

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

**ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ
НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ**

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія : початок вивчення на поглибл. рівні, проф.
рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої
освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полон-
ський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 240 с. : іл.
ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-000-0

© А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,
В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2019
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет,
художнє оформлення, 2019

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом оволодіватимете новими знаннями, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв’язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких радимо після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Держайте! Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^*	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
	закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи

Синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. МНОГОГРАННИКИ

- 1.** Призма
- 2.** Паралелепіпед
- 3.** Піраміда
- 4.** Площі поверхонь подібних многогранників.
Зрізана піраміда
- 5.** Тетраедр

- У цьому параграфі ви уточните й розширите свої знання про многогранники.
- Отримаєте нові відомості про призму, піраміду та їхні окремі види.
- Ознайомитеся з новим для вас многогранником — зрізаною пірамідою.

1. Призма

На рисунку 1.1 зображено знайомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

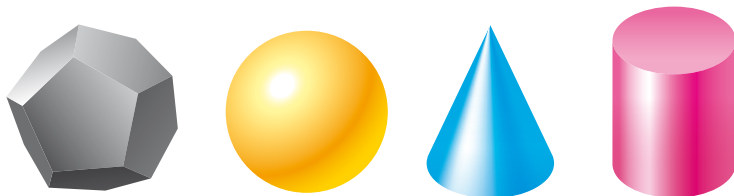


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур F і G , які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 53–59.

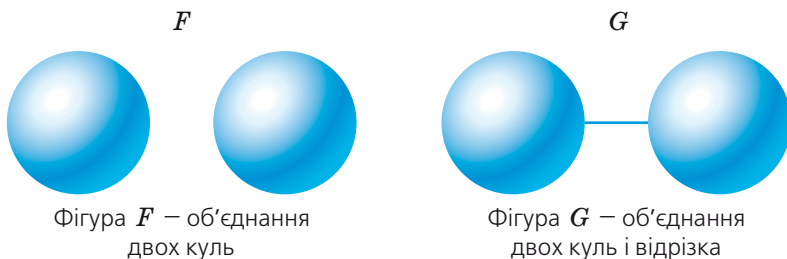


Рис. 1.2

Означення. **Многогранником** називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро $A_1 B_1$ у них спільне.

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині M** . Наприклад, на рисунку 1.3 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A .

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двограний кут з ребром AB , грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 1.4).

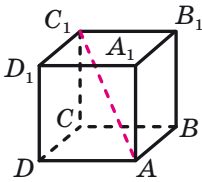


Рис. 1.3

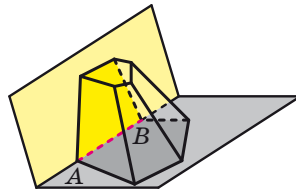


Рис. 1.4

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок AC_1 — діагональ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

Означення. Многогранник називають **опуклим**, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.5 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Однак навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.6).

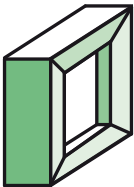


Рис. 1.5

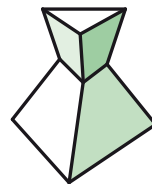
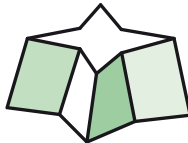
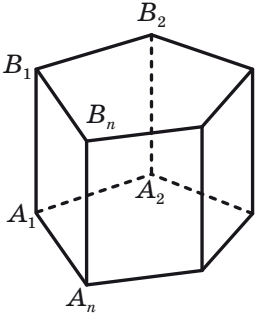
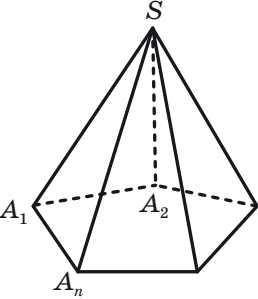


Рис. 1.6

Було підмічено, що кількості вершин B , ребер P і граней Γ опуклих многогранників підпорядковуються дивовижній закономірності:

$$B - P + \Gamma = 2. \quad (1)$$

Справді, розглянемо відомі вам опуклі многогранники та підрахуємо кількості їхніх вершин, ребер і граней. Маємо:

Многогранник	Кількість вершин, B	Кількість ребер, P	Кількість граней, Γ	$B - P + \Gamma$
	$2n$	$3n$	$n + 2$	2
	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	2

У 1750 р. видатний математик, академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер довів, що рівність (1) виконується для довільного опуклого многогранника. З того часу це твердження називають теоремою Ейлера.

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Зупинимось докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні n -кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають **n -кутною призмою**.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n -кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.7).

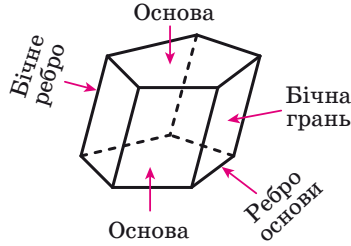


Рис. 1.7

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.8). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

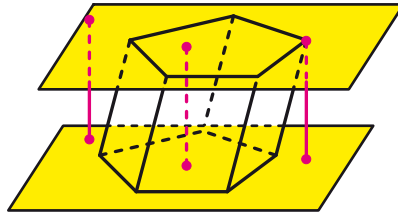


Рис. 1.8

Означення. Призму називають **прямою**, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. Призму називають **правильною**, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

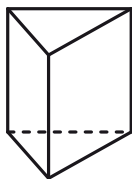


Рис. 1.9

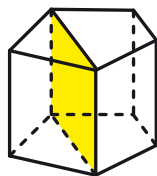
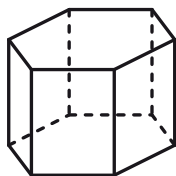


Рис. 1.10

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 1.9 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

Розглянемо опуклу n -кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 1.10). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а діагональним перерізом прямої призми — прямокутник (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\pi} = S_{\text{б}} + 2S_{\text{осн}},$$

де S_{π} — площа поверхні призми, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні призми, $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми.

Теорема 1.1. *Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.*

Доведення. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — довжини ребер основи призми, b — довжина бічного ребра. Тоді $S_{\text{б}} = a_1b + a_2b + \dots + a_nb = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◀

Твердження теореми 1.1 зручно подати у вигляді однієї з формул:

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot b,$$

$$S_{\text{б}} = P_{\text{осн}} \cdot h,$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра, h — довжина висоти призми.

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 1.11.

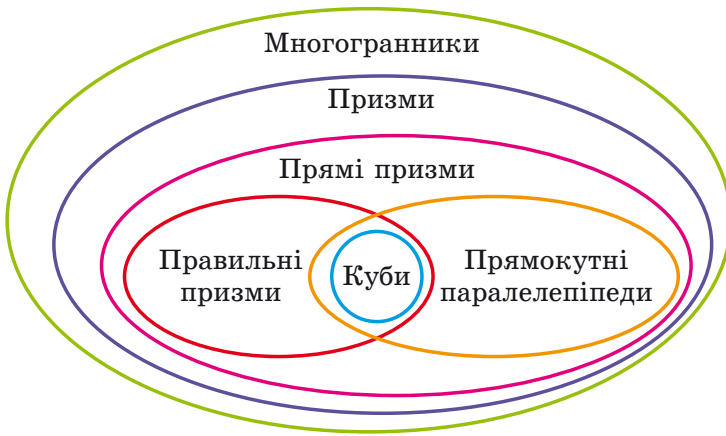


Рис. 1.11

Задача 1. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перерізу та бічного ребра.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших n -кутних призм, де $n > 3$, доведення буде аналогічним.

Нехай трикутник MNP — переріз, про який ідеться в умові задачі (рис. 1.12). Доведемо, що $S_6 = P_{MNP} \cdot AA_1$. Маємо: $AA_1 \perp MPN$. Отже, $AA_1 \perp MP$. Тоді відрізок MP — висота паралелограма AA_1B_1B . Аналогічно можна довести, що відрізки PN і NM — відповідно висоти паралелограмів CC_1B_1B і CC_1A_1A .

Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку висоти та сторони паралелограма, до якої проведено висоту, то можна записати:

$$S_6 = MP \cdot AA_1 + PN \cdot BB_1 + NM \cdot CC_1.$$

Оскільки $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то

$$\begin{aligned} S_6 &= MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 = \\ &= (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MNP} \cdot AA_1. \end{aligned}$$

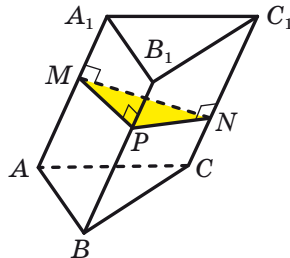


Рис. 1.12

Задача 2. Трикутник ABC , у якому $AB = 2\sqrt{19}$ см, $BC = 2$ см, $AC = 8$ см, є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.13). Знайдіть кут між прямими CB_1 і AC_1 , якщо висота призми дорівнює 4 см.

Розв'язання. Перший спосіб. Розмістимо поруч з даною трикутною призмою рівну їй призму $ABDA_1B_1D_1$ так, щоб утворилася пряма чотирикутна призма, основа якої — паралелограм (рис. 1.14). Оскільки $AD = B_1C_1$ і $AD \parallel B_1C_1$, то чотирикутник ADB_1C_1 — паралелограм. Звідси $AC_1 \parallel DB_1$. Отже, кут між прямими CB_1 і AC_1 дорівнює куту між прямими CB_1 і DB_1 .

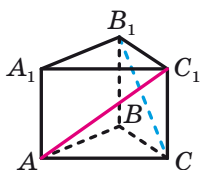


Рис. 1.13

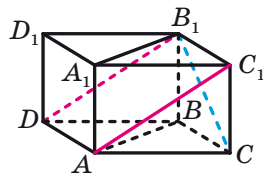


Рис. 1.14

За теоремою про властивість сторін і діагоналей паралелограма можна записати: $AB^2 + DC^2 = 2BC^2 + 2AC^2$.

Звідси $76 + DC^2 = 8 + 128$; $DC^2 = 60$.

Із трикутника DBB_1 маємо: $DB_1^2 = DB^2 + BB_1^2 = 64 + 16 = 80$.

Із трикутника CBB_1 маємо: $CB_1^2 = CB^2 + BB_1^2 = 4 + 16 = 20$.

До трикутника DB_1C застосуємо теорему косинусів: $DC^2 = DB_1^2 + CB_1^2 - 2DB_1 \cdot CB_1 \cos \angle DB_1C$.

Отримуємо: $60 = 80 + 20 - 2\sqrt{80}\sqrt{20} \cos \angle DB_1C$.

Звідси $\cos \angle DB_1C = \frac{1}{2}$. Таким чином, шуканий кут дорівнює 60° .

Другий спосіб. «Поставимо» на дану призму рівну їй призму $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ (рис. 1.15). Оскільки $CB_1 \parallel C_1B_2$, то шуканий кут дорівнює куту між прямими C_1A_1 і C_1B_2 . Знайшовши сторони трикутника AC_1B_2 , можна знайти косинус кута AC_1B_2 . Завершіть розв'язання самостійно. ◀

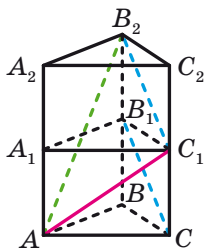


Рис. 1.15

Ви не раз бачили моделі многогранників, виготовлених із різних матеріалів — паперу, картону, фанери, пластмаси тощо (рис. 1.16).

Якщо таку модель розрізати по деяких ребрах і розгорнути на площину так, щоб утворилася модель многокутника, то цей многокутник називають розгорткою многогранника.

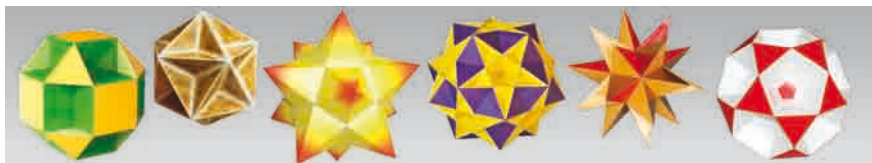


Рис. 1.16

У курсі математики 6 класу ви ознайомилися з розгортками прямокутного паралелепіпеда, зокрема куба.

