А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с. : іл.

ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : 514.1

ISBN 978-966-474-000-0

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви завершуєте вивчення шкільного курсу стереометрії. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу й красиву науку, а отже, з інтересом оволодіватимете новими знаннями, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал підручника, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

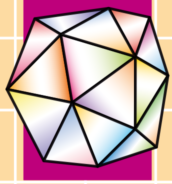
Дерзайте! Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;
◄	закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи

Синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. МНОГОГРАННИКИ

1. **Призма**
2. **Паралелепіпед**
3. **Піраміда**
4. **Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда**

- У цьому параграфі ви уточните й розширите свої знання про многогранники.
- Отримаєте нові відомості про призму, піраміду та їхні окремі види.
- Ознайомитеся з новим для вас многогранником — зрізаною пірамідою.

1. Призма

На рисунку 1.1 зображено відомі вам просторові фігури. Кожна із цих фігур має скінченні розміри та складається з поверхні (межі фігури) та частини простору, обмеженої цією поверхнею.

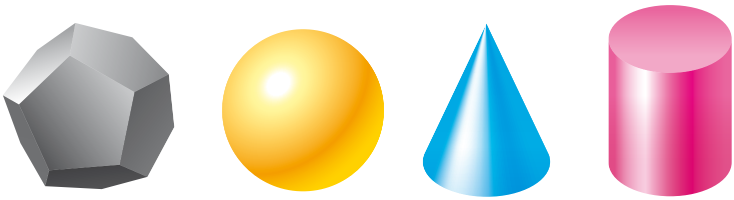


Рис. 1.1

Многогранник, кулю, конус, циліндр відносять до фігур, які називають **геометричними тілами** або просто **тілами**.

Не будь-яка фігура в просторі є тілом. Наприклад, пряма, площина, двогранний кут не є тілами. Ці фігури необмежені. Тіло ж — обмежена фігура. Проте й не кожна обмежена фігура є тілом. На рисунку 1.2 зображено приклади обмежених фігур F і G, які не є тілами. Строге означення тіла виходить за рамки розглядуваного курсу.

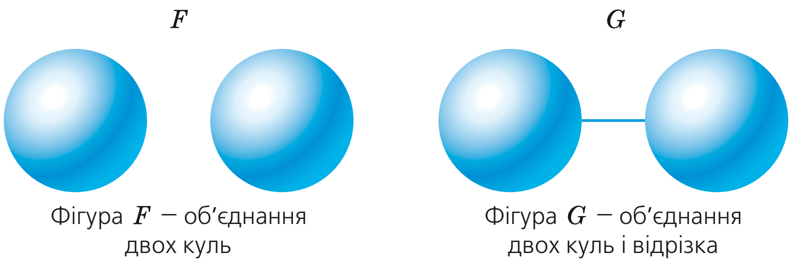


Рис. 1.2

Докладніше про тіло ви зможете прочитати в оповіданні на с. 37–43.

Означення. Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Такі елементи многогранника, як грані, ребра та вершини, вам уже відомі.

Дві грані многогранника називають **сусідніми**, якщо вони мають спільне ребро. Наприклад, грані $A_1B_1C_1D_1$ і A_1B_1BA куба

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) є сусідніми, оскільки ребро A_1B_1 у них спільне.

Нехай точка M — вершина многогранника. Кут з вершиною M грані многогранника називають **плоским кутом многогранника при вершині** M. Наприклад, на рисунку 1.3 кут DAB є плоским кутом куба при вершині A.

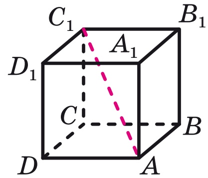


Рис. 1.3

Плоскі кути многогранника, що мають спільну вершину M, обмежують частину простору, яку називають **многогранним кутом** (рис. 1.4). Точку M називають **вершиною многогранного кута**. Промені MA_1, MA_2, MA_3, MA_4, MA_5 називають **ребрами многогранного кута**, а плоскі кути даного многогранника, що мають спільну вершину M, — **гранями многогранного кута**. Залежно від кількості граней многогранні кути називають тригранними, чотиригранними тощо. Наприклад, на рисунку 1.4 зображено п'ятигранний кут.

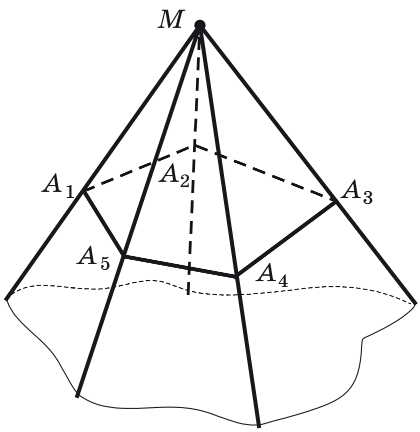


Рис. 1.4

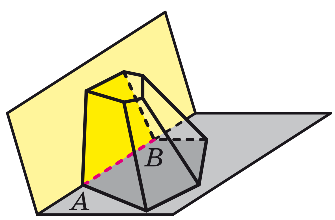


Рис. 1.5

Двогранним кутом многогранника при ребрі AB називають двогранний кут з ребром AB, грані якого містять сусідні грані многогранника, для яких ребро AB є спільним (рис. 1.5).

Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, називають **діагоналлю многогранника**. Наприклад, відрізок AC_1 — діагональ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3).

Многогранники бувають опуклими та неопуклими.

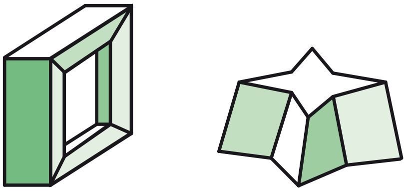


Рис. 1.6

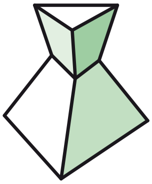


Рис. 1.7

Означення. Многогранник називають *опуклим*, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Куб і тетраедр — приклади опуклих многогранників. На рисунку 1.6 зображено неопуклі многогранники.

Усі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. Проте навіть якщо кожна грань многогранника — опуклий многокутник, то цей многогранник не обов'язково є опуклим (рис. 1.7).

Площею поверхні многогранника називають суму площ усіх його граней.

Нехай у просторі задано многогранник і площину, що перетинаються. Якщо спільні точки многогранника та площини утворюють многокутник, то цей многокутник називають **перерізом многогранника** площиною, а саму площину — **січною площиною** (рис. 1.8).

Зупинимося докладніше на вже знайомому вам виді многогранника — призмі.

Означення. Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають *n-кутною призмою*.

Нагадаємо, що паралелограми, про які йдеться в означенні, називають бічними гранями призми; рівні n-кутники — основами призми; сторони основ — ребрами основ призми; ребра, які не належать основам, — бічними ребрами призми (рис. 1.9).

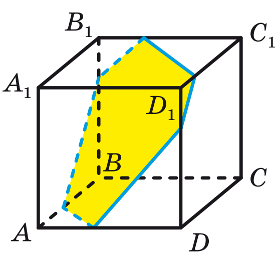


Рис. 1.8

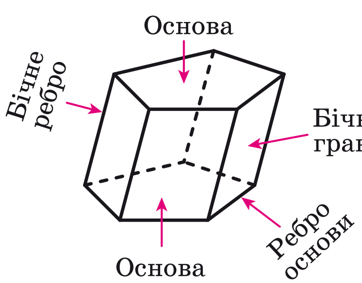


Рис. 1.9

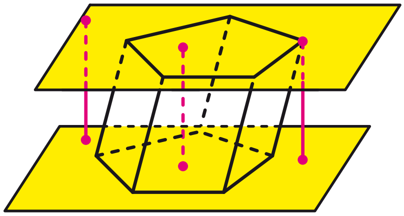


Рис. 1.10

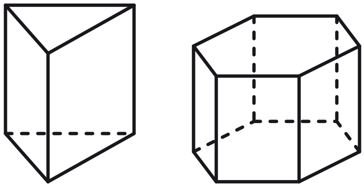


Рис. 1.11

Оскільки сусідні бічні грані призми — паралелограми, що мають спільну сторону — бічне ребро, то *всі бічні ребра призми є рівними та паралельними*.

Висотою призми називають перпендикуляр, опущений з якої-небудь точки площини однієї основи на площину другої основи (рис. 1.10). Довжина висоти призми дорівнює відстані між площинами її основ.

Означення. Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Наприклад, прямокутний паралелепіпед є окремим видом прямої призми.

Кожне бічне ребро прямої призми є її висотою. Усі бічні грані прямої призми — прямокутники.

Якщо призма не є прямою, то її називають **похилою**.

Означення. Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Наприклад, куб є окремим видом правильної чотирикутної призми.

На рисунку 1.11 зображено правильні трикутну та шестикутну призми.

Розглянемо опуклу n-кутну призму ($n > 3$). Переріз призми площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає основи призми по діагоналях (рис. 1.12). Такий переріз називають **діагональним перерізом призми**.

Діагональним перерізом будь-якої призми є паралелограм, а діагональним перерізом прямої призми — прямокутник (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні призми** (ще говорять: «**площа повної поверхні призми**») називають суму площ усіх її граней.

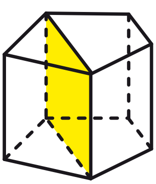


Рис. 1.12

Очевидно, що виконується така рівність:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа поверхні призми, $S_б$ — площа бічної поверхні призми, $S_{осн}$ — площа основи призми.

