

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для
11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк,
Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. —
Х. : Гімназія, 2019. — 352 с. : іл.
ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-000-0

© А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,
В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2019
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2019

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожен з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним шрифтом**. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;



закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;



ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;



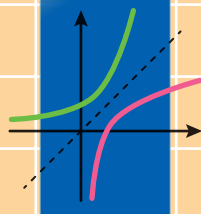
рубрика «Коли зроблено уроки»;

1.5.

зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи;

1.6.

синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. Степінь з довільним дійсним показником.
Показникова функція
2. Показникові рівняння
3. Показникові нерівності
4. Логарифм і його властивості
5. Логарифмічна функція та її властивості
6. Логарифмічні рівняння
7. Логарифмічні нерівності
8. Похідні показникової та логарифмічної функцій

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником.
- Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитесь розв'язувати показникові рівняння і нерівності.

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π .

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3,1415\dots$$

Розглянемо послідовність раціональних чисел

$$3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; \dots \quad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π .

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність степенів з раціональними показниками:

$$2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, 2^{3,141}, 2^{3,1415}, \dots \quad (2)$$

Можна показати, що члени послідовності (2) зі збільшенням номера прямують до деякого додатного числа. Це число називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π .

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α , де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Далі розглядають послідовність $b^{\alpha_1}, b^{\alpha_2}, b^{\alpha_3}, \dots$ степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c , яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$. Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α .

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α .

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α , де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ та будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

$$1) x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta};$$

$$2) x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta};$$

$$3) (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta};$$

$$4) (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha;$$

$$5) \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$, $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{α_n}) , (x^{β_n}) і $(x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n})$. Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n + \beta_n}$.

Послідовність раціональних чисел $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2$, $\alpha_3 + \beta_3$, ... збігається до числа $\alpha + \beta$. Тому можна записати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = x^{\alpha+\beta}$.

$$x^\alpha \cdot x^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\alpha_n} \cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\alpha_n + \beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}}.$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}} + 1)(a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}} + 1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}} + 1)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}} + 1}{a^{3\sqrt{7}} + 1} = 1. \blacktriangleleft$$

Виберемо деяке додатне число a , відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x . Тим самим задамо функцію $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a > 0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x > 0$, тому область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x , що виконується рівність $a^x = b$.

- ☞ Сказане означає, що областю значень показникової функції є множина $(0; +\infty)$.
- ☞ Показникова функція не має нулів, і проміжок $(-\infty; +\infty)$ є її проміжком знакосталості.
- ☞ Показникова функція є неперервною.
- ☞ Покажемо, що при $a > 1$ показникова функція є зростаючою. Для цього скористаємося лемою.

Лема. Якщо $a > 1$ і $x > 0$, то $a^x > 1$; якщо $0 < a < 1$ і $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$, тобто $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- ☞ Аналогічно можна показати, що при $0 < a < 1$ показникова функція є спадною.
- ☞ Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона не має точок екстремуму.
- ☞ Показникова функція є диференційовною. Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

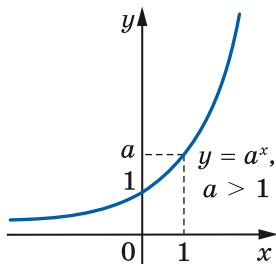


Рис. 1.1

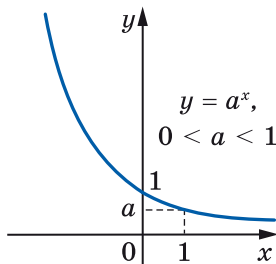


Рис. 1.2

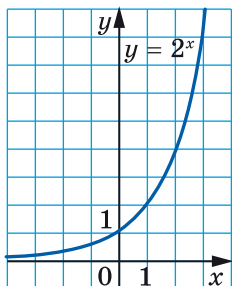


Рис. 1.3

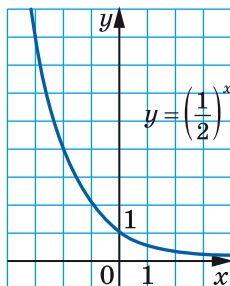


Рис. 1.4

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Зауважимо, що при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі та в діяльності людини.

Наприклад, біологам відомо, що колонія бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшує свою масу в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t = 0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t = 1$ маса дорівнювала a , то в момент часу $t = 2, t = 3, \dots, t = n, \dots$ маса дорівнюватиме відповідно $a^2, a^3, \dots, a^n, \dots$. Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t . Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t) = a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t) = a^t$.

З фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші в банк під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунок буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знако-сталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\begin{aligned}\min_{[-4; 3]} f(x) &= f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \\ \max_{[-4; 3]} f(x) &= f(3) = 3^3 = 27.\end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geq 0$, то $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} \leq (\sqrt{2} - 1)^0 = 1$. Водночас $\sin^2 x + 1 \geq 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0. ◀



1. Сформулюйте властивості степеня з дійсним показником.
2. Яких значень набуває вираз x^α , де $\alpha > 0$, при $x > 1$? при $0 < x < 1$?
3. Яку функцію називають показниковою?
4. Яка область визначення показникової функції?
5. Яка область значень показникової функції?
6. Скільки нулів має показникова функція?
7. При яких значеннях a показникова функція $y = a^x$ є зростаючою? спадною?
8. Чи має показникова функція точки екстремуму?
9. Який вигляд має графік функції $y = a^x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

$$1) 3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}; \quad 3) \sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}};$$

$$2) \left((3\sqrt[3]{7})^{\sqrt{3}} \right)^{\sqrt{3}}; \quad 4) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{-\sqrt{8}}.$$

1.2.° Знайдіть значення виразу:

$$1) 5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5} \right)^{2\sqrt{3}}; \quad 2) \left((\sqrt{2})^{\sqrt{6}} \right)^{\sqrt{6}}; \quad 3) \left((\sqrt[5]{10})^{\sqrt{5}} \right)^{-2\sqrt{5}}.$$

1.3.° Доведіть, що:

$$1) \frac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}; \quad 3) \frac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}.$$

$$2) 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{\sqrt{27}} = (16^{\sqrt{3}})^{-2};$$

1.4.° Порівняйте із числом 1 степінь:

$$1) \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}}; \quad 3) 0,6^{2\sqrt{5}}; \quad 5) \left(\frac{4}{5} \right)^{\pi};$$

$$2) \left(\frac{\pi}{3} \right)^{\pi}; \quad 4) \left(\frac{1}{3} \right)^{-\sqrt{3}}; \quad 6) \left(\frac{\pi+1}{4} \right)^{-\sqrt{6}}.$$

1.5.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

$$1) 1,8^{\sqrt{1,8}}; \quad 2) \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\sqrt{10}}; \quad 3) 7^{-\sqrt{2}}; \quad 4) 0,3^{-\pi}.$$

1.6.° Яка з даних функцій є показниковою:

$$1) y = x^6; \quad 2) y = \sqrt[6]{x}; \quad 3) y = 6^x; \quad 4) y = 6?$$

1.7.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

$$1) \left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}; \quad 2) \left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}?$$

1.8.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

$$\begin{array}{lll} 1) y = 10^x; & 3) y = 2^{-x}; & 5) y = 2^x \cdot 3^x; \\ 2) y = \left(\frac{5}{9}\right)^x; & 4) y = y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}; & 6) y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x. \end{array}$$

1.9.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.10.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Як змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.11.° Порівняйте із числом 1 додатне число a , якщо:

$$1) a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}; \quad 2) a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}; \quad 3) a^{-0,3} > a^{1,4}; \quad 4) a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}.$$

1.12.° Порівняйте числа m і n , якщо:

$$1) 0,8^m < 0,8^n; \quad 2) 3,2^m > 3,2^n; \quad 3) \left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad 4) \left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n.$$

1.13.° Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll} 1) (a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2; & 3) \frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1; \\ 2) \frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}; & 4) \frac{a^{\frac{3}{24}} - 1}{a^{\frac{3}{3}} - 1} - \frac{a^{\frac{3}{81}} + 1}{a^{\frac{3}{3}} + 1}. \end{array}$$

1.14.° Спростіть вираз:

$$1) \frac{(a^{2\sqrt{6}} - 1)(a^{\sqrt{6}} + a^{2\sqrt{6}} + a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}} - a^{\sqrt{6}}}; \quad 2) ((a^\pi + b^\pi)^2 - (a^\pi - b^\pi)^2)^{\frac{1}{\pi}}.$$

1.15.° Чи є правильним твердження:

- 1) найбільше значення функції $y = 0,2^x$ на проміжку $[-1; 2]$ дорівнює 5 ;
- 2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
- 3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
- 4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2; 2]$ дорівнює 16 ?

