frac{1}{\log_x 10}}$.

4.47.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=x^{\log_x 2x}$; 2) $y=\frac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$.

4.48.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy=\lg x+\lg y$;

2) $\lg xy=\lg(-x)+\lg(-y)$;

3) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg|x|+2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2=\log_x(-y)$.

4.49.•• Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg\frac{x}{y}=\lg(-x)-\lg(-y)$;

2) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg x+2\lg(-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2=\log_x y$.

4.50.•• Нехай $1 < a < b$. Доведіть, що графік функції $y = b^x$ можна отримати з графіка функції $y = a^x$ шляхом стискання до осі ординат.

4.51.•• Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

4.52.•• Доведіть, що $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

4.53.•• Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

4.54.•• Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

4.55.•• Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;
2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$;
3) $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$, $\log_3 20 = b$.

4.56.•• Знайдіть:

1) $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$;
2) $\log_{60} 27$, якщо $\log_{60} 2 = a$, $\log_{60} 5 = b$;
3) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_5 14 = b$.

5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число $\log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;
$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції

$y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

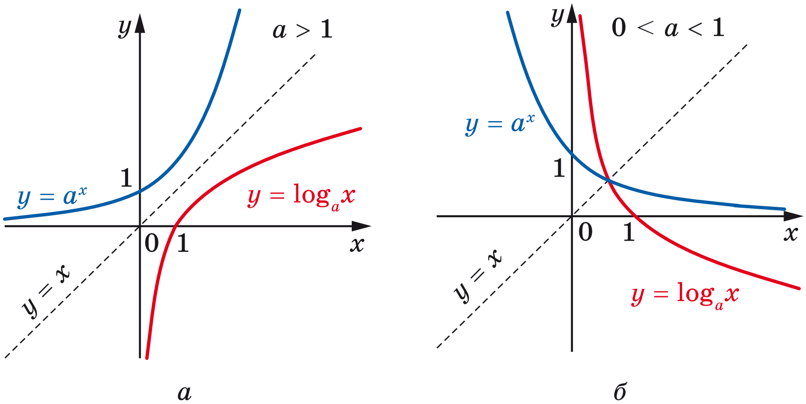


Рис. 5.1

Графік функції $y = a^x$ має з віссю ординат одну спільну точку. Це означає, що графік оберненої функції $y = \log_a x$ має єдину спільну точку з віссю абсцис.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *має єдиний нуль* $x = 1$.

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є зростаючою при* $a > 1$ *та спадною при* $0 < a < 1$.
- Оскільки функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль та є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то *функція* $y = \log_a x$ *має два проміжки знакосталості.*
  Якщо $a > 1$, *то* $y < 0$ *при* $x \in (0;\ 1)$, $y > 0$ *при* $x \in (1;\ +\infty)$;
  якщо $0 < a < 1$, *то* $y < 0$ *при* $x \in (1;\ +\infty)$, $y > 0$ *при* $x \in (0;\ 1)$.
- Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

- Тому *функція* $y = \log_a x$ *є неперервною.*
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.
- *Графік функції* $y = \log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x = 0$, *коли* x *прямує до нуля справа.*

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Якщо припустити, що $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ є зростаючою. Тому $\log_a 5 > \log_a 4$. Але за умовою це не так. Отже, $a < 1$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$. Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 5.2, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

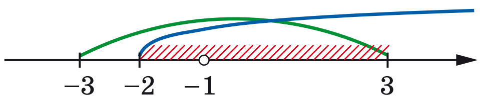


Рис. 5.2

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Порівняйте:

1) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 2) $\log_6 7$ і $\log_7 6$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і -2.

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

2) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

3) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

4) Маємо: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$.

Оскільки $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Порівняйте $\log_2 3$ і $\log_3 5$.

Розв'язання. Доведемо, що $\log_2 3 > \frac{3}{2}$.

Оскільки $\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}$ і $3 > \sqrt{8}$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Аналогічно доводимо, що $\log_3 5 < \frac{3}{2}$. Отже, $\log_2 3 > \log_3 5$. ◄

Ви знаєте, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі логарифмічні функції $f(x) = \log_a x$ мають таку властивість:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \text{ де } x > 0,\ y > 0,$$

тобто задовольняють таке рівняння Коші:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ де } x > 0,\ y > 0.$$

Можна довести (див. задачі 5.37, 5.38), що серед визначених на проміжку $(0; +\infty)$ функцій, неперервних і відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x) = \log_a x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення логарифмічної функції.