На рисунку 1.17, а зображено многогранник, на рисунку 1.17, б — його розгортку. Зауважимо, що із цієї розгортки можна «склеїти», наприклад, і многогранник, зображений на рисунку 1.17, в. Тому якщо ми хочемо за розгорткою відновити многогранник, то потрібно мати схему її склеювання.

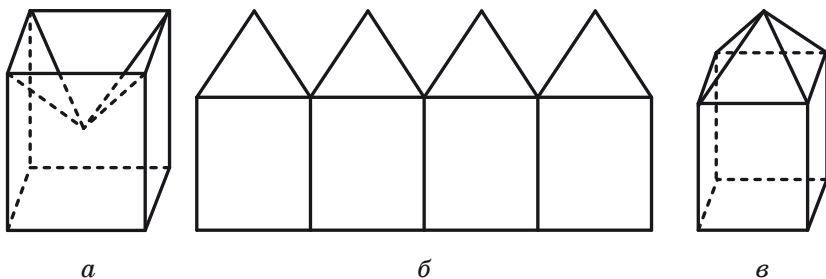


Рис. 1.17

Використання розгортки многогранника є ефективним методом розв'язування цілої низки задач, де потрібно знайти найменшу відстань по поверхні між двома точками многогранника.

Задача 3. На середині ребра B_1C_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ позначили точку M . Відомо, що $AB = \sqrt{3}$ см, $AA_1 = 2$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками A і M по поверхні призми.

Розв'язання. Зауважимо, що площина AA_1M є площиною симетрії правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.18).

Це зауваження дає змогу під час пошуку найменшої відстані між точками A і M по поверхні призми обмежитися розглядом ламаних трьох видів (рис. 1.19):

1) ламані AXM , де X — точка на відрізку CN , N — середина BC ;

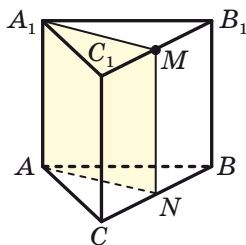


Рис. 1.18

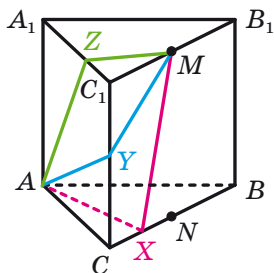


Рис. 1.19

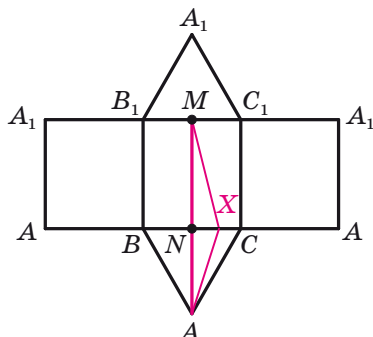


Рис. 1.20

2) ламані AYM , де Y — точка на ребрі CC_1 ;

3) ламані AZM , де Z — точка на ребрі A_1C_1 .

Виходитимемо з таких міркувань. Нехай точки X_0 , Y_0 і Z_0 такі, що ламані AX_0M , AY_0M і AZ_0M мають найменші довжини серед ламаних першого, другого та третього виду відповідно. Тоді найменша із цих трьох довжин і буде шуканою відстанню.

Знайти довжину ламаної AX_0M можна, розглянувши розгортку, зображену на рисунку 1.20.

Оскільки точки A , N і M лежать на одній прямій, то

$$AX + XM \geq AN + NM = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} \text{ см.}$$

Тут точка X_0 збігається з точкою N .

Для того щоб знайти довжини ламаних AY_0M і AZ_0M , розглянемо розгортки, зображені на рисунках 1.21 і 1.22.

Якщо точки A , Y_0 , M лежать на одній прямій, то $AY + YM \geq AM = AY_0 + Y_0M$ (рис. 1.21).

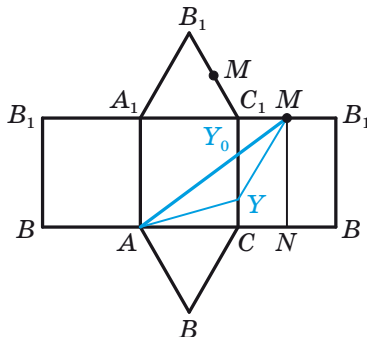


Рис. 1.21

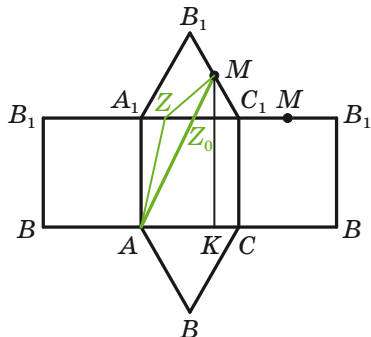


Рис. 1.22

Довжину ламаної AZ_0M можна знайти, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника ANM .

$$\text{Оскільки } MN = 2 \text{ см, } AN = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см, то } AM = \sqrt{4 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{43}}{2} \text{ см.}$$

Якщо точки A , Z_0 , M лежать на одній прямій, то $AZ + ZM \geq AM = AZ_0 + Z_0M$ (рис. 1.22).

Довжину ламаної AZ_0M знайдемо, обчисливши гіпотенузу прямокутного трикутника AKM , де точка K — основа перпендикуляра, опущеного з точки M на відрізок AC . Нескладно визначити (зробіть це самостійно), що $AK = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ см, $MK = \frac{11}{4}$ см.

$$\text{Тоді } AM = \sqrt{\frac{27}{16} + \frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{2} \text{ см.}$$

Залишається вибрати найменше із чисел: $\frac{7}{2}$, $\frac{\sqrt{43}}{2}$, $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{37}}{2}$ см. ◀

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри¹ Вороного—Діріхле (рис. 1.23) використовують для аналізу структури кристалів.

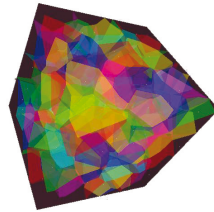


Рис. 1.23



Георгій Феодосійович Вороний

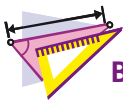
(1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов'язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об'єктом.

¹ Поліедром називають об'єднання многогранників.



1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Що називають двограним кутом многогранника?
4. Який многогранник називають опуклим?
5. Що називають n -кутною призмою?
6. Що називають висотою призми?
7. Яку призму називають прямою? похилою?
8. Яку призму називають правильною?
9. Що називають діагональним перерізом призми?
10. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
11. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?



ВПРАВИ

1.1.° Призма має 12 граней. Який многокутник лежить в її основі?

1.2.° Доведіть твердження: якщо дві сусідні грані призми перпендикулярні до площини її основи, то дана призма є прямою. Чи буде дане твердження правильним, якщо з його формулювання виключити слово «сусідні»?

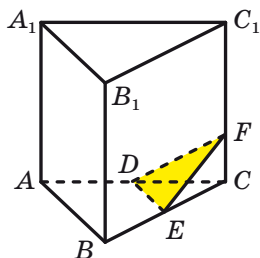


Рис. 1.24

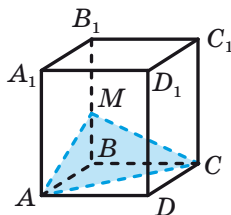


Рис. 1.25

1.3.° Доведіть, що в будь-якій призмі кількість вершин є парним числом, а кількість ребер — числом, кратним 3.

1.4.° Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.24). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут 30° , перетинає ребро CC_1 у точці F . Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

- 1.5.° Через діагональ AC основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут 45° і перетинає ребро BB_1 у точці M (рис. 1.25). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.
- 1.6.° У похилій чотирикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо даний переріз є ромбом зі стороною 5 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см.
- 1.7.° У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть бічне ребро призми, якщо даний переріз є прямокутним трикутником з катетами 9 см і 12 см, а площа бічної поверхні призми дорівнює 288 см^2 .
- 1.8.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить 30° . Знайдіть:
- 1) висоту призми;
 - 2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.
- 1.9.° Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a .
- 1.10.° Основа прямої призми — ромб зі стороною a та гострим кутом α . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β . Знайдіть діагоналі призми.
- 1.11.° Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.
- 1.12.* Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Через пряму CC_1 проведено площину, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає ребро AB у точці D . Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо $AD = 18 \text{ см}$, $BD = 2 \text{ см}$, а висота призми дорівнює 8 см.
- 1.13.* Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, відрізок CM — медіана трикутника ABC . Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі CC_1 і CM , якщо $AC = 30 \text{ см}$, $BC = 40 \text{ см}$.
- 1.14.* Кожне ребро правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a . Знайдіть:
- 1) площу перерізу призми, який проходить через точки A , B і C_1 ;
 - 2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.

- 1.15. Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Площина, яка проходить через пряму AC , утворює з площиною основи призми кут β і перетинає ребро BB_1 у точці D . Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.
- 1.16. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α , більша діагональ ромба дорівнює d . Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут β . Знайдіть:
- 1) висоту призми;
 - 2) площу утвореного перерізу призми.
- 1.17. Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 2 см, а бічне ребро — 6 см. Діагоналі бічної грані AA_1B_1B перетинаються в точці D . Знайдіть кут між прямою CD і площиною ABC .
- 1.18. Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 1 см, а бічне ребро — $\sqrt{5}$ см. Діагоналі бічної грані CC_1D_1D перетинаються в точці M . Знайдіть кут між прямою AM і площиною ABC .
- 1.19. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S . Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?
- 1.20. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.
- 1.21. Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, основи якої BC і AD відповідно дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2 . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні призми;
 - 2) площу перерізу призми, який проходить через ребра AD і B_1C_1 .
- 1.22. Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 288 см^2 . Знайдіть сторону основи та висоту призми.
- 1.23. Площини граней AA_1B_1B і AA_1C_1C похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярні, $AA_1 = 9$ см. Відстань між прямими AA_1 і BB_1 дорівнює 8 см, а між прямими AA_1 і CC_1 — 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- 1.24. Двогранний кут при одному з бічних ребер похилої трикутної призми дорівнює 120° . Відстань від даного ребра до одного з решти бічних ребер дорівнює 16 см, а до другого — 14 см.

Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 840 см^2 .

1.25.* Площа основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює S . Площа трикутника ABC_1 дорівнює S_1 . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.26.* У правильній призмі $ABCA_1B_1C_1$ площа трикутника ABC_1 дорівнює S . Площина ABC_1 утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.27.* Висота правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 6 см. Точки D і E — середини ребер A_1C_1 і B_1C_1 відповідно. Площина, яка проходить через прямі AB і DE , утворює кут 60° із площиною ABC . Знайдіть площу перерізу призми цією площиною.

1.28.* Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а висота призми — 6 см. Через діагональ основи проведено переріз призми, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу.

1.29.* Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h . У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює α .

1.30.* Висота правильної трикутної призми дорівнює h . Кут між діагоналями двох бічних граней, які мають спільний кінець, дорівнює α . Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі.

1.31.** Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a . Ребро AA_1 утворює з кожним із ребер AB і AC кут 45° .

1) Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.32.** Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a , проекцією точки A_1 на площину ABC є центр трикутника ABC .

1) Доведіть, що грань BB_1C_1C є прямокутником.

2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.33.** Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC = 10$ см і $AC = 12$ см. Бічне ребро призми дорівнює 4 см. Через ребро AC проведено переріз, що утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу цього перерізу.

1.34.** Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 4 см, бічне ребро — 3 см. Через ребро AB проведено переріз, який утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть площу цього перерізу.