1.16.* Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.17.* Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2; 3]$.

1.18.* На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

1.19.* На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.20.* Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.21.* Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.22.* Побудуйте графік функції:

1) $y = 2^x - 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$; 5) $y = -2^x$;
2) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y = 5 - 2^x$.

1.23.* Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^x + 1$; 3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;
2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y = -3^x - 1$.

1.24.* Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?

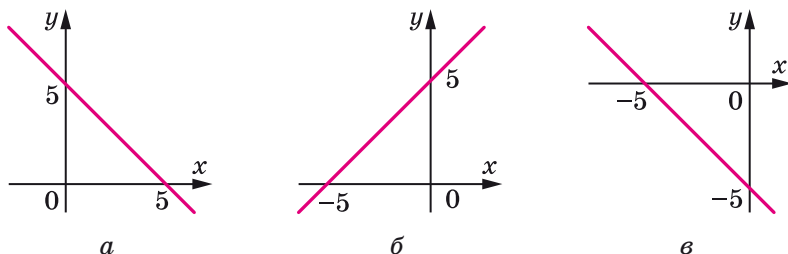


Рис. 1.5

1.25.* На рисунку 1.6 укажіть графік функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

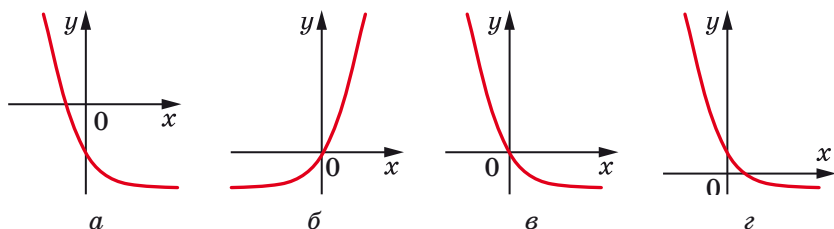


Рис. 1.6

1.26.* Установіть графічно кількість коренів рівняння:

- 1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.27.* Установіть графічно кількість коренів рівняння:

- 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.28.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2^{|x|}$; 3) $y = |2^x - 1|$;
2) $y = 2^{|x|} + 1$; 4) $y = \left| \frac{1}{2^x} - 1 \right|$.

1.29.* Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = |3^x - 1|$.

1.30.** Порівняйте $(7 + 4\sqrt{3})^{-5,2}$ і $(7 - 4\sqrt{3})^{5,6}$.

1.31.** Порівняйте $(2 + \sqrt{3})^{-\pi}$ і $(2 - \sqrt{3})^{\pi}$.

1.32.** Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.33.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |2^{-|x|} - 1|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

1.34.** Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |1 - 3^{|x|}|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

1.35.** Знайдіть область значень функції $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

1.36.** Знайдіть область значень функції $f(x) = 3^{|\sin x \cos x|}$.

1.37.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2;$

2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x.$

1.38.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1;$

2) $2^{|x|} = \cos x.$

1.39.** Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} \geq \sin x;$

2) $2^{-x^2} \geq |\sin x| + 1;$

3) $2^{\sqrt{x}} \geq 1 - x^2.$

1.40.** Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2} > \cos x;$

2) $2^{-x^2} \geq x^2 + 1.$

1.41.** Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1};$

2) $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x.$

1.42.** Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x};$

2) $y = (\sqrt{2} + 1)^x - (\sqrt{2} - 1)^x.$

1.43.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{2^x - 1}{2^x - 4}.$

1.44.* Знайдіть область значень функції $y = \frac{3^x}{3^x - 9}.$

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.45. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}.$

1.46. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}.$

1.47. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1} + 7^x;$

3) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1};$

2) $2^{x+1} + 2^{x-4};$

4) $9^{x+1} + 3^{2x+1}.$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.48. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2x - 8};$

2) $f(x) = \sqrt{16x - x^3}.$

1.49. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;

3) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$.

2) $f(x) = 3 + \sqrt[4]{x-1}$;

1.50. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \frac{x-1}{2x}$;

2) $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{4 - x^2}$.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0,3^{x-4} = 0,3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь**.

Теорема 2.1. При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ◀

Наслідок. Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \tag{1}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \tag{2}$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 2.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні. ◀

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0,125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожную із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$. Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7; \quad 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню
 $-3x = 7$.

Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$. ◀

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями степеня, подамо кожную із частин рівняння у вигляді степеня з основою 10. Маємо:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3};$$

$$10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходимо до рівносильного рівняння:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Звідси $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Відповідь: 1; 2. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння

$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$

Розв'язання. Маємо: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280$;

$$2^{12x-4} (2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280; \quad 2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$

$$2^{12x-4} = 256; \quad 2^{12x-4} = 2^8;$$

$$12x - 4 = 8; \quad x = 1.$$

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^x (2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x (5 + 4)$; $3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15}; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5}; \quad x = 1.$$

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x , то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◀

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Розв'язання. Маємо: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Оскільки $3^{2x} \neq 0$ при будь-якому x , то, поділивши обидві частини рівняння на 3^{2x} , отримаємо рівняння, рівносильне даному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0; \quad 4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тоді можна записати:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{cases} \quad \text{Маємо: } \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при будь-якому x , то перше рівняння сукупності розв'язків не має. Друге рівняння сукупності перепишемо так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Звідси $x = -2$.

Відповідь: -2. ◀

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x , отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також спадає, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1. ◀

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 3)2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a + 3)t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\begin{cases} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a має один корінь або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Якщо $a \leq 1$, тобто $a - 1 \leq 0$, то рівняння $2^x = a - 1$ коренів не має.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leq 1$ або $a = 5$. ◀



1. Наведіть приклади показникових рівнянь.
2. Яка рівність впливає з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?
3. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$ і $a \neq 1$?