Теорема 1.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.***

Доведення. Кожна бічна грань прямої призми — прямокутник, одна сторона якого — ребро основи, а друга — бічне ребро. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини ребер основи призми, b — довжина бічного ребра. Тоді $S_б = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, b$. Оскільки сума, записана в дужках, дорівнює периметру основи призми, то теорему доведено. ◄

Твердження теореми 1.1 зручно подати у вигляді однієї з формул:

$$\boxed{\begin{aligned} S_б &= P_{осн} \cdot b, \\ S_б &= P_{осн} \cdot h, \end{aligned}}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи прямої призми, b — довжина бічного ребра, h — довжина висоти призми.

Задача. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Доведіть, що площа бічної поверхні призми дорівнює добутку периметра перерізу та бічного ребра.

Розв'язання. Доведення проведемо для трикутної призми. Для інших n-кутних призм, де $n > 3$, доведення буде аналогічним.

Нехай трикутник MNP — переріз, про який ідеться в умові задачі (рис. 1.13). Доведемо, що $S_б = P_{MNP} \cdot AA_1$. Маємо: $AA_1 \perp MPN$. Отже, $AA_1 \perp MP$. Тоді відрізок MP — висота паралелограма AA_1B_1B. Аналогічно можна довести, що відрізки PN і NM — відповідно висóти паралелограмів CC_1B_1B і CC_1A_1A.

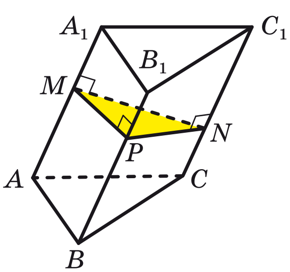


Рис. 1.13

Оскільки площа паралелограма дорівнює добутку висоти та сторони паралелограма, до якої проведено висоту, то можна записати:

$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot BB_1 + NM \cdot CC_1.$$

Оскільки $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то

$$S_б = MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 =$$
$$= (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MPN} \cdot AA_1. \ ◄$$

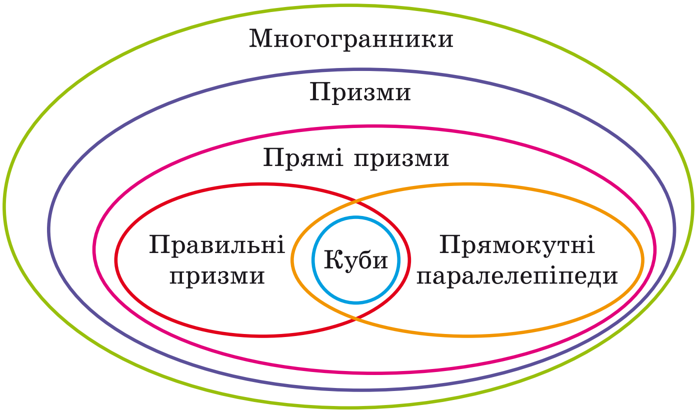


Рис. 1.14

Зв'язок між многогранниками, вивченими в цьому пункті, ілюструє схема, зображена на рисунку 1.14.

Вивчаючи многогранники, неможливо не згадати прізвище видатного українського математика Георгія Феодосійовича Вороного. Досягнення Г. Ф. Вороного знайшли широке застосування практично в усіх природничих науках: фізиці, хімії, біології тощо. Наприклад, поліедри[1] Вороного—Діріхле (рис. 1.15) використовують для аналізу структури кристалів.

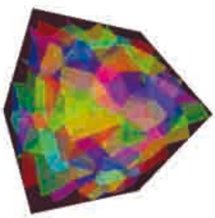


Рис. 1.15

Георгій Феодосійович Вороний
(1868–1908)

Народився в с. Журавка (нині Чернігівська область). Закінчив Петербурзький університет, був професором Варшавського університету. Г. Ф. Вороний зробив важливі відкриття в геометрії многогранників. Термін «діаграма Вороного» став настільки поширеним у дослідженнях у галузі геометричних алгоритмів, що деякі фахівці пов'язують народження обчислювальної геометрії саме із цим об'єктом.

---

[1] Поліедром називають об'єднання многогранників.

1. Що називають многогранником?
2. Які грані многогранника називають сусідніми?
3. Опишіть фігуру, яку називають многогранним кутом.
4. Що називають двогранним кутом многогранника?
5. Який многогранник називають опуклим?
6. Що називають призмою?
7. Що називають висотою призми?
8. Яку призму називають прямою? похилою?
9. Яку призму називають правильною?
10. Що називають діагональним перерізом призми?
11. Що називають площею поверхні призми? бічної поверхні призми?
12. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?

ВПРАВИ

1.1.° Яку найменшу кількість граней може мати призма? Скільки ця призма має:
1) вершин; 2) ребер; 3) бічних ребер?

1.2.° Призма має 12 граней. Який многокутник лежить в її основі?

1.3.° У якій призмі бічні ребра паралельні її висоті?

1.4.° Доведіть твердження: якщо дві сусідні грані призми перпендикулярні до площини її основи, то дана призма є прямою. Чи буде дане твердження правильним, якщо з його формулювання виключити слово «сусідні»?

1.5.° Чи є правильним твердження:
1) бічне ребро прямої призми перпендикулярне до будь-якої діагоналі її основи;
2) якщо всі ребра призми рівні, то вона є правильною;
3) якщо всі ребра прямої призми рівні, то вона є правильною?

1.6.° Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, один із кутів якої дорівнює 110° (рис. 1.16). Знайдіть двогранні кути при бічних ребрах призми.

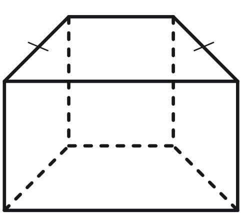


Рис. 1.16

1.7.° Доведіть, що в будь-якій призмі кількість вершин є парним числом, а кількість ребер — числом, кратним 3.

1.8.° Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а висота — $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть діагональ призми.

1.9.° Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть висоту призми.

1.10.° Точки D і E — середини ребер AC і BC правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 1.17). Площина, яка проходить через пряму DE та утворює з площиною ABC кут 30°, перетинає ребро CC_1 у точці F. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 12 см.

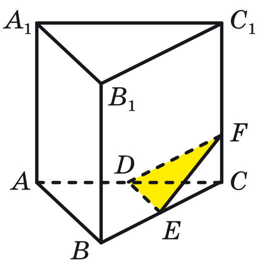


Рис. 1.17

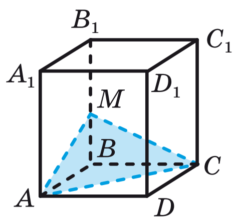


Рис. 1.18

1.11.° Через діагональ AC основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут 45° і перетинає ребро BB_1 у точці M (рис. 1.18). Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см.

1.12.° Знайдіть площу бічної поверхні прямої призми, висота якої дорівнює 6 см, а основою є паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см.

1.13.° Знайдіть сторону основи правильної семикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 420 см^2.

1.14.° Знайдіть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота дорівнює H.

1.15.° Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота дорівнює H.

1.16.° Кут між бічним ребром і площиною основи похилої призми дорівнює 30°, висота призми — 10 см. Знайдіть бічне ребро призми.

1.17.° У похилій чотирикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо даний переріз є ромбом зі стороною 5 см, а бічне ребро призми дорівнює 8 см.

1.18.° У похилій трикутній призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра призми та перпендикулярний до них. Знайдіть бічне ребро призми, якщо даний переріз є прямокутним трикутником з катетами 9 см і 12 см, а площа бічної поверхні призми дорівнює 288 см^2.

1.19.° Точка $C_1(2; -3; 4)$ — вершина призми $ABCA_1B_1C_1$, основа ABC якої належить площині $z = 7$. Запишіть рівняння площини, якій належить основа $A_1B_1C_1$.

1.20.° Точка $A(4; -1; 6)$ — вершина призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основа $A_1B_1C_1D_1$ якої належить площині $x = 0$. Запишіть рівняння площини $ABCD$.

1.21.• Основа призми належить площині $2x + y - z - 7 = 0$. Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка $X(1; 5; -3)$.

1.22.• Основа призми належить площині $-x + 3y + 2z = 0$. Запишіть рівняння площини, якій належить друга основа призми, якщо в цій площині лежить точка $M(6; -3; 1)$.

1.23.• Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a, а кут між діагоналлю призми та бічною гранню становить $30°$. Знайдіть:

1) висоту призми;
2) кут між діагоналлю призми та площиною основи.

1.24.• Знайдіть діагоналі правильної шестикутної призми, кожне ребро якої дорівнює a.

1.25.• Основа прямої призми — ромб зі стороною a та гострим кутом α. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут β. Знайдіть діагоналі призми.

1.26.• Основою прямої призми, діагоналі якої дорівнюють 10 см і 16 см, є ромб. Знайдіть сторону основи призми, якщо її висота дорівнює 4 см.

1.27.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Через пряму CC_1 проведено площину, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає ребро AB у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу призми, якщо $AD = 18$ см, $BD = 2$ см, а висота призми дорівнює 8 см.

1.28.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, відрізок CM — медіана трикутника ABC. Висота призми дорівнює гіпотенузі її основи. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через прямі CC_1 і CM, якщо $AC = 30$ см, $BC = 40$ см.

1.29.• Кожне ребро правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. Знайдіть:
1) площу перерізу призми, який проходить через точки A, B і C_1;
2) кут між площиною даного перерізу та площиною основи призми.

1.30.• Прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$) є основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$. Площина, яка проходить через пряму AC, утворює з площиною основи призми кут β і перетинає ребро BB_1 у точці D. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо $\angle BAC = \alpha$, $BD = a$.

1.31.• Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α, більша діагональ ромба дорівнює d. Через меншу діагональ нижньої основи та вершину гострого кута верхньої основи провели площину, яка утворює з площиною нижньої основи призми кут β. Знайдіть:
1) висоту призми;
2) площу утвореного перерізу призми.