Логарифмічна функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Звернемося до прикладів, які ми наводили в кінці п. 1.

Якщо колонія бактерій за рівні проміжки часу збільшує свою масу m в одну й ту саму кількість разів, то за допомогою функції $t = \log_a m$ можна визначити час, коли маса колонії досягне певної величини.

Логарифмічна функція дозволяє визначити час, за який кількість грошей на банківському рахунку збільшиться вдвічі, якщо банк щодня збільшує суму вкладу на p відсотків. Цей час дорівнює $\log_{\left(1+\frac{p}{100}\right)} 2$ (доведіть це самостійно).

Аналогічним чином логарифмічна функція дає змогу визначити період піврозпаду радіоактивної речовини.

ВПРАВИ

5.1.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0{,}5 > \log_a 0{,}4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.2.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

5.3.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;

3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$; 2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.5.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?

5.6.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює -1, а найменше дорівнює -2?

5.7.° Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3;

2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2;

3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6;

4) $\log_{16} 0,1$ і $-\frac{3}{4}$.

5.8.° Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1; 2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

5.9.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;

2) $y = \log_2 x + 3$;

3) $y = -\log_2 x$;

4) $y = \log_2 (-x)$.

5.10.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;

3) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.11.° Нехай $1 < a < b$. Доведіть, що графік функції $y = \log_b x$ можна отримати з графіка функції $y = \log_a x$ шляхом стискання до осі абсцис.

5.12.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0,5$.

5.13.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.14.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.15.° Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.16.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.17.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.18.• Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$; 2) $\log_{0,2} 0,1$ і $\log_{0,1} 0,2$.

5.19.• Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1,8$ і $\log_{1,8} 1,7$; 2) $\log_{0,2} 0,3$ і $\log_{0,3} 0,2$.

5.20.• Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

5.21.• Доведіть, що $\log_{\cos 1} 4 + \log_4 \cos 1 < -2$.

5.22.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$;
2) $y = \lg(1 - \sin x)$;
3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$;
4) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;
5) $y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6 - x}$;
6) $y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3 - x)$;
7) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;
8) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$;
9) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$;
10) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$;
11) $y = \log_2 \cos x$;
12) $y = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.23.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\lg(x^2+1)}$; 2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y=\sqrt{\lg(1+x^2)}$;

4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$;

5) $y=\lg(x+8)-\dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

6) $y=\lg(10x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

7) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

8) $y=\lg(9x-x^2)-\dfrac{1}{\lg(5-x)}$;

9) $y=\log_{2-x}(8+7x-x^2)$;

10) $y=\sqrt{\dfrac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

11) $y=\lg\sin x$.

5.24.• Знайдіть область значень функції:

1) $y=\log_3(4+\sin x)$; 2) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-x^2)$.

5.25.• Знайдіть область значень функції:

1) $y=\log_2(5+3\cos x)$; 2) $y=\log_4(4x-x^2)$.

5.26.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x|$;

3) $y=\dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y=\sqrt{\log_3^2 x}\log_x 3$.

5.27.• Побудуйте графік функції:

1) $y=|\log_3 x|$; 2) $y=\log_3|x|$; 3) $y=\dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

5.28.•• Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y=\log_{0,1}(x^2+100)$; 2) $y=\log_{\frac{1}{5}}(x^2-6x+14)$.

5.29.•• Знайдіть найменше значення функції:

1) $y=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x^2+8}$; 2) $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2-4x+7}$.

5.30.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

5.31.•• Дослідіть на парність функцію $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

5.32.•• При яких значеннях параметра a найменше значення функції $f(x)=9\log_2^2 x-30\log_2 x+61-9a^2$ на відрізку $[1; 4]$ є додатним числом?

5.33.•• При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x)=-4\log_3^2 x+20\log_3 x-9a^2$ на відрізку $[3; 27]$ є від’ємним числом?

5.34.•• Знайдіть першу цифру після коми в десятковому записі числа lg 2.

5.35.•• Порівняйте числа $\log_2 3$ і $\log_3 7$.

5.36.•• Відомо, що $\lg 3 = 0{,}4771...$. Скільки цифр містить десятковий запис числа 3^{1000}?