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---------------------------|
| 1) $4^x = 64$; | 3) $0,6^{2x-3} = 1$; | 5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$; |
| 2) $3^x = \frac{1}{81}$; | 4) $10^{-x} = 0,001$; | 6) $8^x = 16$; |

$$7) 0,16^x = \frac{5}{2};$$

$$8) \sqrt{5^x} = 25;$$

$$9) 0,25^{x^2-4} = 2^{x^2+1};$$

$$10) \left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3};$$

$$11) 2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5;$$

$$12) \left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3};$$

$$13) 36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x};$$

$$14) 5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x};$$

$$15) 3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}.$$

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) 0,4^{x^2-x-6} = 1;$$

$$2) \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3};$$

$$3) 0,7^x = 2\frac{2}{49};$$

$$4) 9^{-x} = 27;$$

$$5) \sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}};$$

$$6) \left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4,5^{x-2};$$

$$7) 100^x = 0,01\sqrt{10};$$

$$8) \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64};$$

$$9) 2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5};$$

$$10) 32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x};$$

$$11) 3^{x^2-9} = 7^{x^2-9};$$

$$12) 16^{5-3x} = 0,125^{5x-6}.$$

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3^{x+2} + 3^x = 30;$$

$$2) 4^{x+1} + 4^{x-2} = 260;$$

$$3) 2^{x+4} - 2^x = 120;$$

$$4) 7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77;$$

$$5) 5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160;$$

$$6) 6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192.$$

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5^{x+1} + 5^x = 150;$$

$$2) 2^x + 2^{x-3} = 18;$$

$$3) 7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347;$$

$$4) 4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52.$$

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0;$$

$$2) 9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0;$$

$$3) 25^x - 5^x - 20 = 0;$$

$$4) 100 \cdot 0,3^{2x} + 91 \cdot 0,3^x - 9 = 0.$$

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) 6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0;$$

$$2) 2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

2.7.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}};$$

$$2) 4^x \cdot 3^{x+1} = 0,25 \cdot 12^{3x-1};$$

3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8};$

5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1};$

4) $0,25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0,25 \cdot 4^{2x}};$

6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}.$

2.8. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x};$

3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1};$

2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27};$

4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}.$

2.9. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56;$

2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10;$

3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354;$

4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228;$

5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33;$

6) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5;$

7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47;$

8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}.$

2.10. Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31;$

2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17;$

3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9;$

4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36;$

5) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246;$

6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}.$

2.11. Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0;$

4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3;$

2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10;$

5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28;$

3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3;$

6) $\frac{9}{2^x-1} - \frac{21}{2^x+1} = 2.$

2.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0;$

4) $4^{x+0,5} - 7 \cdot 2^x = 4;$

2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0;$

5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2;$

3) $5^x - 0,2^{x-1} = 4;$

6) $\frac{5}{3^x-6} + \frac{5}{3^x+6} = 2.$

2.13.* Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

2.14.* Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

2.15. Розв'яжіть рівняння:**

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

2.16. Розв'яжіть рівняння:**

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

2.17. Розв'яжіть рівняння:**

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0.5} = 0$;

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

2.18. Розв'яжіть рівняння:**

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19. Розв'яжіть рівняння** $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

2.20. Розв'яжіть рівняння** $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

2.21. Розв'яжіть рівняння** $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 4$.

2.22. Розв'яжіть рівняння** $(\sqrt{4 + \sqrt{15}})^x + (\sqrt{4 - \sqrt{15}})^x = 8$.

2.23. Розв'яжіть рівняння:**

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.

2.24.** При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a+1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

2.25.** При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

2.26.** При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x - (a+1) \cdot 2^x + 2a - 2 = 0$$

має два різних корені?

2.27.** Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x = 3 - x$;

3) $7^{6-x} = x + 2$;

2) $3^x + 4^x = 5^x$;

4) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

2.28.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 11 - x$;

3) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100$;

2) $8^{5-x} = x + 4$;

4) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

2.29.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3) = 0$$

має два різних корені?

2.30.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x} - a)(2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16) = 0$$

має два різних корені?

2.31.* Розв'яжіть рівняння $4^x - (19 - 3x) \cdot 2^x + 34 - 6x = 0$.

2.32.* Розв'яжіть рівняння $9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.33. Чому дорівнює сума цілих розв'язків нерівності $\frac{(x+4)f'(x)}{x-6} \leq 0$, де $f(x) = x^3 - 12x + 9$?

2.34. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leq 0$, якщо $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$.

2.35. Якого найменшого значення може набувати вираз $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$?

3. Показникові нерівності

Нерівності $0,2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами показникових нерівностей.

Під час розв'язування багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 3.1. При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.

Справедливість цієї теореми впливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < (0,5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2} і 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

$$\text{Звідси } 3x < -1; x < -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right). \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

$$\text{Звідси } 2^{2x-4} (2^4 - 2^2 + 1) > 52; 2^{2x-4} \cdot 13 > 52;$$

$$2^{2x-4} > 4; 2^{2x-4} > 2^2; 2x - 4 > 2; x > 3.$$

$$\text{Відповідь: } (3; +\infty). \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$;

$$2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0; \quad 2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$$

Нехай $2^{-x} = t$. Тоді $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2} < t < 4$. Звідси

$$-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4.$$

Оскільки $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всіх x . Тому достатньо розв'язати нерівність $2^{-x} < 4$. Маємо: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Відповідь: $(-2; +\infty)$. ◀

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0$.

Розв'язання. Маємо: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0$. Оскільки $5^{2x} > 0$ при будь-якому x , то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x} , отримуємо рівносильну нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$.

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\begin{cases} t > 1, \\ t < -2. \end{cases}$ Звідси:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{cases}$$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$. ◀

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$.

Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◀



1. Наведіть приклади показникових нерівностей.
2. Яка нерівність впливає з нерівності $a^{x_1} > a^{x_2}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?
3. Якій нерівності рівносильна нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

3.1.° Чи рівносильні нерівності:

- 1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x+4 > x-1$;
- 2) $0,9^{x^2-4} < 0,9^{x+2}$ і $x^2-4 < x+2$?

3.2.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
- 2) $5^x < \frac{1}{5}$;
- 3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
- 4) $0,4^{6x+1} \geq 0,4^{2x+5}$;
- 5) $2^{x^2-1} < 8$;
- 6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
- 7) $0,3^{4x-8} > 1$;
- 8) $0,1^{3x-1} < 1000$;
- 9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3.° Розв'яжіть нерівність:

- 1) $6^{7x-1} > 6$;
- 2) $10^x < 0,001$;
- 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
- 4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
- 5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
- 6) $0,2^{2x-9} < 1$.

3.4.° Скільки цілих розв'язків має нерівність:

- 1) $0,2 \leq 5^{x+4} \leq 125$;
- 2) $\frac{1}{36} \leq 6^{3-x} < 6$;
- 3) $2 < 0,5^{x-1} \leq 32$?

3.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

- 1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;
- 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leq 16$.

3.6.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x};$$

$$2) f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}.$$

3.7.° Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16};$$

$$2) f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}.$$

3.8.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5;$$

$$4) \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^{x-0,5} > \sqrt{2};$$

$$2) 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x};$$

$$5) \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leq \frac{9}{4};$$

$$3) 0,6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1;$$

$$6) 4 \cdot 0,5^{x(x+3)} \geq 0,25^{2x}.$$

3.9.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49};$$

$$3) 0,3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1;$$

$$2) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x};$$

$$4) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}.$$

3.10.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5;$$

$$4) \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geq 26;$$

$$2) 9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36;$$

$$5) 2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leq 650;$$

$$3) 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56;$$

$$6) \left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}.$$

3.11.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45;$$

$$3) 5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145;$$

$$2) \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3;$$

$$4) \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}.$$

3.12.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0;$$

$$4) 0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0;$$

$$2) 4^x + 2^{x+3} - 20 < 0;$$

$$5) 6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leq 0;$$

$$3) 49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leq 0;$$

$$6) 25^x + 5^x - 30 \geq 0.$$

3.13.* Розв'яжіть нерівність:

$$1) 9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leq 0;$$

$$3) \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0;$$

$$2) 2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geq 0;$$

$$4) 25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leq 0.$$

3.14.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0;$$

$$2) \frac{2^x - 1}{x - 1} > 0.$$

3.15.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) \frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geq 0;$$

$$2) \frac{5^x - 0,04}{5 - x} \geq 0.$$

3.16.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) 2^{3x+1} + 0,25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192;$$

$$2) 2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}.$$

3.17.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84; \quad 2) 2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leq 120.$$

3.18.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) 3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0;$$

$$3) 6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geq 0;$$

$$2) 2^{x+3} + 2^{1-x} < 17;$$

$$4) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leq \frac{6}{5}.$$

3.19.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$1) 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7;$$

$$2) 4^{1-x} - 0,5^{1-2x} \geq 1.$$

3.20.** Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$.