- 1.35.* Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Проекцією вершини A_1 на площину ABC є середина ребра AC . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $AA_1 = 2$ см, $\angle A_1AC = 75^\circ$ і двогранний кут з ребром AA_1 дорівнює 60° .
- 1.36.* Висота правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює h . Знайдіть площу трикутника BA_1C , якщо $\angle BA_1C = \alpha$.
- 1.37.* Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). Проекцією вершини B_1 на площину ABC є вершина C . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо $BC = 1$ см, $\angle B_1BC = 45^\circ$ і двогранний кут з ребром BB_1 дорівнює 60° .
- 1.38.* Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90^\circ$), бічні грані призми, що містять ребра AC і BC , — квадрати. Знайдіть кут між прямими AC_1 і CB_1 .
- 1.39.* Основою прямої призми $ABCD A_1B_1C_1D_1$ є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть кут між прямими AB_1 і CD_1 , якщо $AA_1 = AB = BC = CD = 0,5 AD$.
- 1.40.* Усі грані опуклого многогранника є чотирикутниками. Кількість ребер многогранника дорівнює 12. Знайдіть кількість вершин і граней.
- 1.41.* Точка M — середина ребра AB прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка X належить прямій CM . Знайдіть найменше значення площі трикутника BXC_1 , якщо $AC = BC = 9$ см, $AB = 10$ см і $CC_1 = 12$ см.
- 1.42.* Точки D і K — середини відповідно ребер BC і AA_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка X належить прямій BK . Знайдіть найменше значення площі трикутника AXD , якщо $AB = 6$ см і $AA_1 = 8$ см.
- 1.43.* У правильній призмі $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основи та бічне ребро дорівнюють відповідно 1 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками A і C_1 по поверхні призми.
- 1.44.* У правильній призмі $ABCD A_1B_1C_1D_1$ сторона основи та бічне ребро дорівнюють відповідно 2 см і $\sqrt{3}$ см. Знайдіть найменшу відстань між точками B і D_1 по поверхні призми.
- 1.45.* Точка M — середина ребра B_1C_1 правильної призми $ABCA_1B_1C_1$. Відомо, що $AB = a$, $AA_1 = b$. Знайдіть найменшу відстань між точками A і M по поверхні призми.
- 1.46.* Усі грані опуклого многогранника є правильними п'ятикутниками або правильними шестикутниками. Знайдіть кількість граней, які є п'ятикутниками.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 1.47. Одне коло описане навколо рівностороннього трикутника ABC , а друге дотикається до прямих AB і AC і першого кола. Знайдіть відношення радіусів цих кіл.
- 1.48. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів CAD і CBD перетинаються в точці, яка належить стороні CD . Доведіть, що бісектриси кутів ACB і ADB перетинаються в точці, яка належить стороні AB .

2. Паралелепіпед

Означення. Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 2.1 зображено паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 2.1 грані $AA_1 B_1 B$ і $DD_1 C_1 C$ є протилежними.

Оскільки $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1 B_1 \parallel D_1 C_1$ (рис. 2.1), то за ознакою паралельності площин $AA_1 B_1 \parallel DD_1 C_1$. Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

На рисунку 2.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 2.2 довжи-

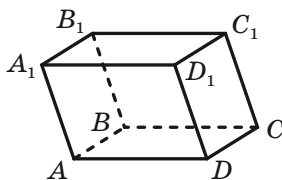


Рис. 2.1

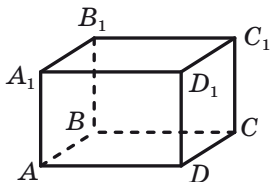


Рис. 2.2

ни ребер AB , AD і AA_1 є вимірами прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри є рівними. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 2.3.



Рис. 2.3

Розглянемо деякі властивості паралелепіпеда.

Теорема 2.1. *Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.*

Доведення. Розглянемо діагональний переріз AA_1C_1C паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2.4). У паралелограмі AA_1C_1C проведемо діагоналі AC_1 і A_1C . Ці відрізки також є діагоналями даного паралелепіпеда. Нехай проведені діагоналі перетинаються в точці O . Ця точка є серединою кожної з діагоналей AC_1 і A_1C .

Доведемо, що точка O є також серединою кожної з двох інших діагоналей BD_1 і B_1D даного паралелепіпеда.

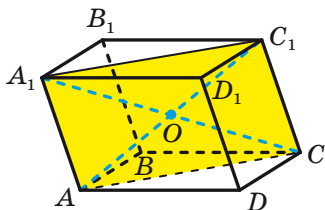


Рис. 2.4

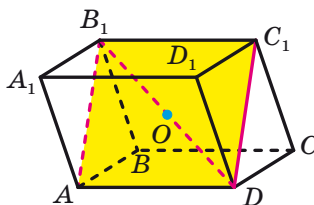


Рис. 2.5

Розглянемо чотирикутник AB_1C_1D (рис. 2.5). Він є паралелограмом (доведіть це самостійно) з діагоналями AC_1 і B_1D . Тоді точка O є серединою відрізка B_1D .

Розглянувши діагональний переріз BB_1D_1D , можна аналогічно довести, що точка O є серединою діагоналі BD_1 . ◀

Наслідок 1. Точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.

Наслідок 2. Відрізки, які сполучають точки перетину діагоналей протилежних граней паралелепіпеда, перетинаються в одній точці (рис. 2.6).

Доведіть ці наслідки самостійно.

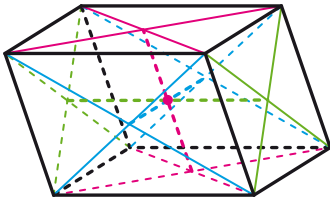


Рис. 2.6

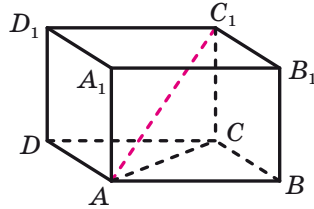


Рис. 2.7

Теорема 2.2. Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

Доведення. Розглянемо діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2.7). Доведемо, що

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Оскільки трикутник ABC прямокутний ($\angle ABC = 90^\circ$), то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Оскільки $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \quad (1)$$

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому $C_1C \perp ABC$. Отже, трикутник ACC_1 прямокутний ($\angle ACC_1 = 90^\circ$). Тоді $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Оскільки $CC_1 = AA_1$, то

$$AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2.$$

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◀

Задача 1. Доведіть, що діагональ A_1C паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перетинає площину DC_1B у точці перетину медіан трикутника DC_1B .

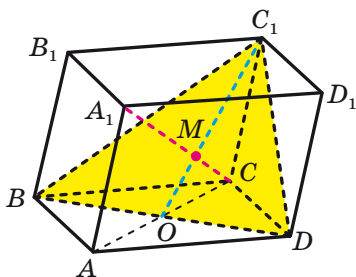


Рис. 2.8

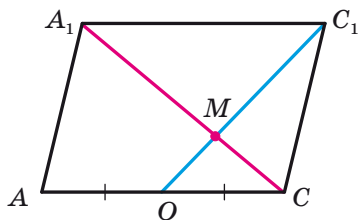


Рис. 2.9

Розв'язання. Нехай діагоналі нижньої основи паралелепіпеда перетинаються в точці O . Тоді відрізок C_1O є медіаною трикутника DC_1B (рис. 2.8). Нехай діагональ A_1C перетинає трикутник DC_1B у точці M .

Розглянемо паралелограм AA_1C_1C (рис. 2.9). Оскільки $OC = \frac{1}{2} A_1C_1$, то трикутники OMC і C_1MA_1 подібні з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$. Звідси $C_1M = 2MO$. Отже, точка M є точкою перетину медіан трикутника DC_1B . ◀

У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведемо діагоналі його граней так, як показано на рисунку 2.10. Проведені відрізки є ребрами тетраедра A_1BC_1D . Кожне з ребер цього тетраедра лежить в одній із шести граней паралелепіпеда, причому мимобіжні ребра лежать у паралельних гранях. Говоритимемо, що паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описано навколо тетраедра A_1BC_1D .

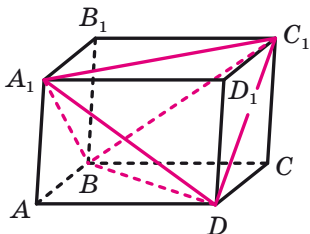


Рис. 2.10

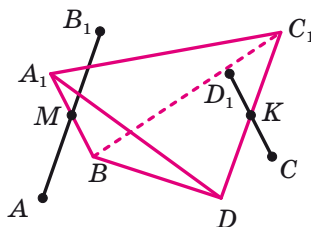


Рис. 2.11

Покажемо, як навколо довільного тетраедра можна описати паралелепіпед.

Розглянемо тетраедр A_1BC_1D . Через середини M і K мимобіжних ребер A_1B і C_1D проведемо відрізки AB_1 і CD_1 так, що $AB_1 \parallel C_1D$ і $AB_1 = C_1D$, а також $CD_1 \parallel A_1B$ і $CD_1 = A_1B$, причому $AM = MB_1$ і $CK = KD_1$ (рис. 2.11). Тоді точки $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1$ і D_1 є вершинами паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, описаного навколо даного тетраедра A_1BC_1D (рис. 2.10).

Задача 2. У тетраедрі $ABCD$ відомо, що $AB = CD = 6$ см, $AD = CB = 8$ см, $AC = 7$ см, $BD = \sqrt{30}$ см. Знайдіть відстань між прямими AC і BD .

Розв'язання. Опишемо навколо даного тетраедра паралелепіпед $MDKBCEAP$ (рис. 2.12). Оскільки $AB = CD$, то в паралелограмах $MCED$ і $BPAK$ діагоналі є рівними. Отже, ці паралелограми є прямокутниками. Аналогічно можна довести, що прямокутниками є також паралелограми $MCPB$ і $DEAK$. Отже, описаний паралелепіпед є прямим. Тому шукана відстань дорівнює його бічному ребру.

Нехай $AK = x$, $AP = y$, $AE = z$.

Маємо: $x^2 + y^2 = AB^2 = 36$, $x^2 + z^2 = BC^2 = 64$.

Чотирикутник $CEAP$ — паралелограм. Тоді можна записати: $CA^2 + PE^2 = 2AP^2 + 2AE^2$, звідки маємо: $2y^2 + 2z^2 = 79$.

$$\text{Отримали систему рівнянь} \begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x^2 + z^2 = 64, \\ 2y^2 + 2z^2 = 79. \end{cases}$$

Звідси встановлюємо, що $x = \frac{11}{2}$.

Відповідь: 5,5 см. ◀

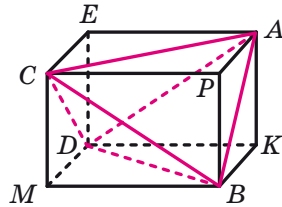


Рис. 2.12



1. Що називають паралелепіпедом?
2. Які грані паралелепіпеда називають протилежними?
3. Який паралелепіпед називають прямим?
4. Який паралелепіпед називають прямокутним?
5. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
6. Яку властивість мають діагоналі паралелепіпеда?
7. Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.



ВПРАВИ

2.1.[°] Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.2.[°] Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2.3.[°] Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2.13), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:

- 1) між прямою DC_1 і площиною BCC_1 ;
- 2) між прямою $B_1 D$ і площиною ABB_1 .

2.4.[°] Дано прямокутний паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2.13), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:

- 1) між прямою DC_1 і площиною $A_1 B_1 C_1$;
- 2) між прямою $B_1 D$ і площиною ABC .

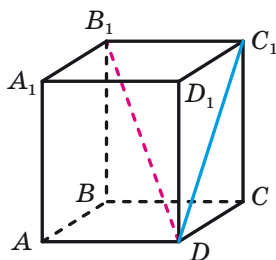


Рис. 2.13

2.5.[°] Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

2.6.[°] Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 1 : 2 : 2, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 6 см.

2.7.* Із чотирьох рівних кубів, ребро яких дорівнює 1 см, склали прямокутний паралелепіпед. Чому дорівнює площа повної поверхні цього паралелепіпеда?