5.37.* Про визначену на проміжку $(0; +\infty)$ функцію f відомо, що $f(2) = 1$ і для всіх $x > 0$, $y > 0$ виконується рівність $f(xy) = f(x) + f(y)$. Знайдіть 1) $f(1)$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 3) $f(4)$; 4) $f(1024)$; 5) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

5.38.* Про визначену на проміжку $(0; +\infty)$ і неперервну функцію f відомо, що $f(2) = 1$ і для всіх $x > 0$, $y > 0$ виконується рівність $f(xy) = f(x) + f(y)$. Доведіть, що $f(x) = \log_2 x$.

5.39.* Для всіх $n \in \mathbb{N}$ обчисліть суму

$$S = [\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \ldots + [\log_2 2^n].$$

5.40.* Для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, доведіть, що

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \left[\sqrt[4]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n].$$

6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням.**

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 6.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

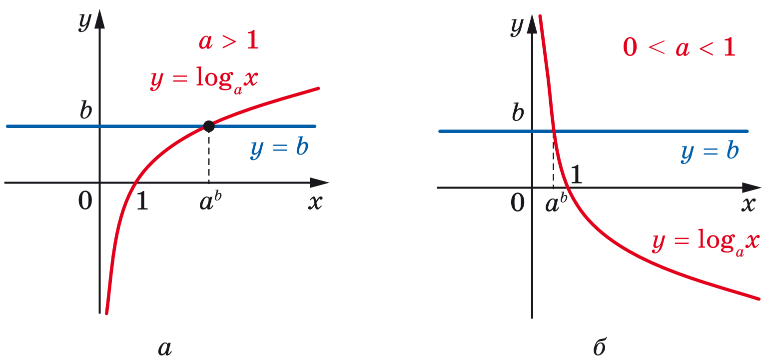


Рис. 6.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\log_3 (3x - 1) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$. ◄

Розв'язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$.

Під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 6.1. ***Нехай*** $a > 0$, $a \neq 1$. ***Якщо*** $\log_a x_1 = \log_a x_2$, ***то*** $x_1 = x_2$, ***і навпаки, якщо*** $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ ***і*** $x_1 = x_2$, ***то*** $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 2.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. ***Нехай*** $a > 0$, $a \neq 1$. ***Рівняння виду*** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ***рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв'язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть наслідок з теореми 6.1 самостійно.

Тепер розв'язання рівняння прикладу 1 можна подати й так:

$\log_3 (3x - 1) = 2 \log_3 3$;

$\log_3 (3x - 1) = \log_3 3^2$;

$3x - 1 = 3^2$; $x = \frac{10}{3}$.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\lg (x^2 - 4x + 2) = \lg (2x - 3)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x = 5$.

Відповідь: 5. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Звідси $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$; $x = 5$ або $x = -\dfrac{5}{2}$.

Легко переконатися, що число $-\dfrac{5}{2}$ не є коренем даного рівняння (не входить до його області визначення), а число 5 є коренем даного рівняння.

Таким чином, дане рівняння розв'язано методом наслідків.

Відповідь: 5. ◄

Звернемо увагу, що зроблений під час розв'язування прикладу 3 перехід від рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ до рівняння $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Справді, область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(2; +\infty)$. Замінивши вираз $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2)$ на вираз $\log_3((2x - 1)(x - 2))$, ми розширили область визначення початкового рівняння, оскільки область визначення виразу $\log_3((2x - 1)(x - 2))$ задається нерівністю $(2x - 1)(x - 2) > 0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2; +\infty)$ до множини $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\dfrac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ рівносильне системі $\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

Тому рівняння прикладу 3 можна було розв'язати методом рівносильних переходів.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді отримаємо $\dfrac{2}{t} + \dfrac{6}{1+t} = 3.$

Звідси $t = 2$ або $t = -\dfrac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x = 2,\\ \log_2 x = -\dfrac{1}{3};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = 2^2,\\ x = 2^{-\frac{1}{3}}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = 10^{2+\lg x}.$

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = \lg 10^{2+\lg x}.$$

Далі маємо: $\dfrac{\lg x + 2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x.$

Нехай $\lg x = t$. Тоді $\dfrac{(t+2)\,t}{3} = 2 + t.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}t = -2,\\ t = 3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\lg x = -2,\\ \lg x = 3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 10^{-2},\\ x = 10^3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = 0{,}01,\\ x = 1000.\end{array}\right.$

Відповідь: 0,01; 1000. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0 \qquad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2; 4)\cup(4; +\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4; +\infty)$. Отже, такий перехід вилучає з області визначення початкового рівняння множину (2; 4), яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Звідси $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0.$

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 3; $3+\sqrt{2}$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

Розв'язання. Із ключової задачі 4.27 випливає, що $5^{\lg x}=x^{\lg 5}$. Тоді можна записати:

$$2\cdot 5^{\lg x}=50;\ 5^{\lg x}=25;$$

$$\lg x=2;\ x=100.$$

Відповідь: 100. ◄

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0$.