3.21.** Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leq 8$.

3.22.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0;$$

$$2) 5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geq 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}.$$

3.23.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0;$$

$$2) 2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geq 0.$$

3.24.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x;$$

$$2) 25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

3.25.** Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

3.26.** Розв'яжіть рівняння $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$.

3.27.** Розв'яжіть рівняння $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

3.28.** Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x > 6 - x$;

2) $5^x + 12^x < 13^x$.

3.29.** Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

3.30.** Розв'яжіть нерівність $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geq 0$.

3.31.** Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leq 0$.

3.32.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$$(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geq 0.$$

3.33.* Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність

$$(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leq 0.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.34. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{5}$?

3.35. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$, якщо $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

3.36. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \operatorname{tg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{5\pi}{48}$.

4. Логарифм і його властивості

Рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$ розв'язати легко. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці $A(x_0; 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0 .

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0 .

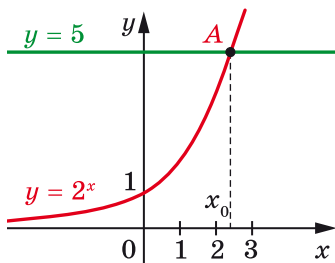


Рис. 4.1

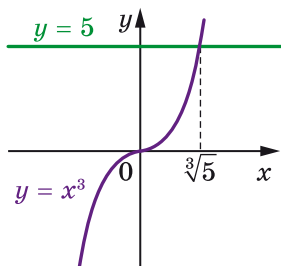


Рис. 4.2

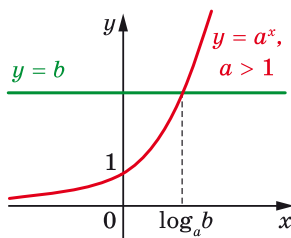


Рис. 4.3

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10 класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.2). Потреба називати й записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» і позначення $\sqrt[3]{5}$.

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа 5 з основою 2** та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leq 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.3). Його називають логарифмом числа b з основою a та позначають $\log_a b$.

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a , де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб отримати число b .

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ оскільки } 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ оскільки } 25^{\frac{1}{2}} = 5;$$

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ оскільки } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ оскільки } 100^0 = 1.$$

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$a^{\log_a b} = b$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0,3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c .

Дію знаходження числа c за даними числами a і b , де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a** . Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$, тому при $b \leq 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). *Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів*.

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◀

Теорема 4.2 (логарифм частки). Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Коротко формулюють: логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 4.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3 (логарифм степеня). Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$

Доведення. Розглянемо два вирази $a^{\log_a x^\beta}$ і $a^{\beta \log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$$a^{\beta \log_a x} = (a^{\log_a x})^\beta = x^\beta.$$

Отже, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Звідси за теоремою 4.1 отримуємо:

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x. \quad \blacktriangleleft$$

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 4.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$. $\blacktriangleleft$

Наслідок 1. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність

$$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a :

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta} \log_a b. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0,4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\frac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. $\blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2 \lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2 \lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2 \lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$
 $= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}$. $\blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. 1) Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. $\blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2} \log_{36} 9 + \frac{1}{3} \log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

$$\begin{aligned}
 2) \text{ Маємо: } \frac{1}{2} \log_{36} 9 + \frac{1}{3} \log_{36} 8 &= \frac{1}{2} \log_{36} 3^2 + \frac{1}{3} \log_{36} 2^3 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $f(x) = 5^{\log_5(x-3)}$.

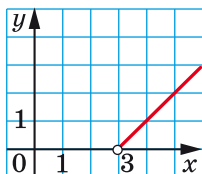


Рис. 4.4

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки $5^{\log_5(x-3)} = x - 3$ для всіх значень $x \in D(f)$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 4.4). $\blacktriangleleft$

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо: $\lg 56 = \lg(8 \cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 =$

$$= \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3 \lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba. \quad \blacktriangleleft$$



1. Що називають логарифмом?
2. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
3. Чому дорівнює $\log_a 1$? $\log_a a$?
4. Поясніть, що називають логарифмуванням числа b за основою a .
5. При яких значеннях a і b має зміст вираз $\log_a b$?
6. Сформулюйте теорему про логарифм добутку.
7. Сформулюйте теорему про логарифм частки.
8. Сформулюйте теорему про логарифм степеня.
9. Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

ВПРАВИ

4.1.° Чи є правильною рівність:

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|--|
| 1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3$; | 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; | 7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$; |
| 2) $\log_{25} 5 = 2$; | 5) $\log_{0,01} 10 = 2$; | 8) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$? |
| 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; | 6) $\lg 0,0001 = -4$; | |

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

- 1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

- 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

- 1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

- 1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

- 1) 1; 2) 10; 3) 100; 4) 1000; 5) 0,1; 6) 0,01; 7) 0,00001; 8) 0,000001.

4.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

- 1) 10; 2) 100; 3) $\sqrt{10}$; 4) 0,1; 5) 1000; 6) 0,0001?

4.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

- 1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_7 x = -1$; 4) $\log_2 x = 0$; 7) $\log_x 2 = 2$;
2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 5) $\log_x 9 = 2$; 8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.
3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 6) $\log_x 0,25 = -2$;

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;
2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6^x = 2$; 3) $0,4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;
2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0,3^{3x+2} = 7$.

4.12.° Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0,6^{5x-2} = 20$.

4.13.° Обчисліть значення виразу:

- 1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0,45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$; 4) $64^{0,5\log_2 12}$;

$$5) \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}; \quad 6) 6^{1+\log_6 5}; \quad 7) \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}; \quad 8) 6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}.$$

4.14.° Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{lll} 1) 3^{\log_3 \frac{1}{27}}; & 3) 4^{\log_2 9}; & 5) 10^{2+\lg 8}; \\ 2) 5^{\frac{1}{2}\log_5 49}; & 4) \left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}; & 6) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}. \end{array}$$

4.15.° Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \log_6 3 + \log_6 2; & 4) \log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56; \\ 2) \log_5 100 - \log_5 4; & 5) \frac{\log_5 64}{\log_5 4}; \\ 3) \log_{49} 84 - \log_{49} 12; & 6) 2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16. \end{array}$$

4.16.° Обчисліть значення виразу:

$$\begin{array}{ll} 1) \lg 8 + \lg 12,5; & 3) \frac{\log_7 125}{\log_7 5}; \\ 2) \log_3 162 - \log_3 2; & 4) 3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81. \end{array}$$

4.17.° Подайте:

- 1) число 2 у вигляді степеня числа 5;
- 2) число $\frac{1}{9}$ у вигляді степеня числа 10;
- 3) число $\sqrt{14}$ у вигляді степеня числа 7;
- 4) число 0,17 у вигляді степеня числа 18.

4.18.° Подайте:

- 1) число 3 у вигляді степеня числа 8;
- 2) число $\sqrt[3]{6}$ у вигляді степеня числа $\frac{1}{2}$.