2.8.* Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.9.* Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 6 см і кутом 60° . Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.10.* Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 4 см, а один із кутів основи дорівнює 45° . Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

- 2.11.*** Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см, а один із кутів основи дорівнює 30° . Площа діагонального перерізу паралелепіпеда, який проходить через меншу діагональ основи, дорівнює 8 см^2 . Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
- 2.12.*** Доведіть, що коли діагоналі прямого паралелепіпеда рівні, то даний паралелепіпед є прямокутним.
- 2.13.*** Основою прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є ромб $ABCD$ зі стороною 6 см, $\angle BAD = 45^\circ$. Через пряму AD і вершину B_1 проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут 60° . Знайдіть:
- 1) бічне ребро паралелепіпеда;
 - 2) площу перерізу паралелепіпеда площиною $AB_1 D$.
- 2.14.*** Основою прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є паралелограм $ABCD$, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 30^\circ$. Кут між площинами ABC і $A_1 CD$ дорівнює 45° . Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.
- 2.15.*** Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α , а з однією з бічних граней — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.16.*** Одна зі сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a . Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α , а з даною стороною основи — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.17.*** Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ утворює з площинами ABC , ABB_1 і ADD_1 відповідно кути α , β і γ . Доведіть, що $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$.
- 2.18.*** Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ утворює з ребрами AB , AD і AA_1 відповідно кути α , β і γ . Доведіть, що $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
- 2.19.*** Перерізом паралелепіпеда є n -кутник ($n > 3$). Доведіть, що у цього n -кутника є паралельні сторони.
- 2.20.*** Чи може перерізом паралелепіпеда бути правильний п'ятикутник?
- 2.21.**** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2 . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 2.22.**** Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S . Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2 . Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

- 2.23.** Через діагональ BD основи $ABCD$ і вершину C_1 прямого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено площину, яка утворює кут 30° із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 60^\circ$.
- 2.24.** Основа $ABCD$ паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадратом. Вершина A_1 рівновіддалена від усіх вершин основи $ABCD$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро паралелепіпеда — 6 см.
- 2.25.** Основа $ABCD$ похилого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадратом, а площини граней $AA_1 B_1 B$ і $CC_1 D_1 D$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані $AA_1 D_1 D$, якщо кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 8 см.
- 2.26.** Усі грані паралелепіпеда є ромбами з гострими кутами, що дорівнюють 60° . Знайдіть відстань між паралельними гранями паралелепіпеда, якщо ребро паралелепіпеда дорівнює a .
- 2.27.** Основою паралелепіпеда є ромб, сторона якого дорівнює a , а гострий кут — 60° . Бічні грані паралелепіпеда — ромби з гострими кутами, що дорівнюють 45° . Знайдіть висоту паралелепіпеда.
- 2.28.** Основою паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є прямокутник $ABCD$. Відомо, що $AA_1 = a$, $\angle A_1 AB = \alpha$, $\angle A_1 AD = \beta$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.
- 2.29.** Ребро куба дорівнює 1 см. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки простору до вершин куба не менша ніж $4\sqrt{3}$ см.
- 2.30.* У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AD = BC = 9$ см, $AC = BD = 10$ см, $AB = \sqrt{57}$ см і $CD = 7$ см. Знайдіть відстань між прямими AB і CD .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 2.31. Дано квадрат $ABCD$. Побудовано коло із центром у вершині D , що проходить через вершини A і C . Через середину M сторони AB проведено дотичну до цього кола, яка перетинає сторону BC у точці K . Знайдіть відношення $BK : KC$.
- 2.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 30 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

3. Піраміда

Означення. Многогранник, одна грань якого — n -кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають **n -кутною пірамідою** (рис. 3.1).

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди; n -кутник, про який ідеться в означенні, називають основою піраміди; його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 3.1).

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи (рис. 3.2).

Розглянемо опуклу n -кутну піраміду ($n > 3$). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає площину основи піраміди по діагоналі (рис. 3.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

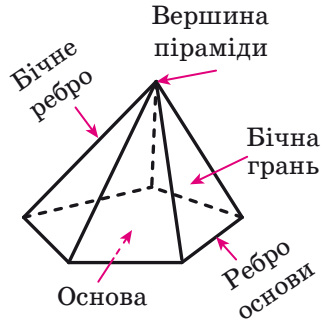


Рис. 3.1

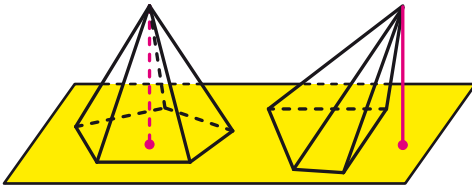


Рис. 3.2

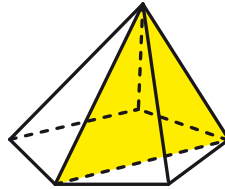


Рис. 3.3

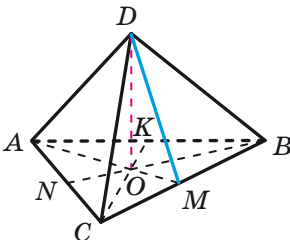


Рис. 3.4

Означення. Піраміду називають **правильною**, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

На рисунку 3.4 зображено правильну трикутну піраміду $DABC$ з основою ABC . Трикутник ABC є рівностороннім. Проекцією вершини D на площину ABC є центр трикутника — точка O .

Щоб знайти зображення точки O , треба побудувати точку перетину медіан AM , BN і CK трикутника ABC .

На рисунку 3.5 зображено правильну чотирикутну піраміду $EABCD$. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, точка O — його центр, відрізок EO — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проекцією вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи є точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

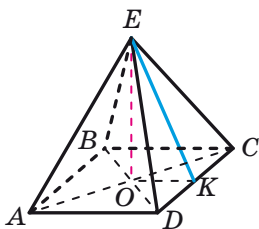


Рис. 3.5

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).

Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 3.4 проведено відрізок DM , де M — середина ребра BC . Оскільки трикутник BCD — рівнобедрений з основою BC , то відрізок DM — його висота. Отже, відрізок DM — апофема правильної трикутної піраміди $DABC$.

На рисунку 3.5 відрізок EK , де точка K — середина ребра DC , є апофемою правильної чотирикутної піраміди $EABCD$.

Усі апофеми правильної піраміди рівні (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_{\Pi} = S_{\text{б}} + S_{\text{осн}},$$

де S_{Π} — площа поверхні піраміди, $S_{\text{б}}$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди.

Теорема 3.1. *Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.*

Доведення. Розглянемо правильну n -кутну піраміду з ребром основи, що дорівнює a , та апофемою, що дорівнює d . Тоді площа бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}ad$. Оскільки всі n бічних граней правильної n -кутної піраміди — рівні трикутники, то площа бічної поверхні дорівнює $\left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n$, тобто $S_6 = \left(\frac{1}{2}ad\right) \cdot n = \frac{1}{2}(an) \cdot d$. Оскільки добуток an дорівнює периметру основи, то теорему доведено. ◀

Твердження теореми 3.1 зручно подати у вигляді формули

$$S_6 = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot d,$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи піраміди, d — довжина апофеми правильної піраміди.

Із доведеного в ключових задачах пп. 11–13 підручника «Геометрія-10» випливають такі властивості піраміди:

- 1) якщо бічні ребра піраміди рівні або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди;
- 2) якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди.

Доведіть ці властивості самостійно.

Задача 1. Доведіть, що коли всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи дорівнюють α , то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної піраміди. Для інших n -кутних пірамід доведення буде аналогічним.

На рисунку 3.6 відрізок DO — висота піраміди $DABC$. Трикутники AOB , BOC і COA є відповідно ортогональними проекціями на площину основи піраміди трикутників ADB , BDC і CDA .

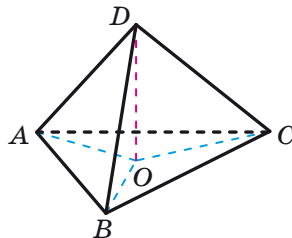


Рис. 3.6

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати: $S_{AOB} = S_{ADB} \cos \alpha$, $S_{BOC} = S_{BDC} \cos \alpha$ і $S_{COA} = S_{CDA} \cos \alpha$. Додавши почленно ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо: $S_6 = S_{\text{осн}} \cos \alpha$.

Звідси $S_6 = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$. ◀

Чи збережеться сформульована вище властивість (2), якщо умову рівності двограних кутів при ребрах основи піраміди замінити умовою рівності кутів, що утворюють бічні грані піраміди з її основою¹?

Щоб відповісти на це запитання, звернемося до рисунка 3.7. Точка O є центром зовнішнього кола трикутника ABC , яке дотикається до прямих AB , BC і CA відповідно в точках M , K і N (рис. 3.8). Вершина D піраміди $DABC$ проектується в точку O . Оскільки $OM \perp AB$, то за теоремою про три перпендикуляри отримуємо, що $DM \perp AB$. Отже, кут між гранню DAB і основою ABC дорівнює величині кута DMO . Аналогічно доводимо, що величини кутів DNO і DKO дорівнюють відповідно кутам, які утворюють грані DBC і DAC з основою ABC .

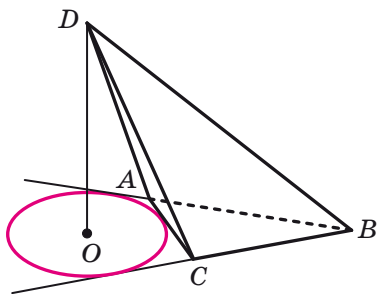


Рис. 3.7

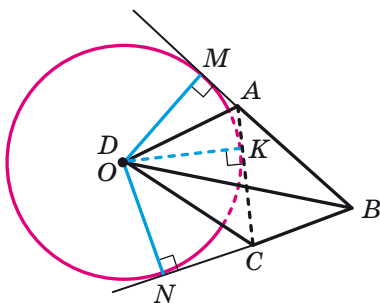


Рис. 3.8

Трикутники DMO , DNO і DKO є рівними за двома катетами. Звідси $\angle DMO = \angle DNO = \angle DKO$. Таким чином, на рисунку 3.7 зображено піраміду, бічні грані якої утворюють рівні кути з основою, але при цьому її вершина не проектується в центр вписаного кола основи.

Отже, відповідь на поставлене вище запитання є негативною.

¹ Нагадаємо, що кутом між двома многокутниками називають кут між площинами, які містять ці многокутники.

Насправді має місце такий факт:

якщо бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то проекція вершини піраміди на площину основи є точкою, рівновіддаленою від усіх прямих, що містять ребра основи.

Задача 2. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною, що дорівнює a . Кожна бічна грань утворює з основою кут α . Знайдіть висоту піраміди.

Вказівка. Розгляньте два випадки: проекція вершини піраміди на площину основи належить основі або їй не належить.

Відповідь: $\frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{6}$ або $\frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2}$. ◀



1. Що називають пірамідою?
2. Що називають висотою піраміди?
3. Який переріз називають діагональним перерізом піраміди?
4. Яку піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної піраміди?
6. Що називають площею поверхні піраміди? бічної поверхні піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?



ВПРАВИ

- 3.1.°** Основою піраміди $MABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагональ BD якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро MA , що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть ребро MD .
- 3.2.°** Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 24 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 16 см.
- 3.3.°** Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює b , утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.
- 3.4.°** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a , а бічне ребро утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

 **3.5.°** Доведіть, що в правильній піраміді:

- 1) бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
- 2) двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними.

 **3.6.°** Доведіть, що коли вершина піраміди проектується в центр вписаного кола основи, то всі двогранні кути при ребрах основи піраміди є рівними.

 **3.7.°** Доведіть, що коли вершина піраміди проектується в центр описаного кола основи, то всі бічні ребра піраміди утворюють рівні кути з площиною основи.

3.8.° Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут α . Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.9.° Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть кут між бічним ребром піраміди та площиною її основи.

3.10.* Точки D , E і F — середини ребер AB , AM і MC правильної піраміди $MABC$ відповідно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см.

- 1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки D , E і F .
- 2) Знайдіть площу перерізу.

3.11.* Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через основу її висоти паралельно мимобіжним ребрам піраміди. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро — 12 см.

3.12.* Кут між двома апофемами правильної трикутної піраміди дорівнює 60° . Доведіть, що бічні грані піраміди є рівнобедреними прямокутними трикутниками.

3.13.* Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.14.* Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює d , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.15.* Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.

3.16.* Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть висоту піраміди.

- 3.17.*** Основою піраміди $DABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 45° і дорівнює 8 см. Знайдіть площу основи піраміди.
- 3.18.*** Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $3\sqrt{10}$ см, а основа — 6 см. Висота піраміди дорівнює 5 см, а її бічні ребра є рівними. Знайдіть бічне ребро піраміди.
- 3.19.*** Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 30° . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні піраміди;
 - 2) висоту піраміди.
- 3.20.*** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють 60° . Знайдіть:
- 1) площу бічної поверхні піраміди;
 - 2) висоту піраміди.
- 3.21.*** Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи, площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут 45° із площиною основи. Знайдіть:
- 1) висоту піраміди;
 - 2) площу бічної поверхні піраміди.
- 3.22.*** Основою піраміди є квадрат зі стороною 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.
- 3.23.*** Площини бічних граней ABM і CBM піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, $MB = 20$ см.
- 3.24.*** Площини бічних граней MAB і MAC піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані MBC , якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $MA = 9$ см.
- 3.25.*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ дорівнює 8 см, а висота піраміди — 12 см.
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середини бічних ребер MA і MD паралельно висоті піраміди.
 - 2) Знайдіть площу перерізу.