1.32.• Сторона основи правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 2 см, а бічне ребро — 6 см. Діагоналі бічної грані AA_1B_1B перетинаються в точці D. Знайдіть кут між прямою CD і площиною ABC.

1.33.• Сторона основи правильної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 см, а бічне ребро — $\sqrt{5}$ см. Діагоналі бічної грані CC_1D_1D перетинаються в точці M. Знайдіть кут між прямою AM і площиною ABC.

1.34.• Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 5 см, 12 см і 13 см, а площа повної поверхні — 270 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.35.• Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 96 см^2, а площа повної поверхні — 128 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.36.• Обчисліть площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 30°.

1.37.• Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Чому дорівнює площа бічної поверхні призми?

1.38.• Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 4 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.39.$^{\bullet}$ Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, основи якої BC і AD відповідно дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Знайдіть:

1) площу бічної поверхні призми;

2) площу перерізу призми, який проходить через ребра AD і B_1C_1.

1.40.$^{\bullet}$ Діагональ бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 288 см^2. Знайдіть сторону основи та висоту призми.

1.41.$^{\bullet}$ Площини граней AA_1B_1B і AA_1C_1C похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярні, $AA_1 = 9$ см. Відстань між прямими AA_1 і BB_1 дорівнює 8 см, а між прямими AA_1 і CC_1 — 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.42.$^{\bullet}$ Двогранний кут при одному з бічних ребер похилої трикутної призми дорівнює $120°$. Відстань від даного ребра до одного з решти бічних ребер дорівнює 16 см, а до другого — 14 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 840 см^2.

1.43.$^{\bullet\bullet}$ Висота правильної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює 6 см. Точки D і E — середини ребер A_1C_1 і B_1C_1 відповідно. Площина, яка проходить через прямі AB і DE, утворює кут $60°$ із площиною ABC. Знайдіть площу перерізу призми цією площиною.

1.44.$^{\bullet\bullet}$ Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а висота призми — 6 см. Через діагональ основи проведено переріз призми, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу.

1.45.$^{\bullet\bullet}$ Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h. У двох сусідніх бічних гранях проведено дві діагоналі, які мають спільний кінець. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі, якщо кут між ними дорівнює α.

1.46.$^{\bullet\bullet}$ Висота правильної трикутної призми дорівнює h. Кут між діагоналями двох бічних граней, які мають спільний кінець, дорівнює α. Знайдіть площу перерізу, який проходить через дані діагоналі.

1.47.$^{\bullet\bullet}$ Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a. Ребро AA_1 утворює з кожним із ребер AB і AC кут $45°$.

1) Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.48.•• Кожне ребро похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a, проекцією точки A_1 на площину ABC є центр трикутника ABC.

1) Доведіть, що грань BB_1C_1C є прямокутником.
2) Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.49.* Основою призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle ACB = 90°$), бічні грані призми — квадрати. Знайдіть кут між прямими AC_1 і CB_1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.50. Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BEDF$ — паралелограм.

1.51. Більша діагональ ромба дорівнює d, а його гострий кут дорівнює α. Знайдіть:

1) сторону ромба;
2) меншу діагональ ромба;
3) площу ромба;
4) радіус кола, вписаного в ромб.

2. Паралелепіпед

Означення. Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

На рисунку 2.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Будь-яка грань паралелепіпеда є паралелограмом.

Дві несусідні грані паралелепіпеда називають **протилежними гранями паралелепіпеда**. Наприклад, на рисунку 2.1 грані AA_1B_1B і DD_1C_1C є протилежними.

Оскільки $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (рис. 2.1), то за ознакою паралельності площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Міркуючи аналогічно, можна довести, що *будь-які дві протилежні грані паралелепіпеда лежать у паралельних площинах*.

Паралелепіпед називають **прямим**, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи. У прямого паралелепіпеда всі бічні грані є прямокутниками, а основи — паралелограмами.

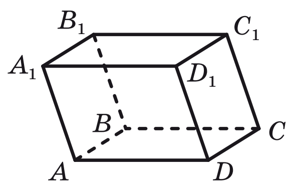


Рис. 2.1

Прямий паралелепіпед називають **прямокутним**, якщо його основами є прямокутники.

На рисунку 2.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

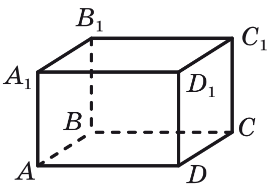


Рис. 2.2

Правильна чотирикутна призма є окремим видом прямокутного паралелепіпеда.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають **вимірами прямокутного паралелепіпеда**. На рисунку 2.2 довжини ребер AB, AD і AA_1 є вимірами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Прямокутний паралелепіпед називають **кубом**, якщо його виміри є рівними. Усі грані куба є квадратами.

Зв'язок між паралелепіпедами та їхніми окремими видами ілюструє схема, зображена на рисунку 2.3.

Рис. 2.3

Розглянемо деякі властивості паралелепіпеда.

Теорема 2.1. ***Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.***

Доведення. Розглянемо діагональний переріз AA_1C_1C паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.4). У паралелограмі AA_1C_1C проведемо діагоналі AC_1 і A_1C. Ці відрізки також є діагоналями даного паралелепіпеда. Нехай проведені діагоналі перетинаються в точці O. Ця точка є серединою кожної з діагоналей AC_1 і A_1C.

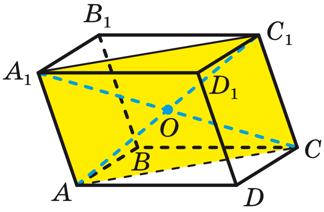


Рис. 2.4

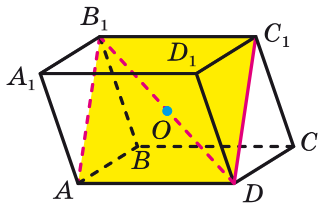


Рис. 2.5

Доведемо, що точка O є також серединою кожної з двох інших діагоналей BD_1 і B_1D даного паралелепіпеда.

Розглянемо чотирикутник AB_1C_1D (рис. 2.5). Він є паралелограмом (доведіть це самостійно) з діагоналями AC_1 і B_1D. Тоді точка O є серединою відрізка B_1D.

Розглянувши діагональний переріз BB_1D_1D, можна аналогічно довести, що точка O є серединою діагоналі BD_1. ◀

Теорема 2.2. ***Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.***

Доведення. Розглянемо діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.6). Доведемо, що

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Оскільки трикутник ABC прямокутний ($\angle ABC = 90°$), то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Оскільки $BC = AD$, то

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

Даний паралелепіпед є прямокутним, тому $C_1C \perp ABC$. Отже, трикутник ACC_1 прямокутний ($\angle ACC_1 = 90°$). Тоді

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

Оскільки $CC_1 = AA_1$, то

$$AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2.$$

Ураховуючи рівність (1), можна записати:

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Для решти трьох діагоналей доведення є аналогічними. ◀

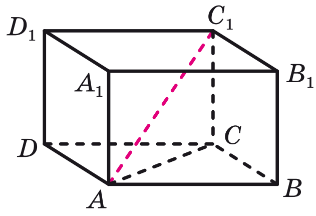


Рис. 2.6

Із теореми 2.2 випливає, що діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

1. Що називають паралелепіпедом?
2. Які грані паралелепіпеда називають протилежними?
3. Який паралелепіпед називають прямим?
4. Який паралелепіпед називають прямокутним?
5. Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
6. Яку властивість мають діагоналі паралелепіпеда?
7. Сформулюйте теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.

ВПРАВИ

2.1.° Чи можна вважати правильним таке означення куба: «Кубом називають правильну чотирикутну призму, висота якої дорівнює стороні основи»?

2.2.° Доведіть, що в прямому паралелепіпеді площина діагонального перерізу перпендикулярна до площини основи.

2.3.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.4.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота — 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2.5.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.7), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою DC_1 і площиною BCC_1;
2) між прямою B_1D і площиною ABB_1.

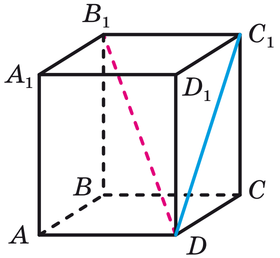


Рис. 2.7

2.6.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2.7), $AB = 5$ см, $AD = 7$ см, $AA_1 = 12$ см. Знайдіть кут:
1) між прямою DC_1 і площиною $A_1B_1C_1$;
2) між прямою B_1D і площиною ABC.

2.7.° Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

2.8.° Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 1 : 2 : 2, а діагональ паралелепіпеда дорівнює 6 см.

2.9.° Ребро куба дорівнює a. Чому дорівнює діагональ куба?

2.10.° Площа поверхні куба дорівнює 216 см². Знайдіть площу його діагонального перерізу.

2.11.• Точки $A_1(-4; 0; 1)$, $B_1(-4; 0; 6)$, $C_1(2; 0; 6)$, $C\ (2; -3; 6)$ є вершинами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати вершин A, B, D, D_1.

2.12.• Точки $A(3; 2; 0)$, $B(6; 2; 0)$, $D(3; 5; 0)$, $A_1(3; 2; -1)$ є вершинами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати вершин C, B_1, C_1, D_1.

2.13.• Точки $A(1; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(3; 2; 0)$, $C_1(6; 3; -2)$ є вершинами паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть:
1) координати вершин A_1, B_1 і D_1;
2) довжину бічного ребра паралелепіпеда.

2.14.• Точки $A(1; 2; 0)$, $B(4; 6; 0)$, $D(-3; 5; 0)$ є вершинами прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, висота якого дорівнює 5. Знайдіть:
1) координати вершини C_1;
2) довжину діагоналі паралелепіпеда.