4.19.° Подайте:

- 1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;
- 2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;
- 3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;
- 4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

4.20.° Подайте:

- 1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;
- 2) число -2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

4.21.* Обчисліть значення виразу:

- 1) $2^{3\log_2 5 + 4}$; 5) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$;
- 2) $8^{1-\log_2 3}$; 6) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$;
- 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$; 7) $\lg(25^{\log_5 0,8} + 9^{\log_3 0,6})$;
- 4) $7^{2\log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$; 8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.22.* Обчисліть значення виразу:

- 1) $2^{4\log_2 3 - 1}$; 4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_1 \frac{3}{6}}$; 7) $\log_{13} \left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3}\right)$;
- 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}$; 5) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$; 8) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$.
- 3) $8^{1 - \frac{1}{3}\log_2 12}$; 6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$;

4.23.* Обчисліть значення виразу:

- 1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$; 4) $\log_2 \sin 135^\circ$; 7) $\log_4 \sin \frac{\pi}{4}$;
- 2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$; 5) $\log_3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; 8) $\log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg}(-120^\circ)$.
- 3) $\log_9 \log_2 8$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} \cos 315^\circ$;

4.24.* Обчисліть значення виразу:

- 1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$; 3) $\log_6 \operatorname{tg} 225^\circ$;
- 2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$; 4) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

4.25.* Знайдіть x , якщо:

- 1) $\log_7 x = 2 \log_7 8 - 4 \log_7 2$;
- 2) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;
- 3) $\log_3 x = \frac{2}{3} \log_3 216 + \frac{1}{2} \log_3 25$;
- 4) $\lg x = \frac{2}{3} \lg 32 - \frac{1}{3} \lg 128 + 1$;
- 5) $\log_2 x = 3 \log_2 5 - 2 \log_2 25 - \lg 10$.

4.26.* Знайдіть x , якщо:

- 1) $\log_a x = 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$; 3) $\lg x = \frac{2}{5} \lg 32 - \frac{1}{3} \lg 64 + 1$.
- 2) $\log_a x = \frac{1}{4} \log_a 16 + 3 \log_a 0,5$;

4.27.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{\log_7 27 - 2 \log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0,2}; \quad 2) \frac{\log_9 125 + 3 \log_9 2}{\log_9 1,2 - \log_9 12}.$$

4.28.* Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{3 \lg 4 + \lg 0,5}{\lg 9 - \lg 18}; \quad 2) \frac{\lg 625 - 8 \lg 2}{\frac{1}{2} \lg 256 - 2 \lg 5}.$$

4.29.* Обчисліть значення виразу:

$$1) \log_7 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin \frac{\pi}{5}} 49; \quad 2) \log_3 \cos^2 \frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos \frac{\pi}{9}} 9.$$

4.30.* Спростіть вираз:

$$1) \log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3; \quad 2) \log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8.$$

4.31.** Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2} \log_5 4} + 36 \log_2 \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2}}.$

4.32.** Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3} \log_6 27} - 12 \log_7 \sqrt[5]{7^4 \sqrt{7}}.$

4.33.** Спростіть вираз $\frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}.$

4.34.** Спростіть вираз $\frac{\log_a ab (\log_b a - 1 + \log_a b)}{1 + \log_a^3 b}.$

4.35.** Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}} (7 - 4\sqrt{3})$ є цілим числом.

4.36.** Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}} (9 + 4\sqrt{5})$ є цілим числом.

4.37.** При яких значеннях x є правильною рівність:

$$1) \log_2 (1 - x^2) = \log_2 (1 - x) + \log_2 (1 + x);$$

$$2) \lg \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lg (x^2 - 2x + 1) - \lg (x^2 + 1);$$

$$3) \log_5 (x^2 - 4x + 4) = 2 \log_5 (2 - x);$$

$$4) \log_5 (x^2 - 4x + 4) = 2 \log_5 |x - 2|?$$

4.38.** Чому дорівнює значення виразу:

$$1) \lg \sin 1^\circ \cdot \lg \sin 2^\circ \cdot \lg \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \lg \sin 89^\circ \cdot \lg \sin 90^\circ;$$

$$2) \lg \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 15^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 20^\circ \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 75^\circ \cdot \lg \operatorname{tg} 80^\circ;$$

$$3) \lg (\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 34^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ);$$

$$4) \lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 88^\circ + \lg \operatorname{tg} 89^\circ?$$

4.39.** Спростіть вираз $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9$.

4.40.** Обчисліть значення виразу $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.41.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \lg \operatorname{tg} x + \lg \operatorname{ctg} x$;

6) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

2) $y = \log_x 1$;

7) $y = y = \frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

3) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x} (3-x)^4$;

4) $y = 5^{-\log_5 x}$;

9) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

5) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

4.42.** Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;

5) $y = \frac{\lg(x^2 + 1)}{\lg(x^2 + 1)}$;

2) $\frac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$;

6) $y = x^{\log_x 2x}$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;

7) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;

4) $y = \log_x x$;

8) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \frac{1}{3}$.

4.43.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy = \lg x + \lg y$;

3) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg |x| + 2 \lg |y|$;

2) $\lg xy = \lg(-x) + \lg(-y)$;

4) $\log_{x^2} y^2 = \log_x (-y)$.

4.44.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg \frac{x}{y} = \lg(-x) - \lg(-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2 = \log_x y$.

2) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2 \lg x + 2 \lg(-y)$;

4.45.** Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

4.46.** Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

4.47.** Доведіть, що $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

4.48.** Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

4.49.** Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

4.50.* Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$; 2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

4.51.* Знайдіть $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.52. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\sin 75^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 255^\circ}$; 2) $\frac{\cos 15^\circ - \cos 105^\circ}{\cos 315^\circ}$.

4.53. Спростіть вираз $\left(\frac{a^{0,5} + 3b^{0,5}}{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b} + \frac{a^{0,5} - 3b^{0,5}}{a - b} \right) \cdot \frac{a^{0,5} - b^{0,5}}{2}$.

4.54. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$; 2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$.

5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a , відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке, що $y = \log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

☞ Це означає, що областю значень логарифмічної функції є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції $y = a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

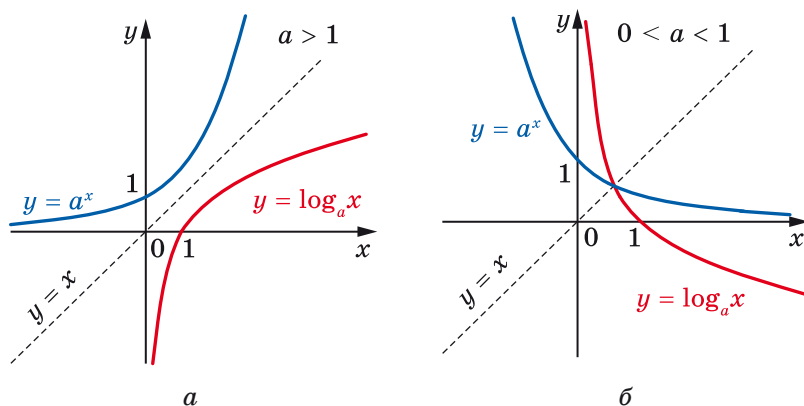


Рис. 5.1

- ☞ Функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль $x = 1$.
- ☞ Функція $y = \log_a x$ має два проміжки знакосталості.
Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$; $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$;
якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$.

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція $y = a^x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.

- ☞ Тому функція $y = \log_a x$ є зростаючою при $a > 1$ та спадною при $0 < a < 1$.
- ☞ Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a > 1$) або спадною (при $0 < a < 1$), то вона не має точок екстремуму.

Ви знаєте, що коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y = a^x$ є неперервною.

- ☞ Тому функція $y = \log_a x$ є неперервною.
- ☞ Логарифмічна функція є диференційовною. Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.
- ☞ Графік функції $y = \log_a x$ має вертикальну асимптоту $x = 0$, коли x прямує до нуля справа.

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Якщо припустити, що $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ є зростаючою. Тому $\log_a 5 > \log_a 4$. Але за умовою це не так. Отже, $a < 1$. ◀

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

$$1) f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x); \quad 2) f(x) = \frac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}; \quad 3) f(x) = \log_{x-4}(16 - x).$$

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.

Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases} \begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 5.2, до-

ходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності

$$\begin{cases} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{cases}$$

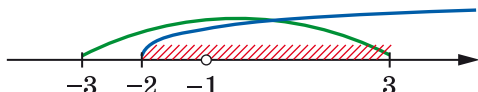


Рис. 5.2

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases} \begin{cases} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{cases}$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◀

ПРИКЛАД 3 Порівняйте: 1) $\log_2 6$ і $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_6 7$ і $\log_7 6$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і -2 .

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_2 x$ є зростаючою, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

5) Маємо: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$. Оскільки $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то

$\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◀



1. Яку функцію називають логарифмічною?
2. Яка область визначення логарифмічної функції?
3. Яка область значень логарифмічної функції?
4. До якої функції є оберненою функція $y = \log_a x$?
5. Яке взаємне розміщення графіків функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$?
6. Скільки нулів має логарифмічна функція?
7. При яких значеннях аргументу функція $y = \log_a x$, де $a > 1$, набуває додатних значень? Від'ємних значень?
8. При яких значеннях аргументу функція $y = \log_a x$, де $0 < a < 1$, набуває додатних значень? Від'ємних значень?
9. Зростаючою чи спадною є функція $y = \log_a x$ при $a > 1$? при $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

5.1.° Зростаючою чи спадною є функція:

- 1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{0,1} x$; 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
- 2) $y = \log_3 x$; 4) $y = \lg x$; 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$; 8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

5.2.° Спираючись на яку властивість логарифмічної функції можна стверджувати, що:

- 1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Порівняйте:

- 1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$; 4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ і $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
- 2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$; 5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$;
- 3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$; 6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ і $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

5.4.° Порівняйте:

- 1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ і $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
- 2) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$; 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ і $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

- 1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$; 3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
- 2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$; 4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.6.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$; 2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.7.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_{\pi} 3$?

5.8.° Порівняйте з нулем:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.9.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$; 3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;

5.10.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$; 2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.11.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?

5.12.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює -1, а найменше дорівнює -2?

5.13.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3(x+1)$; 5) $f(x) = \log_5(x^2+x+1)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)$; 6) $f(x) = \log_{0,6}(5x-6-x^2)$;

3) $f(x) = \log_4(-x)$; 7) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg(2-x)$;

4) $f(x) = \lg x^2$; 8) $f(x) = \log_2 \frac{2x-3}{x+7}$.

5.14.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_7(6-x)$;

4) $f(x) = \log_{0,4}(7x-x^2)$;

2) $f(x) = \log_{12}|x|$;

5) $f(x) = \lg(x+2) - 2 \lg(x+5)$;

3) $f(x) = \lg(x^2-1)$;

6) $f(x) = \lg \frac{2x+1}{x-1}$.

5.15.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій

$y = \log_2 x$ і $y = \log_2 \frac{1}{x}$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

5.16.° Побудуйте на одній координатній площині графіки функцій $y = \log_3 x$ і $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Яке взаємне розміщення побудованих графіків?

5.17.* Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3 ;

3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6 ;

2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2 ;

4) $\log_{16} 0,1$ і $-\frac{3}{4}$.

5.18.* Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1 ; 2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

5.19.* Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.20.* Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.21.* Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$;

3) $\log_{0,7} 0,8$ і $\log_{0,8} 0,7$;

2) $\log_{1,5} 1,3$ і $\log_{1,3} 1,5$;

4) $\log_{0,2} 0,1$ і $\log_{0,1} 0,2$.

5.22.* Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1,8$ і $\log_{1,8} 1,7$;

2) $\log_{0,2} 0,3$ і $\log_{0,3} 0,2$.

5.23.* Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{1}{\lg x}$;

3) $f(x) = \log_2 \cos x$;

2) $f(x) = \frac{4}{\log_5 (10 - x)}$;

4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.24.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{5}{\lg (x + 3)}$;

2) $y = \lg \sin x$.

5.25.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;

3) $y = \log_2 x - 1$;

5) $y = -\log_2 x$;

2) $y = \log_2 (x + 3)$;

4) $y = \log_2 x + 3$;

6) $y = \log_2 (-x)$.

5.26.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$;

3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;

5) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$;

6) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.27.* Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0,5$.

5.28.* Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.29.* Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.30.* Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.31.* Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

5.32.* Доведіть, що $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \frac{1}{3} < -2$.

5.33.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$; 6) $y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)$;
 2) $y = \lg(1 - \sin x)$; 7) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;
 3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1+x^2)}$; 8) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$;
 4) $y = \sqrt{\lg \cos x}$; 9) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$;
 5) $y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6-x}$; 10) $y = \log_{x+3}(x^2+x)$.

5.34.* Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\lg(x^2+1)}$; 6) $y = \lg(10x - x^2) - \frac{1}{\lg(8-x)}$;
 2) $y = \lg(1 + \sin x)$; 7) $y = \frac{x}{\lg(4-x^2)}$;
 3) $y = \sqrt{\lg(1+x^2)}$; 8) $y = \lg(9x - x^2) - \frac{1}{\lg(5-x)}$;
 4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$; 9) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$;
 5) $y = \lg(x+8) - \frac{5}{\lg(-x-1)}$; 10) $y = \sqrt{\frac{(x+5)(2-x)}{\lg(x^2+1)}}$.

5.35.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left| \log_{\frac{1}{2}} x \right|;$$

$$3) y = \frac{\left| \log_{0,2} x \right|}{\log_{0,2} x};$$

$$2) y = \log_{\frac{1}{2}} \left| x \right|;$$

$$4) y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3.$$

5.36.** Побудуйте графік функції:

$$1) y = \left| \log_3 x \right|;$$

$$2) y = \log_3 \left| x \right|;$$

$$3) y = \frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}.$$

5.37.** Знайдіть найбільше значення функції:

$$1) y = \log_{0,1} (x^2 + 100);$$

$$2) y = \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 6x + 14).$$

5.38.** Знайдіть найменше значення функції:

$$1) y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + 8};$$

$$2) y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2 - 4x + 7}.$$

5.39.** Дослідіть на парність функцію $y = \lg(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

5.40.** Дослідіть на парність функцію $y = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.41. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x^2 + 15} = x + 1;$$

$$4) \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0;$$

$$2) \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2;$$

$$5) 3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0;$$

$$3) \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0;$$

$$6) \cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0.$$

6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням**.

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 6.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b . Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

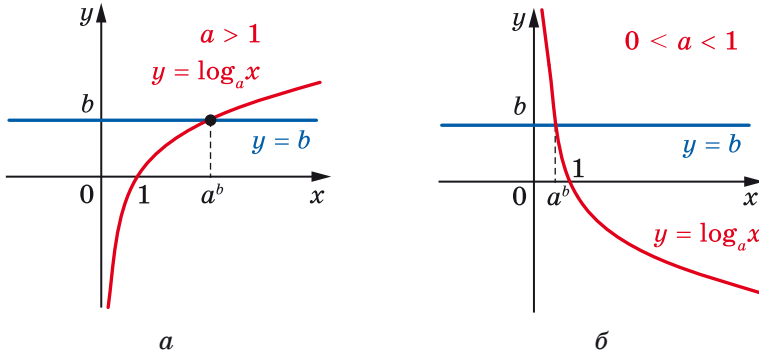


Рис. 6.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\log_3(3x - 1) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \frac{10}{3}$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$. ◀

Розв'язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$.

Під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 6.1. Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Якщо $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$, і навпаки, якщо $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ і $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2$.

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 2.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. Нехай $a > 0$, $a \neq 1$. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) > 0$ чи $g(x) > 0$, розв'язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть наслідок з теореми 6.1 самостійно.