- 3.26.*** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює 60° .
- 1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через центр основи паралельно бічній грані піраміди.
 - 2) Знайдіть площу перерізу.
- 3.27.**** Точки M і K — середини ребер BC і BD правильного тетраедра $DABC$. Знайдіть кут між прямими AK і DM .
- 3.28.**** Усі ребра правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ є рівними. Точки K і P — середини ребер AD і BC відповідно. Знайдіть кут між прямими AP і KM .
- 3.29.**** Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α . Знайдіть двогранний кут піраміди при бічному ребрі.
- 3.30.**** Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при бічному ребрі дорівнює α . Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.
- 3.31.**** Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до площини її бічної грані дорівнює d , а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.32.**** Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до площини бічної грані дорівнює m , а кут між висотою піраміди та площиною бічної грані становить β . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.33.**** Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота однієї з бічних граней, проведена до ребра основи піраміди, — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.34.**** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота піраміди дорівнює $3\sqrt{15}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.35.**** Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $AB = BC = 2$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Площини бічних граней MAB і MAC перпендикулярні до площини основи, а кут між площиною MBC і площиною основи дорівнює 45° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

- 3.36.™** Основою піраміди $MABCD$ є ромб зі стороною a . Площини бічних граней ABM і CBM перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі MB є тупим і дорівнює α . Кут між площиною AMD і площиною основи дорівнює β . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.37.™** Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Площина однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней утворюють із площиною основи кут 45° . Знайдіть висоту піраміди.
- 3.38.™** Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Площина грані BMC перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней нахилені до площини основи під кутом 30° . Знайдіть ребро MC .
- 3.39.™** У правильній трикутній піраміді двогранний кут при ребрі основи дорівнює α , а двогранний кут при бічному ребрі дорівнює β . Доведіть, що $3 \cos^2 \alpha + 2 \cos \beta = 1$.
- 3.40.™** Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до бічної грані дорівнює d , а двогранний кут при бічному ребрі дорівнює 2α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.41.™** Сторона AB і висота MO правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ відповідно дорівнюють 8 см і 4 см. Точка K — середина ребра DC . Знайдіть відстань між прямими MK і AC .
- 3.42.™** Сторона AB і висота MO правильної шестикутної піраміди $MABCDEF$ відповідно дорівнюють 4 см і $3\sqrt{2}$ см. Точка K — середина ребра EF . Знайдіть відстань між прямими MK і BE .
- 3.43.™** Сторона основи правильної трикутної піраміди $DABC$ дорівнює a . Пряма AB утворює з площиною DAC кут α . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 3.44.™** Площа бічної поверхні правильної шестикутної піраміди $MABCDEF$ дорівнює S . Кут між прямою AB і площиною BMC дорівнює α . Знайдіть площу основи піраміди.
- 3.45.™** Основою піраміди є трикутник, сторони якого дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут, що дорівнює 45° . Знайдіть висоту піраміди.
- 3.46.™** Основою піраміди є рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює $10\sqrt{3}$ см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Бічні грані піраміди є рівновеликими трикутниками. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

- 3.47.*** Основою піраміди є рівносторонній трикутник. Висота піраміди дорівнює 6 см. Кожна бічна грань утворює з площиною основи кут, що дорівнює 60° . Знайдіть площу основи піраміди.
- 3.48.*** Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α . Усі вершини піраміди рівновіддалені від деякої площини π . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною π .
- 3.49.*** Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b , а плоский кут при вершині піраміди дорівнює α . Усі вершини піраміди рівновіддалені від деякої площини π . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною π .
- 3.50.*** Кожне ребро тетраедра дорівнює 1 см. Знайдіть найбільше значення площі перерізу даного тетраедра площиною, паралельною двом його мимобіжним ребрам.
- 3.51.*** Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 1 см. На ребрах AB і AC відповідно позначили точки K і M . Доведіть, що периметр трикутника DKM більший за 2 см.
- 3.52.*** Ребро правильного тетраедра $DABC$ дорівнює 1 см. Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні тетраедра між серединами ребер AB і CD .
- 3.53.*** На сторонах BA і BC рівностороннього трикутника ABC позначили відповідно точки C_1 і A_1 . Доведіть, що відрізки AA_1 , CC_1 і A_1C_1 можуть слугувати сторонами деякого трикутника.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 3.54.** Сторони паралелограма дорівнюють 3 см і 1 см, а кут між діагоналями дорівнює 45° . Знайдіть площу паралелограма.
- 3.55.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 25$ см, $AC = 14$ см. До кола, вписаного в даний трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC і перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Знайдіть площу трикутника MBK .

4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди (рис. 4.1). Ця площина розбиває дану піраміду на два многогранники.

Один із цих многогранників — піраміда, яку можна розглядати як образ даної піраміди, отриманої в результаті гомотетії із центром у точці M . Відповідні грані цих пірамід є гомотетичними многокутниками, а отже, відношення площ цих граней дорівнює квадрату коефіцієнта гомотетії. Із сказаного випливає, що *відношення площ поверхонь гомотетичних пірамід дорівнює квадрату коефіцієнта гомотетії*.

Наведене твердження є окремим випадком такої властивості многогранників: *відношення площ поверхонь двох подібних многогранників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності*.

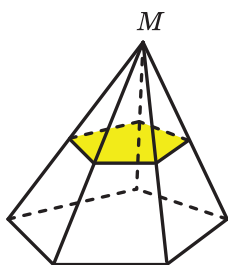


Рис. 4.1

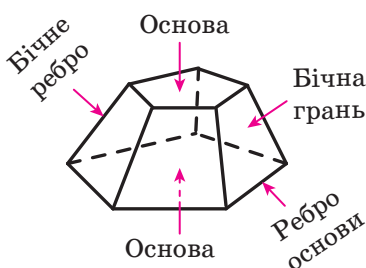


Рис. 4.2

Повернемося до рисунка 4.1. Другий із многогранників, на які розбиває піраміду січна площина, називають **зрізаною пірамідою**.

У зрізаній піраміді (рис. 4.2) дві грані — n -кутники, що лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами зрізаної піраміди**. Решта n граней зрізаної піраміди — трапеції. Їх називають **бічними гранями зрізаної піраміди**. Сторони основ називають **ребрами основ зрізаної піраміди**. Ребра, які не належать основам, називають **бічними ребрами зрізаної піраміди**.

Зауважимо, що основи зрізаної піраміди є подібними фігурами. Цей факт було доведено в курсі геометрії 10 класу.

Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Довжина висоти зрізаної піраміди дорівнює відстані між площинами її основ.

Якщо правильну n -кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то утворену зрізану піраміду називають **правильною n -кутною зрізаною пірамідою**.

Основами правильної зрізаної n -кутної піраміди є правильні n -кутники, а бічними гранями — рівнобічні трапеції.

Апофемою правильної зрізаної піраміди називають відрізок, який сполучає середини ребер основ, що належать одній грані.

Усі апофemi правильної зрізаної піраміди є рівними (доведіть це самостійно).

На рисунку 4.3 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Її основами є квадрати $ABCD$ і $A_1 B_1 C_1 D_1$.

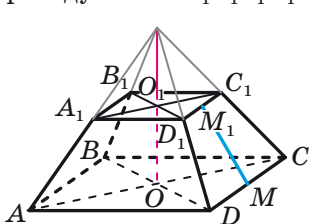


Рис. 4.3

Точки O і O_1 — їхні центри. Відрізок OO_1 — висота зрізаної піраміди.

Сполучимо середини M і M_1 ребер CD і $C_1 D_1$ відповідно. Оскільки чотирикутник $CC_1 D_1 D$ — рівнобічна трапеція, то відрізок MM_1 — її висота, а отже, й апофема правильної чотирикутної зрізаної піраміди.

Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні зрізаної піраміди** (ще говорять: «площа повної поверхні зрізаної піраміди») називають суму площ усіх її граней.

Теорема 4.1. *Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофemi.*

Доведіть цю теорему самостійно.

Твердження теореми 4.1 зручно подати у вигляді формули

$$S_6 = \frac{1}{2} (P_{\text{осн}} + p_{\text{осн}}) \cdot d,$$

де $P_{\text{осн}}$ і $p_{\text{осн}}$ — периметри основ, d — довжина апофemi правильної зрізаної піраміди.



1. Чому дорівнює відношення площ поверхонь подібних многогранників?
2. Опишіть, який многогранник називають зрізаною пірамідою.
3. Опишіть елементи зрізаної піраміди.
4. Яку зрізану піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної зрізаної піраміди?
6. Що називають площею поверхні зрізаної піраміди? бічної поверхні зрізаної піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?



ВПРАВИ

- 4.1.[°] Площа бічної поверхні правильної зрізаної шестикутної піраміди дорівнює 540 см^2 . Знайдіть сторони основ піраміди, якщо вони відносяться як $2 : 3$, а апофема дорівнює 9 см .
- 4.2.[°] Знайдіть апофему правильної зрізаної п'ятикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 6 см і 10 см , а площа бічної поверхні — 280 см^2 .
- 4.3.* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 12 см і 18 см , а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 45° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.4.* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 9 см , а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 60° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.5.* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 10 см , а висота піраміди — 4 см . Знайдіть:
- 1) діагональ зрізаної піраміди;
 - 2) площу перерізу, який проходить через бічні ребра, що не належать одній грані;
 - 3) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.6.* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 15 см і 27 см , а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 30° . Знайдіть:
- 1) висоту піраміди;
 - 2) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.
- 4.7.* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 24 см і 30 см , а бічні ребра — 4 см . Знайдіть висоту піраміди.
- 4.8.* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см , а площа бічної поверхні — 54 см^2 . Знайдіть висоту піраміди.
- 4.9.** Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють 8 см і 5 см , а висота піраміди — 3 см . Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AB і точку C_1 .

- 4.10.**** Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ дорівнюють 8 см і 6 см, а висота піраміди — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AC і точку B_1 .
- 4.11.**** Бічне ребро BB_1 зрізаної піраміди $ABCA_1 B_1 C_1$ перпендикулярне до площини основи, $BB_1 = 4$ см, $AB = BC = 16$ см, $A_1 B_1 = B_1 C_1 = 10$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.12.**** Основи зрізаної піраміди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є квадратами, $AD = 4$ см, $A_1 D_1 = 2$ см. Грань $AA_1 B_1 B$ є рівнобічною трапецією, а її площина перпендикулярна до площини основи. Кут між площиною грані $CC_1 D_1 D$ і площиною основи дорівнює 60° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.13.**** Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює H . Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α , а діагональ піраміди — кут β . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
- 4.14.**** Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює a , а сторона меншої основи — b . Знайдіть висоту зрізаної піраміди, якщо гострий кут її бічної грані дорівнює α .
- 4.15.**** Площа бічної поверхні правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнює площі її меншої основи. Двогранний кут зрізаної піраміди при ребрі більшої основи дорівнює α . Знайдіть відношення площі більшої основи до площі бічної поверхні.
- 4.16.**** Площа бічної поверхні правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнює площі більшої основи та у два рази більша за площу меншої основи. Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі її більшої основи.
- 4.17.*** У правильній чотирикутній зрізаній піраміді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ кут між площинами BDD_1 і CDB_1 дорівнює α . Знайдіть відношення площ чотирикутників $BB_1 D_1 D$ і $DA_1 B_1 C$.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 4.18.** Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, віддалений від кінців гіпотенузи на $\sqrt{5}$ см і $\sqrt{10}$ см. Знайдіть катети.
- 4.19.** У трикутнику ABC бісектриса AD ділить сторону BC у відношенні $BD : DC = 2 : 1$. У якому відношенні, рахуючи від вершини A , медіана CE ділить цю бісектрису?

5. Тетраедр

Трикутна піраміда має чотири грані. Із цією властивістю пов'язана друга назва трикутної піраміди — **тетраедр** (від грец. «чотиригранник»).

Ви знаєте, що трикутник відіграє в планіметрії особливу роль. У багатьох випадках властивості трикутника допомагають вивчати властивості інших, складніших фігур. У стереометрії аналогом трикутника є тетраедр. Розглянемо деякі властивості цього многогранника.