2.15.• Із чотирьох рівних кубів, ребро яких дорівнює 1 см, склали прямокутний паралелепіпед. Чому дорівнює площа повної поверхні цього паралелепіпеда?

2.16.• Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α і меншою діагоналлю d. Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.17.• Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною 6 см і кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.18.• Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 4 см, а один із кутів основи дорівнює 45°. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.19.• Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см, а один із кутів основи дорівнює 30°. Площа діагонального перерізу паралелепіпеда, який проходить через меншу діагональ основи, дорівнює 8 см². Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

2.20.$^{\bullet}$ Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 11 см, 19 см і 20 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

2.21.$^{\bullet}$ Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша за його виміри відповідно на 9 см, на 8 см і на 5 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

2.22.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли діагоналі прямого паралелепіпеда рівні, то даний паралелепіпед є прямокутним.

2.23.$^{\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$ зі стороною 6 см, $\angle BAD = 45^\circ$. Через пряму AD і вершину B_1 проведено площину, яка утворює з площиною ABC кут 60°. Знайдіть:
1) бічне ребро паралелепіпеда;
2) площу перерізу паралелепіпеда площиною AB_1D.

2.24.$^{\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є паралелограм $ABCD$, $AD = 8$ см, $\angle BAD = 30^\circ$. Кут між площинами ABC і A_1CD дорівнює 45°. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

2.25.$^{\bullet\bullet}$ Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з однією з бічних граней — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.26.$^{\bullet\bullet}$ Одна зі сторін основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює a. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а з даною стороною основи — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.27.$^{\bullet\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда є ромб, а площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.28.$^{\bullet\bullet}$ Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S. Площі діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Знайдіть бічне ребро паралелепіпеда.

2.29.$^{\bullet\bullet}$ Через діагональ BD основи $ABCD$ і вершину C_1 прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину, яка утворює кут 30° із площиною основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо $BC = 8$ см, $CD = 4$ см, $\angle BCD = 60^\circ$.

2.30.$^{\bullet\bullet}$ Основа $ABCD$ паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом. Вершина A_1 рівновіддалена від усіх вершин основи $ABCD$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а бічне ребро паралелепіпеда — 6 см.

2.31.•• Основа $ABCD$ похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом, а площини граней AA_1B_1B і CC_1D_1D перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані AA_1D_1D, якщо кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 8 см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.32. У трикутнику ABC відомо, що $AC = BC$, $AB = 2\sqrt{2}$ см, $\angle BAC = 30°$, відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть відрізок AD.

2.33. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а бічна сторона — 30 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

3. Піраміда

Означення. Многогранник, одна грань якого — n-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають *n-кутною пірамідою* (рис. 3.1).

Нагадаємо, що трикутники, які мають спільну вершину, називають бічними гранями піраміди, а саму спільну вершину — вершиною піраміди; n-кутник, про який ідеться в означенні, називають основою піраміди, а його сторони — ребрами основи піраміди; ребра, які не належать основі, називають бічними ребрами піраміди (рис. 3.1).

Висотою піраміди називають перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи (рис. 3.2).

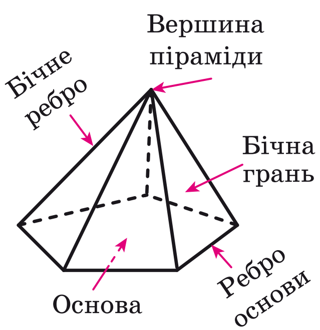


Рис. 3.1

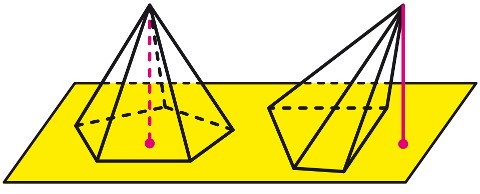


Рис. 3.2

Розглянемо опуклу n-кутну піраміду ($n > 3$). Переріз піраміди площиною, яка проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, перетинає площину основи піраміди по діагоналі (рис. 3.3). Такий переріз називають **діагональним перерізом піраміди**.

Діагональним перерізом піраміди є трикутник.

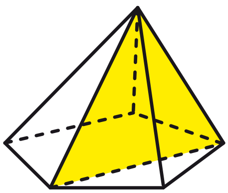


Рис. 3.3

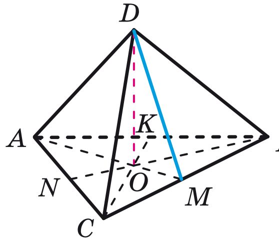


Рис. 3.4

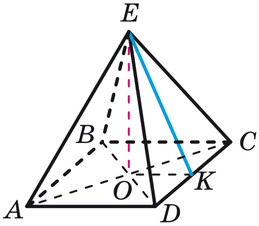


Рис. 3.5

Означення. Піраміду називають правильною, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

На рисунку 3.4 зображено правильну трикутну піраміду $DABC$ з основою ABC. Трикутник ABC є рівностороннім. Проекцією вершини D на площину ABC є центр трикутника — точка O.

Щоб знайти зображення точки O, треба побудувати точку перетину медіан AM, BN і CK трикутника ABC.

На рисунку 3.5 зображено правильну чотирикутну піраміду $EABCD$. Чотирикутник $ABCD$ є квадратом, точка O — його центр, відрізок EO — висота піраміди. Оскільки центр квадрата збігається з точкою перетину його діагоналей, то можна зробити такий висновок: проекцією вершини правильної чотирикутної піраміди на площину основи є точка перетину діагоналей квадрата, який є основою піраміди.

Правильну трикутну піраміду, у якої всі грані рівні, називають **правильним тетраедром**.

Зазначимо деякі властивості правильної піраміди.

Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники (доведіть це самостійно).

Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

На рисунку 3.4 проведено відрізок DM, де M — середина ребра BC. Оскільки трикутник BCD — рівнобедрений з основою BC, то відрізок DM є його висотою. Отже, відрізок DM — апофема правильної трикутної піраміди $DABC$.

На рисунку 3.5 відрізок EK, де точка K — середина ребра DC, є апофемою правильної чотирикутної піраміди $EABCD$.

Усі апофеми правильної піраміди рівні (доведіть це самостійно).

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Очевидно, що виконується така рівність:

$$S_п = S_б + S_{осн},$$

де $S_п$ — площа поверхні піраміди, $S_б$ — площа бічної поверхні піраміди, $S_{осн}$ — площа основи піраміди.

Теорема 3.1. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.***

Доведення. Розглянемо правильну n-кутну піраміду з ребром основи, що дорівнює a, та апофемою, що дорівнює d. Тоді площа бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}ad$. Оскільки всі n бічних граней правильної n-кутної піраміди — рівні трикутники, то площа бічної поверхні дорівнює $\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, тобто $S_б = \left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n = \frac{1}{2}(an)\cdot d$. Оскільки добуток an дорівнює периметру основи, то теорему доведено. ◄

Твердження теореми 3.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{S_б = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot d,}$$

де $P_{осн}$ — периметр основи піраміди, d — довжина апофеми правильної піраміди.

Із доведеного в ключових задачах пп. 11–13 підручника «Геометрія. 10 клас» випливають такі властивості:

(1) *якщо бічні ребра піраміди є рівними або бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр описаного кола многокутника, який є основою піраміди*;

(2) *якщо всі двогранні кути опуклої піраміди при ребрах основи рівні, то проекцією вершини піраміди на площину основи є центр вписаного кола многокутника, який є основою піраміди.*

Доведіть ці властивості самостійно.

Задача. Доведіть, що коли кожний із двогранних кутів опуклої піраміди при ребрах основи дорівнює α, то площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$.

Розв'язання

Доведення проведемо для трикутної піраміди. Для інших n-кутних пірамід доведення буде аналогічним.

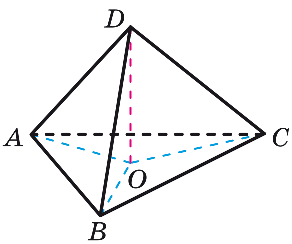


Рис. 3.6

На рисунку 3.6 відрізок DO — висота піраміди $DABC$. Трикутники AOB, BOC і COA є відповідно ортогональними проекціями на площину основи піраміди трикутників ADB, BDC і CDA.

Скориставшись теоремою про площу ортогональної проекції многокутника, можна записати:

$$S_{AOB} = S_{ADB}\cos\alpha,$$
$$S_{BOC} = S_{BDC}\cos\alpha,$$
$$S_{COA} = S_{CDA}\cos\alpha.$$

Додавши почленно ліві та праві частини записаних рівностей, отримаємо: $S_б = S_{осн}\cos\alpha$. Звідси $S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$. ◄

1. Що називають пірамідою?
2. Що називають висотою піраміди?
3. Який переріз називають діагональним перерізом піраміди?
4. Яку піраміду називають правильною?
5. Що називають апофемою правильної піраміди?
6. Що називають площею поверхні піраміди? бічної поверхні піраміди?
7. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?

ВПРАВИ

3.1.° Скільки n-кутна піраміда має:

1) вершин; 2) граней; 3) ребер?

3.2.° Яку найменшу кількість граней може мати піраміда?

3.3.° Доведіть, що кількість ребер будь-якої піраміди є парним числом.

3.4.° На рисунку 3.7 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:

1) висоту піраміди;
2) кут нахилу ребра SA до площини основи;
3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі BC.