Тепер розв'язання рівняння прикладу 1 можна подати й так:

$$\log_3(3x - 1) = 2 \log_3 3;$$

$$\log_3(3x - 1) = \log_3 3^2;$$

$$3x - 1 = 3^2; \quad x = \frac{10}{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\lg(x^2 - 4x + 2) = \lg(2x - 3)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

$$\text{Маємо: } \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x = 5, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси } x = 5.$$

Відповідь: 5. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

$$\text{Звідси } (2x - 1)(x - 2) = 3^3; \quad 2x^2 - 5x - 25 = 0; \quad x = 5 \text{ або } x = -\frac{5}{2}.$$

Легко переконатися, що число $-\frac{5}{2}$ не є коренем даного рівняння (не входить до його області визначення), а число 5 є коренем даного рівняння.

Таким чином, дане рівняння розв'язано методом наслідків.

Відповідь: 5. ◀

Звернемо увагу, що зроблений під час розв'язання прикладу 3 перехід від рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ до рівняння $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Справді, область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є про-

міжок $(2; +\infty)$. Замінивши вираз $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2)$ на вираз $\log_3((2x - 1)(x - 2))$, ми розширили область визначення початко-

вого рівняння, оскільки область визначення рівняння $\log_3((2x-1) \times (x-2)) = 3$ задається нерівністю $(2x-1)(x-2) > 0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2; +\infty)$ до множини $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\frac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3(2x-1) + \log_3(x-2) = 3$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \log_3((2x-1)(x-2)) = 3, \\ 2x-1 > 0, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} (2x-1)(x-2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Отримуємо ту саму відповідь: $x = 5$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Нехай $\log_2 x = t$. Тоді отримуємо: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

$$\text{Звідси } \begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases} \quad \text{Отже, } \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{cases}$$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності $\begin{cases} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{cases}$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $\sqrt{2}; 4$. 

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = 10^{2 + \lg x}$.

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = \lg 10^{2 + \lg x}.$$

$$\text{Далі маємо: } \frac{\lg x + 2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x.$$

$$\text{Нехай } \lg x = t. \quad \text{Тоді } \frac{(t+2)t}{3} = 2 + t. \quad \text{Звідси } \begin{cases} t = -2, \\ t = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \lg x = -2, \\ \lg x = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10^{-2}, \\ x = 10^3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0,01, \\ x = 1000. \end{cases}$$

Відповідь: 0,01; 1000. ◀

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2 \log_3(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0. \quad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2 \log_3(x-2) + 2 \log_3(x-4) = 0 \quad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2; 4) \cup (4; +\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4; +\infty)$. Отже, такий перехід звужує область визначення початкового рівняння на множину $(2; 4)$, яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2 \log_3(x-2) + 2 \log_3|x-4| = 0.$$

$$\text{Звідси } \log_3(x-2) + \log_3|x-4| = 0.$$

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} 2 < x < 4, \\ \log_3(x-2) + \log_3(4-x) = 0, \\ x > 4, \\ \log_3(x-2) + \log_3(x-4) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Далі маємо: } \begin{cases} 2 < x < 4, \\ \log_3((x-2)(4-x)) = 0, \\ x > 4, \\ \log_3((x-2)(x-4)) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x < 4, \\ (x-2)(4-x) = 1, \\ x > 4, \\ (x-2)(x-4) = 1; \end{cases}$$

$$\left[\begin{cases} 2 < x < 4, \\ x^2 - 6x + 9 = 0, \end{cases} \left[\begin{cases} 2 < x < 4, \\ x = 3, \end{cases} \left[\begin{cases} x = 3, \\ x = 3 + \sqrt{2}. \end{cases} \right. \right. \\ \left[\begin{cases} x > 4, \\ x^2 - 6x + 7 = 0; \end{cases} \left[\begin{cases} x > 4, \\ x = 3 - \sqrt{2}, \\ x = 3 + \sqrt{2}; \end{cases} \right. \right. \\ \left. \left. \left[\begin{cases} x = 3, \\ x = 3 + \sqrt{2}. \end{cases} \right. \right. \right.$$

Відповідь: 3; $3 + \sqrt{2}$. ◀

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$.

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2 \log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді отримаємо: $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3$.

Звідси $t = 2$ або $t = -\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 x = -\frac{1}{3}; \end{cases} \left[\begin{cases} x = 2^2, \\ x = 2^{-\frac{1}{3}}. \end{cases} \right. \right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$. ◀

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\log_7 (x + 8) = -x$.

Розв'язання. Розглянемо функції $f(x) = \log_7 (x + 8)$ і $g(x) = -x$. Функція f є зростаючою, функція g — спадною. Тоді рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня. Оскільки $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — єдиний корінь даного рівняння.

Відповідь: -1. ◀

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2} \log_3 (x - 2)} = 0$.

Розв'язання. Помилково вважати, що рівняння виду

$f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{matrix} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{matrix} \right.$ При такому

переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x) = 0$ належать області визначення функції g .

Насправді рівняння $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню

$$\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3(x - 2) = 0 :$$

$$\begin{cases} \log_3(x - 2) = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ x > 2, \\ \sin x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 6.2), то $x = 3$ не є коренем початкового рівняння.

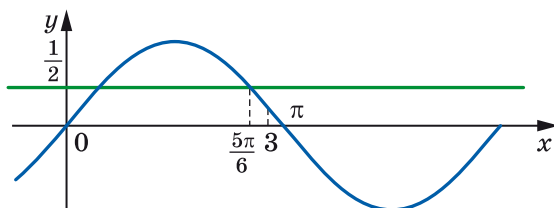


Рис. 6.2

Усі числа виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, є коренями другого рівняння сукупності. Серед них потрібно вибрати лише ті, які задовольняють умову $x > 2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. ◀

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y). \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:
$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}} = 2^5, \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи випливає, що $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$. Звідси $\frac{x}{y} = 2$ або $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем.

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1. \end{cases}$$

Маємо: $\log_3 y + \log_3 3y = 1$; $\log_3 y + (\log_3 3 + \log_3 y) = 1$; $2\log_3 y = 0$; $y = 1$. Тоді $x = 2$.

$$2) \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ \log_3(x - y) + \log_3(x + y) = 1. \end{cases}$$

Легко переконатися (зробіть це самостійно), що ця система розв'язків не має.

Відповідь: (2; 1). ◀



1. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним рівнянням?
2. Скільки коренів має найпростіше логарифмічне рівняння?
3. Яка рівність випливає з рівності $\log_a x_1 = \log_a x_2$?
4. Якщо додатні числа x_1 і x_2 рівні, то яким співвідношенням пов'язані вирази $\log_a x_1$ і $\log_a x_2$?
5. Якій системі рівносильне рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?

ВПРАВИ

6.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(x - 1) = 1$;

4) $\log_{\frac{1}{6}}(4x - 8) = -2$;

2) $\log_3(2x + 1) = 3$;

5) $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$;

3) $\lg(3 - 2x) = 2$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+7) = -3$;

3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5x - 3) = 2$;

2) $\log_4(2x - 5) = 0,5$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\pi}(x+1) = \log_{\pi}(4x-5)$;

3) $\lg(x^2 + 2) = \lg(3x + 6)$.

2) $\log_5(3x-5) = \log_5(x-3)$;

6.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9(4x-6) = \log_9(x-2)$;

2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2+5)$.

6.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;

4) $\log_7 \log_4(x-2) = 0$;

2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

5) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

3) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;

6.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$.

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

6.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(3^{5x-3} + 1) = 2$;

3) $\log_2(2^x + 7) = 3 - x$;

2) $\log_3(3^{x-1} + 6) = x$;

4) $\log_6(6^{-x} - 5) = x + 1$.

6.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(6^{x+1} - 30) = x$;

2) $\log_5(6 - 5^x) = 1 - x$.