Вам відомо, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці. Виникає природне запитання: чи завжди перетинаються в одній точці прямі, які містять висоти довільного тетраедра? Відповідь на це запитання негативна.

Розглянемо прямокутні трикутники ABC і ABD , що лежать у перпендикулярних площинах, такі, що $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$ (рис. 5.1). Тоді відрізки CB і DA , що лежать на мимобіжних прямих, є висотами тетраедра $ABCD$.

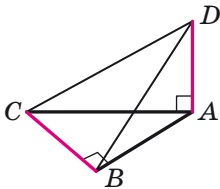


Рис. 5.1

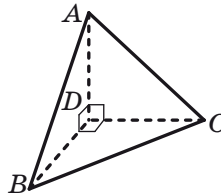


Рис. 5.2

Означення. Якщо прямі, які містять висоти тетраедра, перетинаються в одній точці, то такий тетраедр називають **ортоцентричним**.

Наведемо приклад ортоцентричного тетраедра. На рисунку 5.2 зображено тетраедр $DABC$, у якого всі плоскі кути при вершині D є прямими. Тому кожний із відрізків AD , BD і CD є його висотою. Зрозуміло, що й четверта висота цього тетраедра проходить через точку D .

Доведемо дві леми, які допомагають вивчати властивості ортоцентричного тетраедра.

Лема 1. Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то решта два ребра також перпендикулярні.

Доведення. Розглянемо тетраедр $DABC$, у якому $DB \perp AC$ і $DC \perp AB$. Доведемо, що $DA \perp BC$.

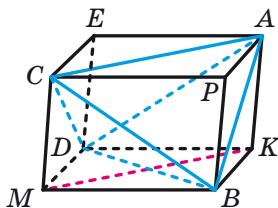


Рис. 5.3

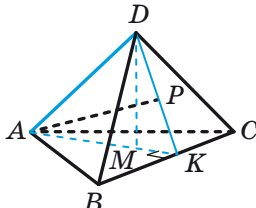


Рис. 5.4

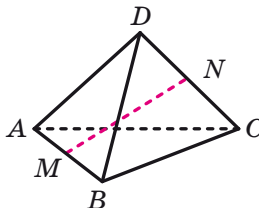


Рис. 5.5

Опишемо навколо даного тетраедра паралелепіпед (рис. 5.3). Оскільки $MK \parallel AC$, то $MK \perp DB$. Отже, грані $MDKB$ і $CEAP$ є ромбами. Аналогічно можна довести, що грані $MCED$ і $BPAK$ також є ромбами. Тоді всі грані цього паралелепіпеда — ромби. Звідси випливає, що $DA \perp BC$. ◀

Лема 2. Якщо тетраедр має пару перпендикулярних мимобіжних ребер, то прямі, що містять висоти тетраедра, проведені з кінців одного із цих ребер, перетинаються.

Доведення. Розглянемо тетраедр $DABC$, у якому $DA \perp BC$. Проведемо висоту AK трикутника ABC (рис. 5.4). Сполучимо точки D і K . Проведемо висоти AP і DM трикутника ADK . Зауважимо, що прямі AP і DM перетинаються.

Оскільки $BC \perp ADK$ і $DM \subset ADK$, то $BC \perp DM$. Отже, пряма DM перпендикулярна до двох прямих площини ABC , що перетинаються. Звідси $DM \perp ABC$. Аналогічно можна довести, що $AP \perp BDC$. ◀

Теорема 5.1. Якщо тетраедр має дві пари перпендикулярних мимобіжних ребер, то він є ортоцентричним.

Доведення. Згідно з лемою 1 кожні два мимобіжних ребра даного тетраедра перпендикулярні. Тоді за лемою 2 кожні дві прямі, що містять висоти тетраедра, перетинаються. Чотири прямі, які містять висоти даного тетраедра, не лежать в одній площині. Тоді з урахуванням доведеного в ключовій задачі 2.17 підручника «Геометрія-10» отримуємо, що ці прямі проходять через одну точку. ◀

Ви знаєте, що в трикутнику вводять такі елементи, як середні лінії та медіани. Відрізки з такими самими найменуваннями означають і для тетраедра.

Означення. Відрізок, який сполучає середини мимобіжних ребер тетраедра, називають **середньою лінією** тетраедра.

На рисунку 5.5 відрізок MN — середня лінія тетраедра $DABC$.

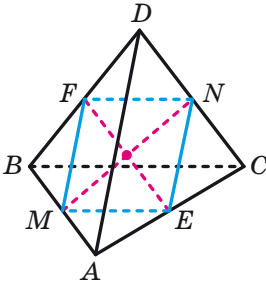


Рис. 5.6

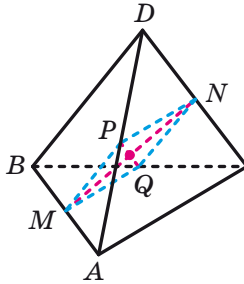


Рис. 5.7

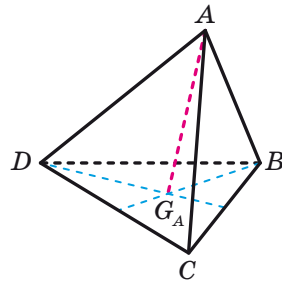


Рис. 5.8

Тетраедр має три середні лінії.

Теорема 5.2. *Середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться навпіл.*

Доведення. Розглянемо середні лінії MN і EF тетраедра $DABC$ (рис. 5.6). Відрізок ME є середньою лінією трикутника ABC . Звідси $ME \parallel BC$ і $ME = \frac{1}{2}BC$. Аналогічно можна довести, що $FN \parallel BC$ і $FN = \frac{1}{2}BC$. Отже, $FN \parallel ME$ і $FN = ME$. Тоді чотирикутник $MFNE$ — паралелограм. Отже, середні лінії MN і EF тетраедра $DABC$ перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

Розглянемо середні лінії MN і PQ тетраедра $DABC$ (рис. 5.7). Аналогічно можна довести, що ці середні лінії перетинаються та точкою перетину діляться навпіл.

Отримуємо, що кожна із середніх ліній FE і PQ перетинає середню лінію MN в її середині. Отже, усі три середні лінії тетраедра перетинаються в одній точці. ◀

Означення. Відрізок, який сполучає вершину тетраедра з точкою перетину медіан протилежної грані, називають **медіаною** тетраедра.

На рисунку 5.8 G_A — точка перетину медіан грані BCD . Тоді відрізок AG_A є медіаною тетраедра.

Тетраедр має чотири медіани.

Теорема 5.3. *Медіани тетраедра перетинаються в одній точці та точкою перетину діляться у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини тетраедра.*

Доведення. На рисунку 5.9 відрізки AG_A і DG_D — медіани тетраедра. Тоді відрізки AM і DM — медіани відповідно трикутників ABC

і DBC . Отримуємо, що медіани AG_A і DG_D тетраедра належать трикутнику AMD . Нехай ці медіани перетинаються в точці G .

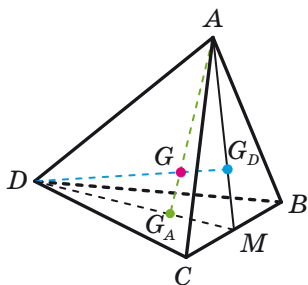


Рис. 5.9

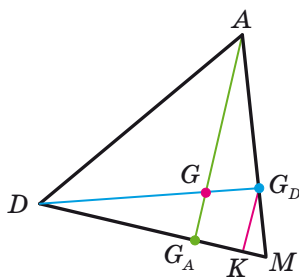


Рис. 5.10

У трикутнику ADM проведемо $G_DK \parallel AG_A$ (рис. 5.10). За властивістю медіан трикутника отримуємо, що $\frac{MG_D}{G_DA} = \frac{MG_A}{G_AD} = \frac{1}{2}$. За тео-

ремою про пропорційні відрізки отримуємо, що $\frac{MG_D}{G_DA} = \frac{MK}{KG_A} = \frac{1}{2}$.

Тоді $\frac{DG_A}{G_AK} = \frac{3}{1}$. Маємо: $\frac{DG}{GG_D} = \frac{DG_A}{G_AK} = \frac{3}{1}$.

Аналогічно можна довести, що будь-які дві медіани тетраедра перетинаються та точкою перетину діляться у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини тетраедра.

Отримуємо, що кожна з медіан AG_A , BG_B і CG_C перетинає медіану DG_D в одній і тій самій точці. Отже, медіани тетраедра перетинаються в одній точці. ◀

Запропонуємо іншу схему доведення теореми 5.2. За доведеним у ключовій задачі 1 п. 2 діагоналі паралелепіпеда, описаного навколо тетраедра, містять медіани даного тетраедра (рис. 5.11). Оскільки діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці, то звідси й випливає твердження теореми.

Точку перетину медіан тетраедра називають **центроїдом** тетраедра. Зазначимо, що точка перетину середніх ліній тетраедра збігається з його центроїдом. Скориставшись наслідком 2 з теореми 2.1, доведіть цей факт самостійно.

Розглянемо правильну трикутну піраміду, у якої всі ребра рівні. Усі грані такої піраміди — рівні трикутники. Нагадаємо, що таку піраміду називають **правильним тетраедром**.

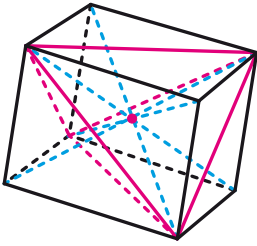


Рис. 5.11

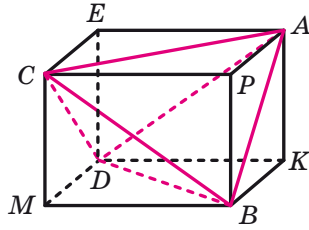


Рис. 5.12

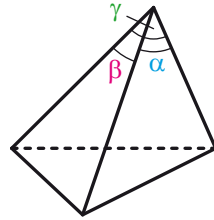


Рис. 5.13

Виникає природне запитання: чи існує тетраедр, відмінний від правильного, усі грані якого є рівними?

Розглянемо прямокутний паралелепіпед $MDK BCEAP$. Проведемо діагоналі його граней так, як показано на рисунку 5.12. Оскільки діагоналі прямокутника є рівними, то $AB = CD$, $AC = DB$ і $BC = AD$. Отже, усі грані тетраедра $DABC$ є рівними за третьою ознакою рівності трикутників. Тому відповідь на поставлене вище запитання є ствердною.

Означення. Тетраедр, усі грані якого — рівні трикутники, називають **рівногранним**.

Розглянемо тригранний кут при вершині рівногранного тетраедра. Позначимо його плоскі кути α , β і γ (рис. 5.13). Вони дорівнюють кутам трикутника, який є гранню тетраедра. Отже, $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Оскільки кожний плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів, то кожний із кутів α , β і γ є гострим.

Таким чином, у рівногранному тетраедрі всі грані — гострокутні трикутники.

Розгортка рівногранного тетраедра являє собою багатокутник, поділений на чотири рівних трикутники. Оскільки сума плоских кутів тригранного кута при вершині рівногранного тетраедра дорівнює 180° , то цю розгортку можна зобразити у вигляді трикутника, поділеного на чотири рівних трикутники (рис. 5.14). Таким чином, якщо в гострокутному трикутнику провести всі середні лінії, то отриманий рисунок можна розглядати як розгортку рівногранного тетраедра.

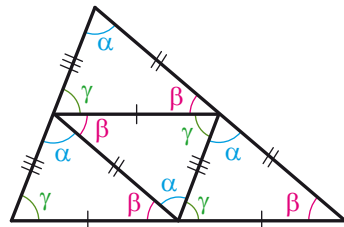


Рис. 5.14

Нескладно довести (зробіть це самостійно), що мимобіжні ребра рівногранного тетраедра є рівними. Це дає змогу зробити такий висновок: *паралелепіпед, описаний навколо рівногранного тетраедра, є прямокутним.*

Цей факт допомагає довести цілу низку властивостей рівногранного тетраедра. Наприклад, описавши паралелепіпед навколо тетраедра, ви легко доведете, що *середня лінія рівногранного тетраедра перпендикулярна до двох інших середніх ліній та до кожного з мимобіжних ребер, які вона сполучає.* Переконайтеся в цьому самостійно.