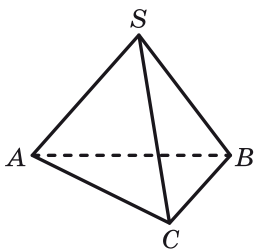


Рис. 3.7

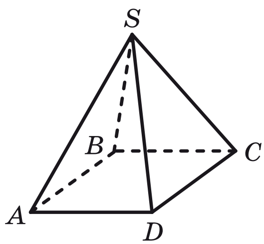


Рис. 3.8

3.5.° На рисунку 3.8 зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$. Перерисуйте рисунок у зошит і зобразіть:

1) висоту піраміди;
2) кут нахилу ребра SC до площини основи;
3) лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі AD.

3.6.° Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.7.° Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічне ребро нахилено до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть сторону основи піраміди.

3.8.° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:

1) апофему піраміди;
2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.9.° Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 2 см, а сторона основи — 6 см. Знайдіть:

1) висоту піраміди;
2) двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.10.° Сторона основи правильної семикутної піраміди дорівнює 10 см, а її апофема — 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.11.° Плоский кут при вершині правильної восьмикутної піраміди дорівнює 30°, а бічне ребро — 2 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.12.° Площа бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди дорівнює 300 см^2, а її апофема — 15 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

3.13.° Кожне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.14.° Кожне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.15.° Основою піраміди $MABCD$ є паралелограм $ABCD$, діагональ BD якого дорівнює 4 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи, а бічне ребро MA, що дорівнює 8 см, утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть ребро MD.

3.16.° Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей — 24 см. Основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи піраміди. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 16 см.

3.17.• Точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(-2;\ 7;\ 0)$ і $C(-1;\ -1;\ 0)$ — вершини основи піраміди $SABC$. Знайдіть висоту цієї піраміди, якщо точка S має координати $S(5;\ 2;\ -3)$.

3.18.• Вершини A, B, C і D піраміди $MABCD$ лежать у площині $z = 2$. Знайдіть висоту цієї піраміди, якщо точка M має координати $M(3;\ 6;\ -4)$.

3.19.• Точки $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(5;\ 1;\ 0)$ і $D(2;\ -2;\ 0)$ — вершини правильної піраміди $MABCD$, висота якої дорівнює 4. Знайдіть:
1) координати вершин M і C;
2) довжину бічного ребра піраміди.

3.20.• Точки $A(0;\ 5;\ 4)$ і $B(0;\ 3;\ 2)$ — вершини правильної піраміди $SABCD$, висота якої дорівнює 3. Точка $O(0;\ 3;\ 4)$ — центр основи цієї піраміди. Знайдіть:
1) координати вершин S, C і D;
2) довжину бічного ребра піраміди.

3.21.• Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює b, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.

3.22.• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

3.23.• Доведіть, що в правильній піраміді:
1) бічні ребра утворюють рівні кути з площиною основи;
2) двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними.

3.24.• Бічне ребро правильної трикутної піраміди утворює з площиною основи кут α. Знайдіть двогранний кут піраміди при ребрі основи.

3.25.• Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть кут між бічним ребром піраміди та площиною її основи.

3.26.• Точки D, E і F — середини ребер AB, AM і MC правильної піраміди $MABC$ відповідно, $AB = 8$ см, $AM = 12$ см.
1) Побудуйте переріз піраміди, який проходить через точки D, E і F.
2) Доведіть, що побудований переріз є прямокутником.
3) Знайдіть площу перерізу.

3.27.• Побудуйте переріз правильної трикутної піраміди площиною, яка проходить через основу її висоти паралельно мимобіжним ребрам піраміди. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює 9 см, а бічне ребро — 12 см.

3.28.• Кут між двома апофемами правильної трикутної піраміди дорівнює $60°$. Доведіть, що бічні грані піраміди є рівнобедреними прямокутними трикутниками.

3.29.• Кожне ребро правильної піраміди $MABCD$ дорівнює a, точка E — середина ребра MC. Знайдіть:
1) площу перерізу піраміди площиною BED;
2) кут між площиною BED і площиною основи піраміди.

3.30.• Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.31.• Діагональ основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює d, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.32.• Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см та утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.33.$^{\bullet}$ Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.34.$^{\bullet}$ Паралелограм якого виду може бути основою піраміди, бічні ребра якої утворюють рівні кути з площиною основи?

3.35.$^{\bullet}$ Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 32 см. Висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо вони утворюють рівні кути з площиною основи.

3.36.$^{\bullet}$ Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.37.$^{\bullet}$ Основою піраміди $DABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ABC = 120°$, $AB = BC$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут $45°$ і дорівнює 8 см. Знайдіть площу основи піраміди.

3.38.$^{\bullet}$ Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює $3\sqrt{10}$ см, а основа — 6 см. Висота піраміди дорівнює 5 см, а її бічні ребра є рівними. Знайдіть бічне ребро піраміди.

3.39.$^{\bullet}$ Паралелограм якого виду може бути основою піраміди, якщо двогранні кути при ребрах основи є рівними?

3.40.$^{\bullet}$ Основою піраміди є ромб зі стороною 8 см і кутом $30°$. Кожний із двогранних кутів піраміди при ребрах основи дорівнює $45°$. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

3.41.$^{\bullet}$ Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $30°$. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

3.42.$^{\bullet}$ Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 16 см, а всі двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють $60°$. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні піраміди;
2) висоту піраміди.

3.43.° Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 4 см і 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Площина ще однієї грані, яка проходить через більшу сторону основи, утворює кут $45°$ із площиною основи. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) площу бічної поверхні піраміди.

3.44.° Основою піраміди є квадрат зі стороною 12 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см.

3.45.° Площини бічних граней ABM і CBM піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, $MB = 20$ см.

3.46.° Площини бічних граней MAB і MAC піраміди $MABC$ перпендикулярні до площини основи. Знайдіть площу грані MBC, якщо $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см, $MA = 9$ см.

3.47.°° Доведіть, що коли двогранні кути піраміди при ребрах її основи рівні, то кожна точка висоти піраміди рівновіддалена від площин її бічних граней.

3.48.°° Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α. Знайдіть двогранний кут піраміди при бічному ребрі.

3.49.°° Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при бічному ребрі дорівнює α. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

3.50.°° Відстань від центра основи правильної трикутної піраміди до площини її бічної грані дорівнює d, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.51.°° Відстань від центра основи правильної чотирикутної піраміди до площини бічної грані дорівнює m, а кут між висотою піраміди та площиною бічної грані становить β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.52.°° Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ дорівнює 8 см, а висота піраміди — 12 см.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через середини бічних ребер MA і MD паралельно висоті піраміди.
2) Знайдіть площу перерізу.

3.53.•• Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а двогранний кут піраміди при ребрі основи дорівнює $60°$.
1) Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через центр основи паралельно бічній грані піраміди.
2) Знайдіть площу перерізу.

3.54.•• Основою піраміди є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 18 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота однієї з бічних граней, проведена до ребра основи піраміди, — 9 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.55.•• Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см. Двогранні кути піраміди при ребрах основи є рівними, а висота піраміди дорівнює $3\sqrt{15}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.56.•• Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $AB = BC = 2$ см, $\angle ABC = 120°$. Площини бічних граней MAB і MAC перпендикулярні до площини основи, а кут між площиною MBC і площиною основи дорівнює $45°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.57.•• Основою піраміди $MABCD$ є ромб зі стороною a. Площини бічних граней ABM і CBM перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі MB є тупим і дорівнює α. Кут між площиною AMD і площиною основи дорівнює β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.58.•• Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Площина однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней утворюють із площиною основи кут $45°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.59.* Основою піраміди $MABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$, $AC = 4\sqrt{3}$ см. Площина грані BMC перпендикулярна до площини основи, а площини двох інших граней нахилені до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть ребро MC.

3.60.* Кожне ребро тетраедра дорівнює 1 см. Знайдіть найбільше значення площі перерізу даного тетраедра площиною, паралельною двом його мимобіжним ребрам.

3.61.* Чи існує чотирикутна піраміда, дві несусідні бічні грані якої перпендикулярні до площини основи?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.62. Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами BC і AD перетинаються в точці O. Знайдіть відношення площ трикутників BOC і AOD, якщо $BC = 3$ см, $AD = 9$ см.

3.63. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 25$ см, $AC = 14$ см. До кола, вписаного в даний трикутник, проведено дотичну, яка паралельна основі AC і перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Знайдіть площу трикутника MBK.

4. Площі поверхонь подібних многогранників. Зрізана піраміда

Перетнемо довільну піраміду площиною, паралельною основі піраміди (рис. 4.1). Ця площина розбиває дану піраміду на два многогранники: один многогранник є пірамідою, другий називають **зрізаною пірамідою**.

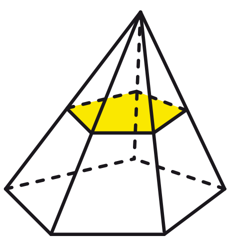


Рис. 4.1

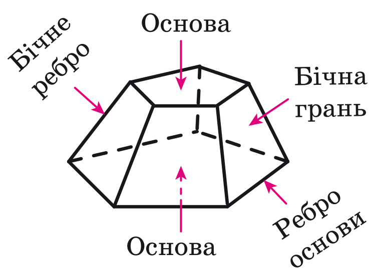


Рис. 4.2

У зрізаній піраміді (рис. 4.2) дві грані — n-кутники, що лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами зрізаної піраміди**. Решта n граней зрізаної піраміди — трапеції. Їх називають **бічними гранями зрізаної піраміди**. Сторони основ називають **ребрами основ зрізаної піраміди**. Ребра, які не належать основам, називають **бічними ребрами зрізаної піраміди**.

Зауважимо, що основи зрізаної піраміди є подібними фігурами. Цей факт було доведено в курсі геометрії 10 класу.

Висотою зрізаної піраміди називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Довжина висоти зрізаної піраміди дорівнює відстані між площинами її основ.