Розв'язання. Помилково вважати, що рівняння виду $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$ При такому переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x) = 0$ належать області визначення функції g.

Насправді рівняння $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 (x-2) = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ \sin x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 6.2), то $x = 3$ не є коренем початкового рівняння.

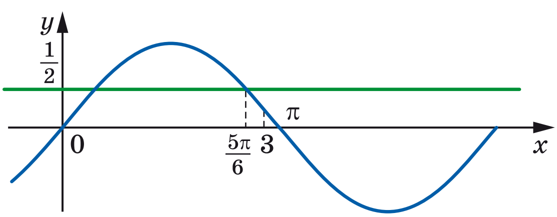


Рис. 6.2

Усі числа виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$ є коренями другого рівняння сукупності. Серед них потрібно вибрати лише ті, які задовольняють умову $x > 2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{N}$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо це рівняння як квадратне відносно $\log_3 x$. Тоді отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -4, \\ \log_3 x = \dfrac{4}{x+1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{1}{81}, \\ \log_3 x = \dfrac{4}{x+1}.\end{array}\right.$

Очевидно, що $x = 3$ — корінь другого рівняння сукупності. Оскільки функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, а функція $y = \frac{4}{x+1}$ на множині $(0; +\infty)$ є спадною, то рівняння, що розглядається, більше коренів не має.

Відповідь: $\frac{1}{81}$; 3. ◄

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння

$$(1 - 4x^2 + 4x)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2.$$

Розв'язання. Маємо: $(2 - (2x - 1)^2)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2$.

Очевидно, що $2 - (2x-1)^2 \leqslant 2$, $0 < \log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 1$.

Тому $(2 - (2x-1)^2)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 2$.

У цій нерівності рівність досягається лише за умови

$$\begin{cases} 2 - (2x-1)^2 = 2, \\ \log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◄

ВПРАВИ

6.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$; 2) $\lg(x^2 + 2) = \lg(3x + 6)$.

6.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2+5)$.

6.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\frac{1}{x}=6$;
2) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$;
3) $\log_7\log_4(x-2)=0$;
4) $\log_4\log_3\log_2 x=\frac{1}{2}$.

6.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\sqrt[3]{x}=\frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x-\log_{25}x+\log_{625}x=\frac{3}{4}$;
3) $\lg\lg\lg x=0$.

6.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(3^{5x-3}+1)=2$;
2) $\log_3(3^{x-1}+6)=x$;
3) $\log_2(2^x+7)=3-x$;
4) $\log_6(6^{-x}-5)=x+1$.

6.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(6^{x+1}-30)=x$;
2) $\log_5(6-5^x)=1-x$.

6.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(x^2-2x)=\lg(2x+12)$;
2) $\log_{0,5}(x^2+3x-10)=\log_{0,5}(x-2)$;
3) $2\log_7(-x)=\log_7(x+2)$;
4) $2\log_8(1-x)=\log_8(2,5x+1)$.

6.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(9-x^2)=\log_6(1-2x)$;
2) $\lg(x^2+2x-3)=\lg(2x^2-2)$;
3) $\log_{0,7}(2x^2-9x+4)=2\log_{0,7}(x+2)$;
4) $2\log_2(-x)-\log_2(3x+8)=1$.

6.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5(25^x-2\cdot 5^x)=2\log_{25}15$;
2) $\log_{\sqrt{5}}(16^x-6)=2+\log_{\sqrt{5}}(4^x-2)$;
3) $x\lg 3-1=2\lg 3-\lg(3^x+1)$.

6.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3(2^{2x}+2^x)=2\log_9 12$;
2) $x-\lg 5=x\lg 5+2\lg 2-\lg(1+2^x)$.

6.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1)=-1$;
2) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;
3) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x-3)=\lg(1{,}5x-3)$;
5) $\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=1-\log_2(x+2)$;
6) $2\log_5(x+1)-\log_5(x+9)=\log_5(3x-17)$.