6.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;

2) $\log_4(x-1) = \log_4(x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0,5}(x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5}(x - 2)$;

4) $\log_6(x^2 - x - 2) = \log_6(2 - x)$;

5) $2 \log_{0,4} x = \log_{0,4}(2x^2 - x)$;

6) $2 \log_7(-x) = \log_7(x + 2)$;

7) $2 \log_8(1 - x) = \log_8(2,5x + 1)$;

8) $2 \log_3 x = 1 + \log_3(x + 6)$.

6.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(9 - x^2) = \log_6(1 - 2x)$;

2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$;

$$3) \log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2 \log_{0,7}(x + 2);$$

$$4) 2 \log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1.$$

6.11.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2} \log_6(5x + 1) = \log_6(x - 1);$$

$$2) \log_5(25^x - 2 \cdot 5^x) = 2 \log_{25} 15;$$

$$3) \log_{\sqrt{5}}(16^x - 6) = 2 + \log_{\sqrt{5}}(4^x - 2);$$

$$4) x \lg 3 - 1 = 2 \lg 3 - \lg(3^x + 1).$$

6.12.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2} \log_{0,1}(2x + 3) - \log_{0,1}(2x - 3) = 0;$$

$$2) \log_3(2^{2x} + 2^x) = 2 \log_9 12;$$

$$3) x - \lg 5 = x \lg 5 + 2 \lg 2 - \lg(1 + 2^x).$$

6.13.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_4(x - 3) + \log_4 x = 1;$$

$$2) \log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1;$$

$$3) \lg(x - 2) + \lg(x - 3) = 1 - \lg 5;$$

$$4) \log_3(2x - 1) + \log_3(x - 4) = 2;$$

$$5) \lg \sqrt{5x - 4} + \lg \sqrt{x + 1} = 2 + \lg 0,18;$$

$$6) \lg(x - 1) + \lg(x - 3) = \lg(1,5x - 3);$$

$$7) \log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2);$$

$$8) 2 \log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17).$$

6.14.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_7 x + \log_7(x + 6) = 1;$$

$$2) \log_3(5 - x) + \log_3(3 - x) = 1;$$

$$3) \log_{\frac{1}{2}}(4x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = \log_{0,5} 3,5;$$

$$4) \log_{0,6}(x + 2) + \log_{0,6}(6 - x) = \log_{0,6}(x + 8);$$

$$5) \log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1);$$

$$6) 2 \lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5).$$

6.15.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_3(5^x + 2) + \log_3(5^x - 1) = 2 + \log_3 2;$$

$$2) \log_2(2^x + 3) + \log_2(5 - 2^x) = 4.$$

6.16.* Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_{\sqrt{3}}(2^x - 3) + \log_{\sqrt{3}}(2^x - 1) = 2;$$

$$2) \lg(3^x - 4) + \lg(3^x - 2) = 1.$$

6.17.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 = 0$;

4) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

5) $2 \log_{\frac{1}{6}} x + 3 \sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x} - 5 = 0$;

3) $\lg^2 x - 2 \lg x^2 + 3 = 0$;

6) $\frac{2}{\lg(x+2)-3} + \frac{4}{\lg(x+2)+1} = 1$.

6.18.* Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \log_8^2(-x) - 2 \log_8(-x) - 1 = 0$;

3) $3 \log_3 x + 3 \log_x 3 = 10$;

2) $2 \log_7 2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;

4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$.

6.19.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \lg x}{\lg(8x-7)} = 1$;

4) $\log_{x+1}(x+3) = 2$;

2) $\frac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0$;

5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16) = 2$.

3) $\log_x(2x^2-7x+12) = 2$;

6.20.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2 \log_2 x}{\log_2(3-2x)} = 1$;

4) $\log_x(x+6) = 2$;

2) $\frac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)} = 0$;

5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3) = 2$.

3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$;

6.21.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(x-5)^2 - 2 \log_2(x+2) = 2$; 2) $\frac{1}{2} \lg x^2 + \lg(x+7) = 1$.

6.22.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{4} \log_2 x^4 + \log_2(x+10) = 3 + \log_2 3$;

2) $\frac{1}{2} \log_6 x^2 + \log_6(5-x) = 1$.

6.23.** Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3 + 4 \log_3 x - 5 = 0$;

5) $\lg^2(100x) + 2 \lg x = 20$;

2) $\lg(10x^2) \cdot \lg x = 1$;

6) $\log_5^2(5x) + \log_5 \frac{x}{25} = 3$;

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = 2$;

7) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 0$;

4) $\log_2(4x) \cdot \log_2(0,25x) = 5$;

8) $2 \lg(\lg x) = \lg(2 \lg x + 8)$.

6.24.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$; 4) $\lg^2(10x) + \lg(10x) = 6 + 3 \lg x$;
 2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{27} + 4 = 0$; 5) $\log_6^2(36x) + \log_6 \frac{x^2}{216} = 8$;
 3) $\log_7(7x) \cdot \log_7 \frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$; 6) $\log_5(\log_2 x) + \log_5(\log_2 x^3 - 14) = 1$.

6.25.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^{\log_5 x} = 5$; 2) $x^{\lg x + 2} = 1000$; 3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$; 4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

6.26.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^{\log_3 x} = 81$; 3) $x^{\log_2 x - 2} = 256$;
 2) $x^{\lg x} = 100x$; 4) $(\sqrt[3]{x})^{\lg x} = 10^{6 + \lg x}$.

6.27.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$; 4) $3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2$;
 2) $3 \log_x 16 - 4 \log_{16} x = 2 \log_2 x$; 5) $2 \log_{4x} x^3 = 5 \log_{2x} x$;
 3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$; 6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0$.

6.28.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$;
 2) $5 \log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8 \log_{9x^2} x^2 = 2$;
 3) $\frac{2 - 4 \log_{12} 2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)}$;
 4) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{x-1}(x+1) = 3$.

6.29.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$; 3) $3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 = 0$.
 2) $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$;

6.30.** Доведіть, що при $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$ виконується рівність $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.**6.31.**** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^{\lg 5} + 5^{\lg x} = 250$; 2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18$.

6.32.** Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200$; 2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

6.33.** Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y - 3x) = \lg(4 - 4x + y); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

$$\begin{array}{ll}
 3) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases} & 5) \begin{cases} \log_3(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x-2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2}y; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases} & 6) \begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}
 \end{array}$$

6.34.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{array}{l}
 1) \begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x - 2y) = \lg(5 + x - 3y); \end{cases} \\
 2) \begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2; \end{cases} \\
 4) \begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases} \\
 5) \begin{cases} (x + y)3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5(x + y) = x - y. \end{cases}
 \end{array}$$

6.35.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_7(x + 8) = -x; \quad 2) \log_2^2 x + (x - 1) \log_2 x = 6 - 2x.$$

6.36.** Розв'яжіть рівняння:

$$1) \log_{\frac{1}{3}}(x - 5) = x - 9; \quad 2) \log_3^2 x + (x - 1) \log_3 x = 12 - 3x.$$

6.37.** Розв'яжіть рівняння $\lg^2(x + 1) = \lg(x + 1) \cdot \lg(x - 1) + 2 \lg^2(x - 1)$.

6.38.** Розв'яжіть рівняння

$$2 \lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1) \cdot \lg(2x + 1).$$

6.39.** Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{l}
 1) x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4; \\
 2) \lg \sqrt{1+x} + 3 \lg \sqrt{1-x} - 2 = \lg \sqrt{1-x^2}.
 \end{array}$$

6.40.** Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{l}
 1) x \log_{x+1} 5 \cdot \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1) = \frac{x-4}{x}; \\
 2) \log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2).
 \end{array}$$