Якщо правильну n-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною основі, то утворену зрізану піраміду називають **правильною** n**-кутною зрізаною пірамідою**.

Основами правильної зрізаної n-кутної піраміди є правильні n-кутники, а бічними гранями — рівнобічні трапеції.

Апофемою правильної зрізаної піраміди називають відрізок, який сполучає середини ребер основ, що належать одній бічній грані.

Усі апофеми правильної зрізаної піраміди є рівними (доведіть це самостійно).

На рисунку 4.3 зображено правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її основами є квадрати $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Точки O і O_1 — їхні центри. Відрізок OO_1 — висота зрізаної піраміди.

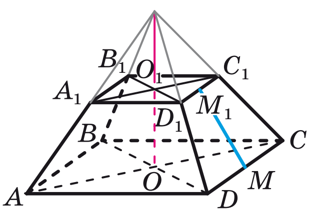


Рис. 4.3

Сполучимо середини M і M_1 ребер CD і C_1D_1 відповідно. Оскільки чотирикутник CC_1D_1D — рівнобічна трапеція, то відрізок MM_1 — її висота, а отже, й апофема правильної чотирикутної зрізаної піраміди.

Площею бічної поверхні зрізаної піраміди називають суму площ усіх її бічних граней. **Площею поверхні зрізаної піраміди** (ще говорять: «**площа повної поверхні зрізаної піраміди**») називають суму площ усіх її граней.

Теорема 4.1. ***Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Твердження теореми 4.1 зручно подати у вигляді формули

$$\boxed{S_{\text{б}} = \frac{1}{2}(P_{\text{осн}} + p_{\text{осн}}) \cdot d,}$$

де $P_{\text{осн}}$ і $p_{\text{осн}}$ — периметри основ, d — довжина апофеми правильної зрізаної піраміди.

1. Опишіть, який многогранник називають зрізаною пірамідою.
2. Опишіть елементи зрізаної піраміди.
3. Яку зрізану піраміду називають правильною?
4. Що називають апофемою правильної зрізаної піраміди?
5. Що називають площею поверхні зрізаної піраміди? бічної поверхні зрізаної піраміди?
6. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?

ВПРАВИ

4.1.° Площа бічної поверхні правильної зрізаної шестикутної піраміди дорівнює 540 см^2. Знайдіть сторони основ піраміди, якщо вони відносяться як 2 : 3, а апофема дорівнює 9 см.

4.2.° Знайдіть апофему правильної зрізаної п'ятикутної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 6 см і 10 см, а площа бічної поверхні — 280 см^2.

4.3.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 12 см і 18 см, а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 45°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.4.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 9 см, а двогранний кут піраміди при ребрі більшої основи дорівнює 60°. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.5.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 10 см, а висота піраміди — 4 см. Знайдіть:
1) діагональ зрізаної піраміди;
2) площу перерізу, який проходить через бічні ребра, що не належать одній грані;
3) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.6.• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 15 см і 27 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 30°. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

4.7.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 24 см і 30 см, а бічні ребра — 4 см. Знайдіть висоту піраміди.

4.8.• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 12 см, а площа бічної поверхні — 54 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

4.9.•• Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють 8 см і 5 см, а висота піраміди — 3 см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AB і точку C_1.

4.10.•• Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 8 см і 6 см, а висота піраміди — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу перерізу піраміди площиною, яка проходить через пряму AC і точку B_1.

4.11.•• Бічне ребро BB_1 зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ перпендикулярне до площини основи, $BB_1 = 4$ см, $AB = BC = 16$ см, $A_1B_1 = B_1C_1 = 10$ см, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.12.•• Основи зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратами, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см. Грань AA_1B_1B є рівнобічною трапецією, а її площина перпендикулярна до площини основи. Кут між площиною грані CC_1D_1D і площиною основи дорівнює $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.13.•• Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює H. Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут α, а діагональ піраміди — кут β. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

4.14.•• Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює a, а сторона меншої основи — b. Знайдіть висоту зрізаної піраміди, якщо гострий кут її бічної грані дорівнює α.

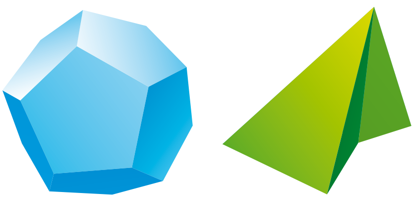
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.15. У круг вписано правильний трикутник зі стороною 15 см. Знайдіть площу сектора цього круга, який відповідає центральному куту правильного трикутника.

4.16. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 6\sqrt{2}$ см і $\angle A = 45°$. Знайдіть невідомі кути трикутника.

ПЛАТОНОВІ ТІЛА

Вивчаючи навколишній світ, ви, напевно, звертали увагу, що деяким просторовим тілам притаманна природна краса та навіть досконалість. Наприклад, із двох многогранників, зображених на рисунку 4.4, перший (*А*) ви, скоріш за все, назвете красивим і гармонійним, а другий (*Б*) — ні. Що ж змушує нас сприймати многогранник *А* «з більшою симпатією», ніж многогранник *Б*? Які геометричні властивості многогранників формують у нас таке ставлення? Звернемо увагу, що всі грані опуклого многогранника *А* є *рівними правильними* многокутниками (п'ятикутниками) і в кожній вершині сходиться *однакова* кількість ребер (по три ребра). Многогранники з такими властивостями виокремлюють у спеціальний клас — клас правильних многогранників.



А *Б*

Рис. 4.4

Рис. 4.5

Означення. Опуклий многогранник називають правильним, якщо всі його грані — рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

Многогранник *А*, зображений на рисунку 4.4, — правильний многогранник, який має 12 граней. Його називають **додекаедром**, що в перекладі з грецької означає «дванадцятигранник». Многогранник *Б* не є правильним.

З дитинства кожного з нас оточували правильні многогранники. Кубики та пірамідки — одні з перших наших іграшок (рис. 4.5). Справді, куб — правильний многогранник, адже всі шість граней куба — рівні квадрати (правильні чотирикутники) і в кожній вершині сходиться однакова кількість ребер (по три ребра). Куб також називають **гексаедром** (від грец. «шестигранник»). Трикутна піраміда (тетраедр, від грец. «чотиригранник»), усі грані якої — правильні трикутники, також є правильним многогранником (подумайте чому).

Правильні многогранники в стереометрії є в деякому роді аналогами правильних многокутників у планіметрії. Як ви знаєте, на площині існують правильні трикутники, чотирикутники, п’ятикутники тощо. Узагалі, для кожного натурального значення n ($n \geqslant 3$) існує правильний n-кутник. З правильними многогранниками справа інакша.

Окрім правильного тетраедра, куба й додекаедра, із часів Стародавньої Греції відомо ще два правильних многогранники: **октаедр** (від грец. «восьмигранник») та **ікосаедр** (від грец. «двадцятигранник») (рис. 4.6). Усі вісім граней октаедра є правильними трикутниками, і в кожній вершині сходиться чотири ребра. Октаедр зручно уявляти як об’єднання двох чотирикутних пірамід, склеєних своїми основами. Якщо бічні грані цих пірамід — рівні правильні трикутники, то отриманий після склеювання многогранник є октаедром (рис. 4.7). Гранями ікосаедра є рівні правильні трикутники, і в кожній вершині ікосаедра сходиться п’ять ребер.

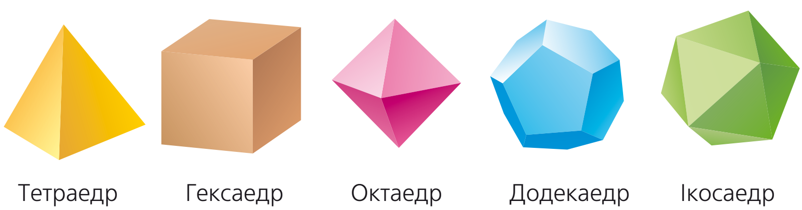


Рис. 4.6

Вивчення правильних многогранників було однією з основних задач геометрів Стародавньої Греції. Багато грецьких філософів того часу вважали, що правильні многогранники лежать в основі всієї світобудови. Наприклад, Платон (427–347 рр. до н. е.) вважав, що правильні многогранники символізують природні стихії. Правильні многогранники іноді ще називають платоновими тілами.

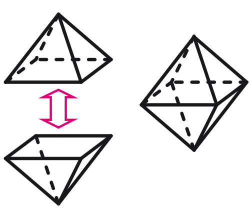


Рис. 4.7

Геометрам Стародавньої Греції вдалося описати всі можливі правильні многогранники. Виявилося, що існує тільки п’ять правильних многогранників (тетраедр, куб, додекаедр, октаедр та ікосаедр). Цей факт можна довести, спираючись на таку властивість довільного опуклого многогранника: сума всіх плоских кутів, що прилягають до довільної вершини многогранника, менша від 360° (рис. 4.8).