6.12.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1$;
2) $\log_{0,6}(x+2)+\log_{0,6}(6-x)=\log_{0,6}(x+8)$;
3) $\log_2(2x-1)-\log_2(x+2)=2-\log_2(x+1)$;
4) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$.

6.13.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;
2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

6.14.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)=2$;
2) $\lg(3^x-4)+\lg(3^x-2)=1$.

6.15.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$;
2) $\lg^2 x-2\lg x^2+3=0$;
3) $\log_5 x+\log_x 5=2{,}5$;
4) $2\log_{\frac{1}{6}} x+3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x}-5=0$.

6.16.° Розв'яжіть рівняння:
1) $3\log_8^2(-x)-2\log_8(-x)-1=0$;
2) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7^2 x-6$;
3) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$;
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x+2}-\dfrac{2}{\lg x-1}=1$.

6.17.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)}=1$;
2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)}=0$;
3) $\log_x(2x^2-7x+12)=2$;
4) $\log_{x+1}(x+3)=2$;
5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16)=2$.

6.18.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)}=1$;
2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)}=0$;
3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;
4) $\log_x(x+6)=2$;
5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3)=2$.

6.19.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_2(x-5)^2-2\log_2(x+2)=2$;
2) $\dfrac{1}{2}\lg x^2+\lg(x+7)=1$.

6.20.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2(x+10) = 3 + \log_2 3$;

2) $\frac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6(5-x) = 1$.

6.21.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0$;

2) $\lg(10x^2)\cdot\lg x = 1$;

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = 2$;

4) $\log_2(4x)\cdot\log_2(0{,}25x) = 5$;

5) $\lg^2(100x) + 2\lg x = 20$;

6) $\log_5^2(5x) + \log_5 \frac{x}{25} = 3$;

7) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 0$;

8) $2\lg(\lg x) = \lg(2\lg x + 8)$.

6.22.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$;

2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{27} + 4 = 0$;

3) $\log_7(7x)\cdot\log_7 \frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$;

4) $\lg^2(10x) + \lg(10x) = 6 + 3\lg x$;

5) $\log_6^2(36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8$;

6) $\log_5(\log_2 x) + \log_5(\log_2 x^3 - 14) = 1$.

6.23.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x} = 5$;

2) $x^{\lg x + 2} = 1000$;

3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;

4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

6.24.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_3 x} = 81$;

2) $x^{\lg x} = 100x$;

3) $x^{\log_2 x - 2} = 256$;

4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6+\lg x}$.

6.25.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;

2) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$;

3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;

4) $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$;

5) $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x$;

6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0$.

6.26.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x(9x^2)\log_3^2 x = 4$;

2) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

3) $\frac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$;

4) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x+1) = 3$.

6.27.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10;$

2) $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1;$

3) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0.$

6.28.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y - 3x) = \lg(4 - 4x + y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

6.29.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x - 2y) = \lg(5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x + y)\, 3^{y - x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x + y) = x - y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x - y) = 1 - \log_3 (x + y). \end{cases}$

6.30.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 162;$

2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18.$

6.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200;$

2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14.$

6.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7(x+8)=-x$;
2) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$;
3) $\log_5 \operatorname{tg}^2 x=\cos 2x$;
4) $x^4=\log_x 4$.

6.33.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5)=x-9$;
2) $\log_3^2 x+(x-1)\log_3 x=12-3x$;
3) $\log_2 \cos^2 x=\sin^8 x$;
4) $2x^6=\log_x 3$.

6.34.•• Розв'яжіть рівняння

$$\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1).$$

6.35.•• Розв'яжіть рівняння

$$2\lg^2(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\cdot\lg(2x+1).$$

6.36.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$;
2) $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}-2=\lg\sqrt{1-x^2}$.

6.37.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x}$;
2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1)=\log_{1+x+\sin x}(3x+2)$.

6.38.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\operatorname{tg} x+1}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=0$.

6.39.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x+1)-3)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

6.40.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_3(x-2)-2)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

6.41.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-7)=0$ має єдиний розв'язок?

6.42.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\log_3(2x-5)=0$ має єдиний розв'язок?

6.43.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x \cos(2\pi x)=0$;
2) $\log_9 \sin 2x=\log_3\sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$;
3) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2$.