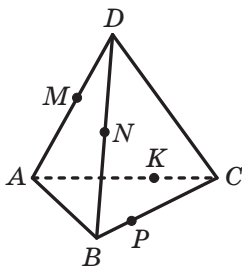


Рис. 5.15

На ребрах DA , AC , CB і BD тетраедра $DABC$ позначимо відповідно точки M , K , P і N (рис. 5.15).

Будь-які три з указаних точок, наприклад M , K і P , однозначно визначають січну площину.

Для того щоб з'ясувати, чи належить цій площині точка N , можна виконати побудову, аналогічну тій, яку було описано в розв'язанні задачі 2 п. 3 підручника «Геометрія-10».

Розглянемо теорему, що вказує спільний критерій належності одній площині чотирьох точок, які лежать на ребрах тетраедра.

Теорема Менелая для тетраедра. Точки M , K , P і N , позначені відповідно на ребрах DA , AC , CB і BD тетраедра $DABC$, належать одній площині тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{ND} = 1. \quad (*)$$

Доведення. Нехай точки M , K , P і N належать площині α (рис. 5.16). Позначимо через A_1 , B_1 , C_1 і D_1 проєкції точок A , B , C і D на площину α (рис. 5.17).

Розглянемо прямокутні трикутники DD_1M і AA_1M . Кути DMD_1 і AMA_1 є вертикальними, а отже, $\angle DMD_1 = \angle AMA_1$. Тому трикутники DMD_1 і AMA_1 є подібними. Аналогічно можна довести, що подібними є трикутники AA_1K і CC_1K , CC_1P і BB_1P , BB_1N і DD_1N .

Тоді можна записати:

$$\frac{DM}{MA} = \frac{DD_1}{AA_1}, \quad \frac{AK}{KC} = \frac{AA_1}{CC_1}, \quad \frac{CP}{PB} = \frac{CC_1}{BB_1}, \quad \frac{BN}{ND} = \frac{BB_1}{DD_1}.$$

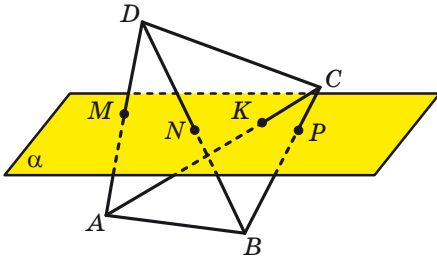


Рис. 5.16

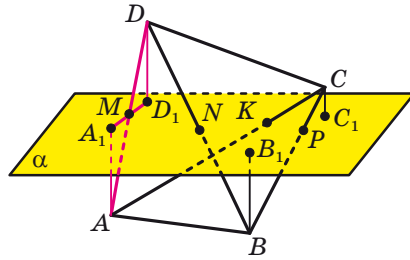


Рис. 5.17

Перемноживши отримані рівності, матимемо:

$$\frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{ND} = 1.$$

Тепер доведемо, що в разі виконання рівності (*) точки M , K , P і N належать одній площині.

Нехай площина MKN перетинає ребро CB у точці P_1 . Тоді виконується рівність $\frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP_1}{P_1B} \cdot \frac{BN}{ND} = 1$.

$$\text{Таким чином, } \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP_1}{P_1B} \cdot \frac{BN}{ND} = \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AK}{KC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{ND}.$$

$$\text{Звідси } \frac{CP_1}{P_1B} = \frac{CP}{PB}.$$

Остання рівність означає, що точки P і P_1 збігаються. ◀

Задача 1. Точки K і N належать відповідно ребрам BA і BC призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка M належить відрізку AB_1 . Відомо, що $B_1M : MA = 3 : 2$, $BN : NC = 1 : 2$, $AK = KB$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C , площина MNK ділить відрізок CB_1 ?

Розв'язання. Нехай площина MKN перетинає відрізок CB_1 у точці P (рис. 5.18).

Зауважимо, що відрізки BA , BC , AB_1 і CB_1 є ребрами тетраедра B_1ABC , а точки K , N , M і P відповідно належать цим ребрам.

Тоді, скориставшись теоремою Менелая,

$$\text{можна записати: } \frac{B_1M}{MA} \cdot \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PB_1} = 1.$$

$$\text{Звідси } \frac{CP}{PB_1} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

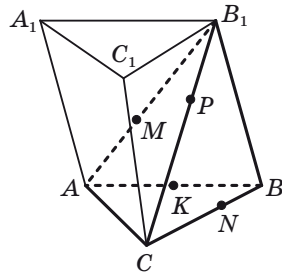


Рис. 5.18

Задача 2. Основою піраміди $SABCD$ є чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого перпендикулярні та перетинаються в точці O . Відрізок SO є висотою піраміди. Із точки O на бічні грані ASB , BSC , CSD і DSA опущено перпендикуляри OM , ON , OK і OP відповідно. Доведіть, що точки M , N , K і P належать одній площині.

Розв'язання. Через пряму BD проведемо площини, перпендикулярні ребрам SA і SC . Ці площини перетинають ребра SA і SC у точках F і E відповідно (рис. 5.19). Можна довести (зробіть це самостійно), що перпендикуляри OM і OP лежать в одній із цих площин, а ON і OK — в іншій.

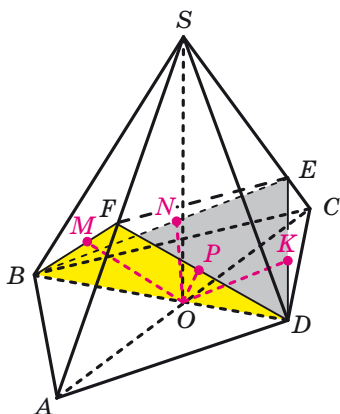


Рис. 5.19

Розглянемо тетраедр $DFBE$. Оскільки точки M , N , K і P належать його ребрам BF , BE , DE і DF відповідно, то для розв'язання задачі достатньо довести, що $\frac{DK}{KE} \cdot \frac{EN}{NB} \cdot \frac{BM}{MF} \cdot \frac{FP}{PD} = 1$.

Відрізок OE є проекцією відрізка OC на площину BED . Оскільки $OC \perp OD$, то за теоремою про три перпендикуляри $OE \perp OD$.

У прямокутному трикутнику DOE відрізок OK — висота, проведена до гіпотенузи DE . Тепер, скориставшись метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику, можна записати: $DK \cdot DE = OD^2$, $KE \cdot DE = OE^2$. Звідси $\frac{DK}{KE} = \frac{OD^2}{OE^2}$.

Міркуючи аналогічно, можна довести, що $\frac{EN}{NB} = \frac{OE^2}{OB^2}$, $\frac{BM}{MF} = \frac{OB^2}{OF^2}$, $\frac{FP}{PD} = \frac{OF^2}{OD^2}$.

Маємо: $\frac{DK}{KE} \cdot \frac{EN}{NB} \cdot \frac{BM}{MF} \cdot \frac{FP}{PD} = \frac{OD^2}{OE^2} \cdot \frac{OE^2}{OB^2} \cdot \frac{OB^2}{OF^2} \cdot \frac{OF^2}{OD^2} = 1$. ◀



1. Який тетраедр називають ортоцентричним?
2. Сформулюйте достатню умову того, що даний тетраедр є ортоцентричним.
3. Що називають середньою лінією тетраедра?

4. Яку властивість мають середні лінії тетраедра?
5. Що називають медіаною тетраедра?
6. Яку властивість мають медіани тетраедра?
7. Який тетраедр називають рівногранным?
8. Сформулюйте властивості рівногранного тетраедра.
9. Сформулюйте теорему Менелая для тетраедра.



ВПРАВИ

- 5.1.* Доведіть, що правильна трикутна піраміда є ортоцентричним тетраедром.
- 5.2.* Доведіть, що коли в ортоцентричному тетраедрі точка перетину висот збігається із центроїдом тетраедра, то такий тетраедр є правильним.
- 5.3.* Висоти тетраедра $DABC$, проведені з вершин A і D , перетинаються. Доведіть, що ребра AD і BC перпендикулярні.
- 5.4.* Висоти тетраедра $DABC$, проведені з вершин A і D , перетинаються. Доведіть, що висоти, проведені з вершин B і C , також перетинаються.
- 5.5.* Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі мимобіжні ребра попарно перпендикулярні.
- 5.6.* В ортоцентричному тетраедрі $DABC$ проведено висоту DH . Доведіть, що точка H — ортоцентр трикутника ABC .
- 5.7.* У тетраедрі основою однієї з висот є ортоцентр грані, до якої її проведено. Доведіть, що даний тетраедр є ортоцентричним.
- 5.8.* Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі середні лінії є рівними.
- 5.9.* Доведіть, що коли в тетраедрі середні лінії є рівними, то такий тетраедр є ортоцентричним.
- 5.10.* Чи існує тетраедр $DABC$ такий, що $AB = CD = 3$ см, $BC = AD = 4$ см, $AC = BD = 5$ см?
- 5.11.* Доведіть, що в рівногранному тетраедрі мимобіжні ребра є попарно рівними.
- 5.12.* Периметри всіх граней тетраедра є рівними. Доведіть, що такий тетраедр є рівногранным.
- 5.13.* На ребрах AC , AD , BD і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M , N , K і F так, що $CM : MA = 4 : 1$, $AN : ND = 3 : 5$, $BK : KD = 6 : 1$ і $BF : FC = 5 : 2$. Доведіть, що точки M , N , K і F належать одній площині.

- 5.14.* Площина перетинає ребра AB , BD , DC і AC тетраедра $DABC$ в точках F , M , N і P відповідно. Відомо, що $AF : FB = 1 : 3$, $DN : NC = 1 : 2$, $CP : PA = 5 : 1$. Знайдіть відношення $BM : MD$.
- 5.15.** Усі грані описаного навколо тетраедра паралелепіпеда є ромбами. Доведіть, що цей тетраедр є ортоцентричним.
- 5.16.** Доведіть, що в ортоцентричному тетраедрі $DABC$ виконуються рівності $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$.
- 5.17.** Доведіть, що коли в тетраедрі $DABC$ виконуються рівності $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$, то такий тетраедр є ортоцентричним.
- 5.18.** Доведіть, що в рівногранному тетраедрі середні лінії попарно перпендикулярні.
- 5.19.** Доведіть, що в рівногранному тетраедрі середні лінії перпендикулярні до мимобіжних ребер, середини яких вони сполучають.
- 5.20.** Доведіть, що медіани рівногранного тетраедра є рівними.
- 5.21.** Доведіть, що центроїд рівногранного тетраедра рівновіддалений від усіх його вершин.
- 5.22.** Доведіть, що коли тетраедр і рівногранний, і ортоцентричний, то він є правильним тетраедром.
- 5.23.** У тетраедрі $DABC$ відомо, що $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC = AD = c$. Знайдіть кут і відстань між прямими AB і CD .
- 5.24.** Доведіть, що сума косинусів двограних кутів рівногранного тетраедра при його ребрах дорівнює 2.
- 5.25.** Доведіть, що коли суми плоских кутів при кожній із трьох вершин тетраедра дорівнюють по 180° , то такий тетраедр є рівногранним.
- 5.26.** Точки M і N належать відповідно ребрам AB і AC трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точка F належить відрізку BA_1 . Відомо, що $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NC = 4 : 1$, $BF : FA_1 = 3 : 2$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C , площина MNF ділить відрізок CA_1 ?
- 5.27.** Точки D і P належать відповідно ребрам B_1C_1 і A_1C_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$. Точки K і M належать відрізкам CB_1 і CA_1 відповідно. Відомо, що $C_1D : DB_1 = 1 : 4$, $A_1P : PC_1 = 5 : 2$, $A_1M : MC = 3 : 4$, $B_1K : KC = 6 : 5$. Доведіть, що точки D , P , K і M належать одній площині.
- 5.28.* Тетраедр $DABC$ перерізано площиною так, що в перерізі утворився чотирикутник. Якого найменшого значення може набувати периметр цього чотирикутника, якщо $AD = BC = a$, $BD = AC = b$, $AB = CD = c$?

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

- 5.29. У трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. У якому відношенні, рахуючи від вершини C , центр вписаного кола трикутника ділить бісектрису CD ?
- 5.30. У трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$ і $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відстань між основами висот трикутника, проведених із вершин A і C .