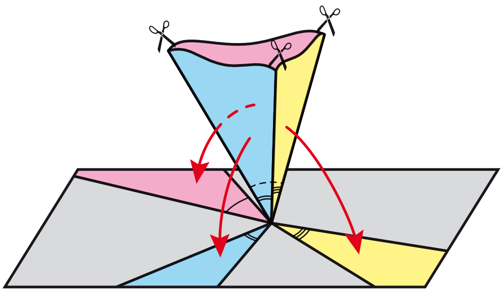


Рис. 4.8

У правильному многограннику кожна грань є правильним n-кутником. Оскільки сума всіх кутів n-кутника дорівнює $180^\circ(n-2)$, то кожний плоский кут такого n-кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$. Якщо до вершини правильного многогранника прилягає k таких плоских кутів, то їхня сума дорівнює $k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n}$, тому

$$k \cdot \frac{180^\circ(n-2)}{n} < 360^\circ;$$

$$k < \frac{2n}{n-2}.$$

Останню нерівність перепишемо так:

$$k < 2 + \frac{4}{n-2}. \qquad (1)$$

З одного боку, оскільки кожна грань многогранника містить не менше ніж три ребра, то $n \geqslant 3$. З другого боку, якщо $n \geqslant 6$, то з нерівності (1) випливає, що $k < 3$. Проте до вершини многогранника не може прилягати менше ніж три плоских кути, тому при $n \geqslant 6$ правильних многогранників не існує. Залишається розглянути такі можливості: $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

Якщо $n = 3$, то гранями правильного многогранника будуть правильні трикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 6$. Цьому випадку відповідають: тетраедр ($k = 3$), октаедр ($k = 4$) та ікосаедр ($k = 5$).

Якщо $n = 4$, то гранями правильного многогранника будуть квадрати. З нерівності (1) випливає, що $k < 4$. Цьому випадку відповідає куб ($k = 3$).

Якщо $n = 5$, то гранями правильного многогранника будуть правильні п'ятикутники. З нерівності (1) випливає, що $k < 3\frac{1}{3}$. Цьому випадку відповідає додекаедр ($k = 3$).

Об'єкти, які за формою нагадують правильні многогранники, нерідко трапляються в природі. Наприклад, форму куба мають кристали кам'яної солі (рис. 4.9); кристали алмазів мають форму октаедра (рис. 4.10); кристали піриту нагадують додекаедр (рис. 4.11). Біологи виявили, що частини деяких вірусів мають форму ікосаедра. Елементи багатьох архітектурних об'єктів сконструйовані у вигляді правильних многогранників (рис. 4.12).

Кам'яна сіль

Рис. 4.9

Алмаз

Рис. 4.10

Пірит

Рис. 4.11

Рис. 4.12

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТІЛО

У п. 1 ви ознайомилися з поняттям геометричного тіла (або просто тіла). Нагадаємо, що многогранник, куля, конус є тілами, а, наприклад, площина, двогранний кут або фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами. У цьому оповіданні ми глибше ознайомимося із цим непростим поняттям.

Опишемо властивості, які виокремлюють тіла з усіх геометричних фігур.

Означення. **Фігуру (множину точок простору) називають *відкритою*, якщо кожна її точка належить фігурі разом з деякою кулею із центром у цій точці.**

Прикладом відкритої множини може слугувати весь простір.

Ще один приклад відкритої множини можна отримати, розглянувши «кулю без своєї сфери», тобто множину B точок, відстань від яких до центра O менша від радіуса R. Справді, виберемо в цій множині B довільну точку X. Тоді $OX < R$ (рис. 4.13). Якщо розглянути маленьку кулю радіуса $r = \frac{R - OX}{2}$ із центром у точці X, то вона повністю належить даній множині B, а тому B — відкрита множина.

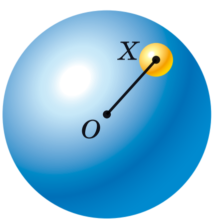


Рис. 4.13

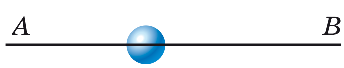


Рис. 4.14

Наприклад, пряма AB не є відкритою множиною, оскільки куля із центром у будь-якій її точці не належить цій прямій (рис. 4.14). Узагалі, будь-яка плоска фігура не є відкритою.

Означення. **Фігуру називають *обмеженою*, якщо вона повністю міститься в деякій кулі.**

Наприклад, відрізок, піраміда, куля — обмежені фігури, а пряма, площина, двогранний кут — необмежені фігури.

Означення. **Точку називають *точкою дотикання фігури*, якщо будь-яка куля із центром у цій точці містить щонайменше одну точку цієї фігури.**

Наприклад, кожна точка кулі є точкою дотикання цієї кулі, кожна точка відрізка є точкою дотикання цього відрізка. Узагалі, кожна точка фігури є її точкою дотикання. Однак не слід думати, що точка дотикання обов'язково належить фігурі. Приміром, розглянемо відрізок AB, з якого видалили його кінці — точки A і B. Окрім точок, що лежать між A і B, точками дотикання цієї фігури будуть також точки A і B. Справді, довільна куля із центром у будь-якій із цих точок міститиме внутрішні точки відрізка AB.

Наведемо приклад точки, яка не є точкою дотикання. Розглянемо кулю із центром у точці O радіуса R і точку A, яка не належить даній кулі. Це означає, що довжина відрізка OA більша за радіус R кулі. Тоді точка A не є точкою дотикання цієї кулі. Справді, якщо розглянути ще одну кулю із центром у точці A і радіусом $r = \frac{OA - R}{2}$, то ця куля не перетинатиметься з даною кулею (рис. 4.15).

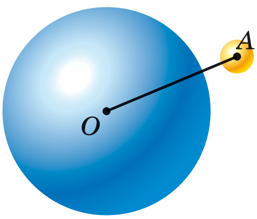


Рис. 4.15

Означення. **Фігуру називають *зв'язною*, якщо при будь-якому її розбитті на дві частини хоча б одна із цих частин містить точки дотикання другої частини.**

Розглянемо, наприклад, фігуру F на рисунку 1.2. Фігура F — це об'єднання двох куль. Зрозуміло, що фігура F не є зв'язною, оскільки її можна розбити на дві частини (дві кулі, з яких вона складається), причому кожна з них не містить точок дотикання другої частини. Тоді як пряма, площина, конус — приклади зв'язних фігур.

Означення. ***Поверхнею* фігури Φ називають множину точок, що є точками дотикання як для самої фігури, так і для фігури, яка складається з точок простору, що не належать фігурі Φ.**

Наприклад, поверхнею кулі є її сфера. Об'єднання всіх граней многогранника є поверхнею многогранника.

Тепер ми можемо дати означення тіла.

Означення. ***Тілом* називають обмежену фігуру, яка є об'єднанням непорожньої зв'язної відкритої фігури та її поверхні.**

Після наведеного означення ви можете самі обґрунтувати, чому пряма, площина, двогранний кут, а також фігури, зображені на рисунку 1.2, не є тілами.

Поняття відкритої множини, точки дотикання, зв'язності є одними з фундаментальних у *топології* — важливому розділі сучасної математики.

Щедра на таланти українська земля подарувала світу цілу плеяду видатних топологів — І. М. Гельфанда, О. А. Олійник, П. С. Урисона та багатьох інших.

Ізраїль Мойсейович Гельфанд
(1913–2009)

Народився в с. Окни (нині Одеська область). Не маючи закінченої середньої освіти й не пройшовши курсу навчання в університеті, завдяки блискучим здібностям і наполегливій праці зумів стати видатним ученим. Основні результати здобув у таких галузях математики, як функціональний аналіз, математична фізика, прикладна математика, теорія топологічних лінійних просторів. Опублікував понад 800 наукових праць. Іноземний член Національної академії наук США, Паризької академії наук, Шведського та Ірландського королівських товариств, почесний доктор Оксфордського, Паризького (Сорбонна), Гарвардського, Упсальського, Ліонського, Пізанського університетів.

Ольга Арсенівна Олійник
(1925–2001)

Народилася в с. Матусів Черкаської області. Перша жінка в СРСР, яка у 29 років стала доктором фізико-математичних наук. Основні досягнення пов'язані з дослідженнями в галузі диференціальних рівнянь і топології. Підготувала 58 кандидатів і 14 докторів фізико-математичних наук. Член Італійської академії наук у Палермо, Саксонської академії наук, Единбурзького королівського товариства. Нагороджена іменною медаллю Коллеж де Франс.

Павло Самуїлович Урисон
(1898–1924)

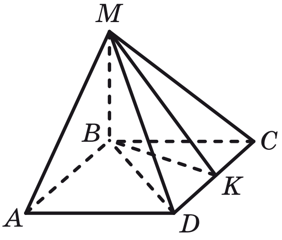
Народився в м. Одеса.
Разом з П. С. Александровим заснував всесвітньо відому топологічну школу. Створив новий напрямок у топології — теорію розмірностей. Основні досягнення пов'язані з такими розділами математики, як топологія, диференціальні рівняння та геометрія.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 8 см і 22 см, а висота призми дорівнює 15 см.
А) 900 см^2; Б) 450 см^2; В) 600 см^2; Г) 2640 см^2.

2. Обчисліть площу бічної поверхні правильної шестикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 8 см, а апофема — 12 см.
А) 288 см^2; Б) 576 см^2; В) 144 см^2; Г) 192 см^2.

3. Основою піраміди $MABCD$, зображеної на рисунку, є квадрат, бічне ребро MB перпендикулярне до площини основи піраміди, точка K — середина відрізка CD. Укажіть лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі CD.
А) $\angle MAB$; В) $\angle MKB$;
Б) $\angle MDB$; Г) $\angle MCB$.



4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною a та гострим кутом α. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

А) $8a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; В) $8a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta$;

Б) $8a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; Г) $8a^2 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 12 см, а апофема — 15 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

А) 540 см^2; Б) 270 см^2; В) 1080 см^2; Г) 720 см^2.

6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 2 см. Чому дорівнює площа трикутника ADC_1?

А) 4 см^2; Б) 2 см^2; В) $4\sqrt{2}$ см^2; Г) $2\sqrt{2}$ см^2.

7. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота піраміди — $\sqrt{22}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А) 90 см^2; Б) 45 см^2; В) 60 см^2; Г) 30 см^2.

8. Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної призми, діагональ якої дорівнює $12\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом 30°.