**ПЛАТОНОВІ ТІЛА**

Вивчаючи навколишній світ, ви, напевно, звертали увагу, що деяким просторовим тілам притаманна природна краса та навіть досконалість. Наприклад, із двох многогранників, зображених на рисунку 5.20, перший (A) ви, скоріш за все, назвете красивим і гармонійним, а другий (B) — ні. Що ж змушує нас сприймати многогранник A «з більшою симпатією», ніж многогранник B ? Які геометричні властивості многогранників формують у нас таке ставлення? Звернемо увагу, що всі грані опуклого многогранника A є *рівними правильними* многокутниками (п'ятикутниками) і в кожній вершині сходиться *однакова* кількість ребер (по три ребра). Многогранники з такими властивостями виокремлюють у спеціальний клас — клас правильних многогранників.

 A  B

Рис. 5.20



Рис. 5.21

Означення. Опуклий многогранник називають **правильним**, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

Многогранник A , зображений на рисунку 5.20, — правильний многогранник, який має 12 граней. Його називають **додекаедром**, що в перекладі з грецької означає «дванадцятигранник». Многогранник B не є правильним.

З дитинства кожного з нас оточували правильні многогранники. Кубики та пірамідки — одні з перших наших іграшок (рис. 5.21). Справді, куб — правильний многогранник, адже всі шість граней куба — рівні квадрати (правильні чотирикутники) і в кожній вершині сходиться однакова кількість ребер (по три ребра). Куб також називають **гексаедром** (від грец. «шестигранник»). Трикутна піраміда (тетраедр, від грец. «чотиригранник»), усі грані якої — правильні трикутники, також є правильним многогранником (подумайте чому).

Правильні многогранники в стереометрії є в деякому роді аналогами правильних многокутників у планіметрії. Як ви знаєте, на площині існують правильні трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо. Узагалі, для кожного натурального значення n ($n \geq 3$) існує правильний n -кутник. З правильними многогранниками справа інакша.

Окрім правильного тетраедра, куба й додекаедра, із часів Стародавньої Греції відомо ще два правильних многогранники: **октаедр** (від грец. «восьмигранник») та **ікосаедр** (від грец. «двадцятигранник») (рис. 5.22).

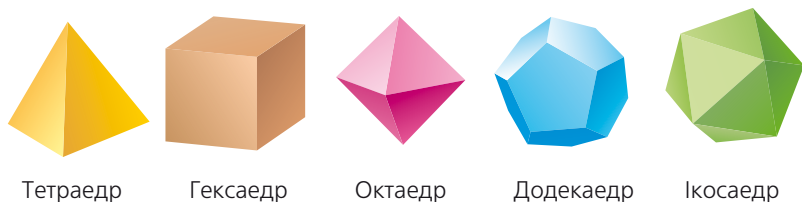


Рис. 5.22

Усі вісім граней октаедра є правильними трикутниками, і в кожній вершині сходиться чотири ребра. Октаедр зручно уявляти як об'єднання двох чотирикутних пірамід, склеєних своїми основами. Якщо бічні грані цих пірамід — рівні правильні трикутники, то отриманий після склеювання многогранник є октаедром (рис. 5.23). Гранями ікосаедра є рівні правильні трикутники, і в кожній вершині ікосаедра сходиться п'ять ребер.

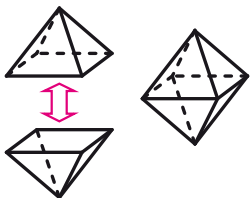


Рис. 5.23

Вивчення правильних многогранників було однією з основних задач геометрів Ста-

родавної Греції. Багато грецьких філософів того часу вважали, що правильні многогранники лежать в основі всієї світобудови. Наприклад, Платон (427–347 рр. до н. е.) вважав, що правильні многогранники символізують природні стихії. Правильні многогранники іноді ще називають платоновими тілами.

Геометрам Стародавньої Греції вдалося описати всі можливі правильні многогранники. Виявилося, що існує тільки п'ять правильних многогранників (тетраедр, куб, додекаедр, октаедр та ікосаедр). Цей факт можна довести, спираючись на те, що сума всіх плоских кутів опуклого многогранного кута менша від 360° .

У правильному многограннику кожна грань є правильним n -кутником. Оскільки сума всіх кутів n -кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$, то кожний плоский кут такого n -кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Якщо до вершини правильного многогранника прилягає k таких плоских кутів, то їхня сума дорівнює $k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n}$, тому

$$k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} < 360^\circ;$$

$$k < \frac{2n}{n-2}.$$

Останню нерівність перепишемо так:

$$k < 2 + \frac{4}{n-2}. \quad (1)$$

З одного боку, оскільки кожна грань многогранника містить не менше ніж три ребра, то $n \geq 3$. З другого боку, якщо $n \geq 6$, то з нерівності (1) випливає, що $k < 3$. Проте до вершини многогранника не може прилягати менше ніж три плоских кути, тому при $n \geq 6$ правильних многогранників не існує. Залишається розглянути такі можливості: $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Якщо $n = 3$, то гранями правильного многогранника будуть правильні трикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 6$. Цьому випадку відповідають: тетраедр ($k = 3$), октаедр ($k = 4$) та ікосаедр ($k = 5$).

Якщо $n = 4$, то гранями правильного многогранника будуть квадрати. З нерівності (1) випливає, що $k < 4$. Цьому випадку відповідає куб ($k = 3$).

Якщо $n = 5$, то гранями правильного многогранника будуть правильні п'ятикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 3\frac{1}{3}$. Цьому випадку відповідає додекаедр ($k = 3$).

Об'єкти, які за формою нагадують правильні многогранники, нерідко трапляються в природі. Наприклад, форму куба мають кристали кам'яної солі (рис. 5.24); кристали алмазів мають форму октаедра (рис. 5.25); кристали піриту нагадують додекаедр (рис. 5.26). Біологи виявили, що частини деяких вірусів мають форму ікосаедра. Елементи багатьох архітектурних об'єктів сконструйовані у вигляді правильних многогранників (рис. 5.27).



Кам'яна сіль

Рис. 5.24



Алмаз

Рис. 5.25



Пірит

Рис. 5.26



Рис. 5.27



ГЕОМЕТРИЧНЕ ТІЛО

У п. 1 ви ознайомилися з поняттям геометричного тіла (або просто тіла). Нагадаємо, що многогранник, куля, конус є тілами, а, наприклад, площина, двогранний кут або фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами. У цьому оповіданні ми глибше ознайомимося із цим непростим поняттям.

Опишемо властивості, які виокремлюють тіла з усіх геометричних фігур.

Означення. Фігуру (множину точок простору) називають **відкритою**, якщо кожна її точка належить фігурі разом з деякою кулею із центром у цій точці.

Прикладом відкритої множини може слугувати весь простір.

Ще один приклад відкритої множини можна отримати, розглянувши «кулю без своєї сфери», тобто множину B точок, відстань від яких до центра O менша від радіуса R . Справді, виберемо в цій множині B довільну точку X . Тоді $OX < R$ (рис. 5.28). Якщо розглянути маленьку кулю радіуса $r = \frac{R - OX}{2}$ із центром у точці X , то вона повністю належить даній множині B , а тому B — відкрита множина.

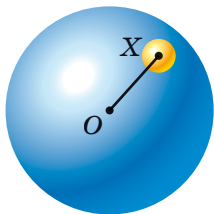


Рис. 5.28



Рис. 5.29

Наприклад, пряма AB не є відкритою множиною, оскільки куля із центром у будь-якій її точці не належить цій прямій (рис. 5.29). Узагалі, будь-яка плоска фігура не є відкритою.

Означення. Фігуру називають **обмеженою**, якщо вона повністю міститься в деякій кулі.

Наприклад, відрізок, піраміда, куля — обмежені фігури, а пряма, площина, двогранний кут — необмежені фігури.

Означення. Точку називають **точкою дотику фігури**, якщо будь-яка куля із центром у цій точці містить щонайменше одну точку цієї фігури.

Наприклад, кожна точка кулі є точкою дотику цієї кулі, кожна точка відрізка є точкою дотику цього відрізка. Узагалі, кожна точка фігури є її точкою дотику. Однак не слід думати, що точка дотику обов'язково належить фігурі. Приміром, розглянемо відрізок AB , з якого видалили його кінці — точки A і B . Окрім точок, що лежать між A і B , точками дотику цієї фігури будуть також точки A і B . Справді, довільна куля із центром у будь-якій із цих точок міститиме внутрішні точки відрізка AB .

Наведемо приклад точки, яка не є точкою дотикання. Розглянемо кулю радіуса R із центром у точці O та точку A , яка не належить даній кулі. Це означає, що довжина відрізка OA більша за радіус R кулі. Тоді точка A не є точкою дотикання цієї кулі. Справді, якщо розглянути ще одну кулю із центром у точці A і радіусом $r = \frac{OA - R}{2}$, то ця куля не перетинатиметься з даною кулею (рис. 5.30).

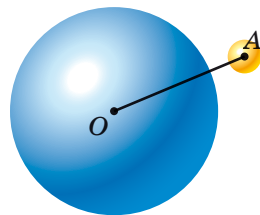


Рис. 5.30

Означення. Фігуру називають **зв'язною**, якщо при будь-якому її розбитті на дві частини хоча б одна із цих частин містить точки дотикання другої частини.

Розглянемо, наприклад, фігуру F на рисунку 1.2. Фігура F — це об'єднання двох куль. Зрозуміло, що фігура F не є зв'язною, оскільки її можна розбити на дві частини (дві кулі, з яких вона складається), причому кожна з них не містить точок дотикання другої частини. Тоді як пряма, площина, конус — приклади зв'язних фігур.

Означення. **Поверхнею** фігури Φ називають множину точок, що є точками дотикання як для самої фігури, так і для фігури, яка складається з точок простору, що не належать фігурі Φ .

Наприклад, поверхнею кулі є її сфера. Об'єднання всіх граней многогранника є поверхнею многогранника.

Тепер ми можемо дати означення тіла.

Означення. **Тілом** називають обмежену фігуру, яка є об'єднанням непорожньої зв'язної відкритої фігури та її поверхні.

Після наведеного означення ви можете самі обґрунтувати, чому пряма, площина, двогранний кут, а також фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами.

Поняття відкритої множини, точки дотикання, зв'язності є одними з фундаментальних у *топології* — важливому розділі сучасної математики.

Щедра на таланти українська земля подарувала світу цілу плеяду видатних топологів — І. М. Гельфанда, О. А. Олійник, П. С. Урисона та багатьох інших.

Ізраїль Мойсейович Гельфанд

(1913–2009)

Народився в с. Окни (нині Одеська область).

Не маючи закінченої середньої освіти й не пройшовши курсу навчання в університеті, завдяки блискучим здібностям і наполегливій праці зумів стати видатним ученим.

Основні результати здобув у таких галузях математики, як функціональний аналіз, математична фізика, прикладна математика, теорія топологічних лінійних просторів. Опублікував понад 800 наукових праць. Іноземний член Національної академії наук США, Паризької академії наук, Шведського та Ірландського королівських товариств, почесний доктор Оксфордського, Паризького (Сорбонна), Гарвардського, Упсальського, Ліонського, Пізанського університетів.

**Ольга Арсенівна Олійник**

(1925–2001)

Народилася в с. Матусів Черкаської області. Перша жінка в СРСР, яка у 29 років стала доктором фізико-математичних наук.

Основні досягнення пов'язані з дослідженнями в галузі диференціальних рівнянь і топології.

Підготувала 58 кандидатів

і 14 докторів фізико-математичних наук.

Член Італійської академії наук у Палермо,

Саксонської академії наук,

Единбурзького королівського товариства.

Нагороджена іменною медаллю Коллеж де Франс.

**Павло Самуїлович Урисон**

(1898–1924)

Народився в м. Одеса.

Разом з П. С. Александровим заснував всесвітньо відому топологічну школу.

Створив новий напрямок у топології — теорію розмірностей.

Основні досягнення пов'язані з такими розділами математики, як топологія, диференціальні рівняння та геометрія.



**ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1****Многогранник**

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Призма

Многогранник, дві грані якого — рівні n -кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають n -кутною призмою.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Площа бічної поверхні прямої призми

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

Паралелепіпед

Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограми.

Паралелепіпед називають прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають вимірами прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри є рівними.

Властивості паралелепіпеда

Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.