А) $3\sqrt{6}$ см; Б) 6 см; В) $9\sqrt{2}$ см; Г) 9 см.

9. Основа прямої призми — ромб з гострим кутом α. Площа діагонального перерізу призми, який проходить через більшу діагональ основи, дорівнює S. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А) $\dfrac{2S}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; Б) $\dfrac{S}{\cos\alpha}$; В) $\dfrac{2S}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$; Г) $\dfrac{S}{\sin\alpha}$.

10. Двогранний кут правильної чотирикутної піраміди при ребрі основи дорівнює α. Відрізок, який сполучає середину висоти піраміди та середину апофеми, дорівнює a. Знайдіть висоту піраміди.

А) $2a\sin\alpha$; Б) $2a\cos\alpha$; В) $2a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; Г) $2a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

11. Основа піраміди — квадрат, сторона якого дорівнює 4 см, а дві сусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 3 см.

А) 48 см^2; Б) 64 см^2; В) 16 см^2; Г) 32 см^2.

12. Основа прямої призми — трикутник зі стороною c і прилеглими до неї кутами α і β. Діагональ бічної грані, яка проходить через сторону основи, протилежну куту α, нахилена до площини основи під кутом γ. Знайдіть висоту призми.

А) $\dfrac{c\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$; В) $\dfrac{c\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{\sin\alpha}$;

Б) $\dfrac{c\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$; Г) $\dfrac{c\sin(\alpha+\beta)\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{\sin\beta}$.

13. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

А) 32 $см^2$; Б) 64 $см^2$; В) $32\sqrt{3}$ $см^2$; Г) $64\sqrt{3}$ $см^2$.

14. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть апофему піраміди.

А) 4 см; Б) $2\sqrt{14}$ см; В) $4\sqrt{7}$ см; Г) $4\sqrt{2}$ см.

15. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 3 см і 6 см, а бічне ребро утворює з площиною більшої основи кут 60°. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

А) 6 см; Б) $2\sqrt{3}$ см; В) $3\sqrt{3}$ см; Г) 3 см.

16. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомо, що $AD = 24$ см, $CD = 5$ см, $AA_1 = 10$ см. Чому дорівнює площа чотирикутника A_1B_1CD?

А) 100 $см^2$; Б) 120 $см^2$; В) 125 $см^2$; Г) 130 $см^2$.

17. Основа піраміди — ромб з кутом α. Двогранні кути піраміди при ребрах основи дорівнюють φ. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює H.

А) $\dfrac{4H^2 \sin\alpha \operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}$; В) $\dfrac{4H^2 \operatorname{ctg}\varphi}{\sin\alpha \sin\varphi}$;

Б) $\dfrac{4H^2 \sin\alpha \operatorname{ctg}\varphi}{\sin\varphi}$; Г) $\dfrac{4H^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha \cos\varphi}$.

18. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом b і протилежним йому кутом β. Бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут γ. Знайдіть висоту піраміди.

А) $\dfrac{b \operatorname{tg}\gamma}{2\cos\beta}$; В) $\dfrac{1}{2} b \cos\beta \operatorname{tg}\gamma$;

Б) $\dfrac{b \operatorname{tg}\gamma}{2\sin\beta}$; Г) $\dfrac{1}{2} b \sin\beta \operatorname{tg}\gamma$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Многогранник

Многогранником називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.

Многогранник називають опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані.

Призма

Многогранник, дві грані якого — рівні n-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта n граней — паралелограми, називають n-кутною призмою.

Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Призму називають правильною, якщо вона є прямою, а її основа — правильний многокутник.

Площа бічної поверхні прямої призми

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та бічного ребра призми.

Паралелепіпед

Паралелепіпедом називають призму, основи якої є паралелограмами.

Паралелепіпед називають прямим, якщо його бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Прямий паралелепіпед називають прямокутним, якщо його основами є прямокутники.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають вимірами прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед називають кубом, якщо його виміри є рівними.

Властивості паралелепіпеда

Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці та діляться цією точкою навпіл.

Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів.

Піраміда

Многогранник, одна грань якого — n-кутник, а решта граней — трикутники, що мають спільну вершину, називають n-кутною пірамідою.

Піраміду називають правильною, якщо її основа — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника. Усі бічні ребра правильної піраміди є рівними, усі бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники.

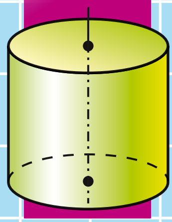
Апофемою правильної піраміди називають висоту бічної грані, проведену з вершини піраміди.

Площа бічної поверхні піраміди

Площею бічної поверхні піраміди називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює половині добутку периметра її основи та апофеми.

Площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ і апофеми.



§ 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

- У цьому параграфі ви докладніше ознайомитеся з уже відомими вам тілами — циліндром, конусом, кулею, вивчите їхні властивості.
- Дізнаєтеся, яким буває взаємне розміщення цих тіл і многогранників.

5. Циліндр

Нехай вектор $\vec{a}$ перпендикулярний до площини α. Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$ кола, яке належить площині α. Образом цього кола є рівне йому коло, яке лежить у площині, паралельній площині α (рис. 5.1). Нехай X — довільна точка кола із центром O, а точка X_1 — образ точки X при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Тоді $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$ і точка X_1 належить колу із центром O_1. Отже, усі відрізки, які паралельні вектору $\vec{a}$ і кінці яких лежать на розглядуваних колах, рівні між собою та перпендикулярні до площини α. Ці відрізки утворюють деяку фігуру F.

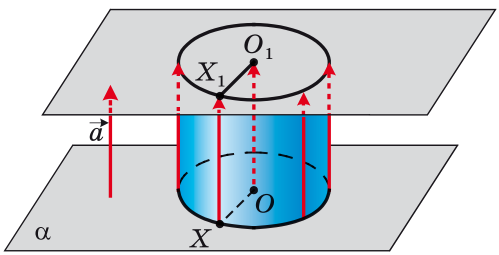


Рис. 5.1

Кола із центрами O і O_1 обмежують два рівних круги. Тіло, обмежене цими кругами і фігурою F, називають **циліндром**. Фігуру F називають **бічною поверхнею циліндра**, круги — **основами циліндра**, відрізки, що утворюють фігуру F, — **твірними циліндра** (рис. 5.2).

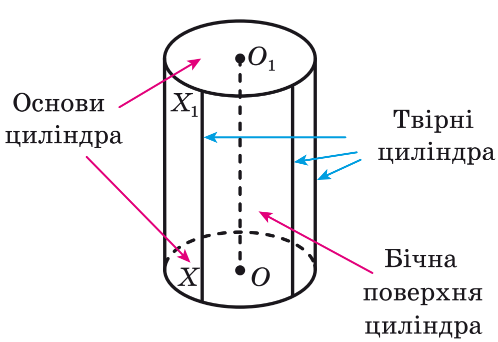


Рис. 5.2

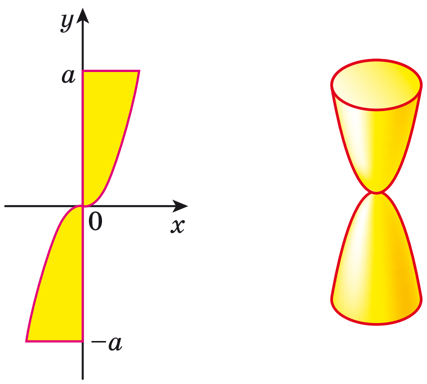
Очевидно, що всі твірні циліндра рівні та перпендикулярні до площини основи.

Пряму, яка проходить через центри основ циліндра, називають **віссю циліндра**. На рисунку 5.1 пряма OO_1 — вісь циліндра. Відрізок осі циліндра, що міститься між його основами, перпендикулярний до основ і дорівнює твірній циліндра. На рисунку 5.1 $OO_1 = XX_1$.

Висотою циліндра називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки площини однієї основи на площину другої основи. Будь-яка твірна циліндра є його висотою. На рисунку 5.2 відрізки OO_1 і XX_1 — висоти циліндра.

Тілом обертання називають тіло, отримане в результаті обертання деякої плоскої фігури навколо прямої. Цю пряму називають **віссю обертання**.

Наприклад, якщо обертати навколо осі ординат фігуру, яка лежить у площині xy та обмежена віссю ординат, прямими $y = a$ і $y = -a$ та графіком функції $y = x^3$ (рис. 5.3, *а*), то отримаємо тіло, форма якого нагадує пісочний годинник (рис. 5.3, *б*).



а *б*

Рис. 5.3

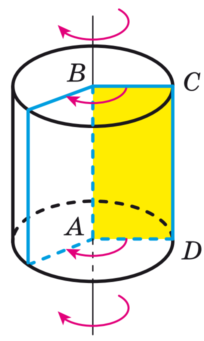


Рис. 5.4

Будь-яке тіло обертання має вісь симетрії. Нею є вісь обертання.

Циліндр можна розглядати як тіло, отримане в результаті обертання прямокутника навколо прямої, що містить його сторону.

На рисунку 5.4 зображено циліндр, отриманий обертанням прямокутника $ABCD$ навколо прямої AB. У результаті обертання сторони CD утворюється бічна поверхня циліндра, а в результаті обертання сторін BC і AD — основи циліндра.

Будь-які дві твірні AA_1 і BB_1 циліндра є паралельними. Отже, через прямі AA_1 і BB_1 можна провести площину. Розглянемо чотирикутник AA_1B_1B, який є перерізом циліндра цією площиною (рис. 5.5). Оскільки $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 = BB_1$, то чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Оскільки твірна циліндра перпендикулярна до площини основи, то $AA_1 \perp AB$. Таким чином, перерізом циліндра площиною, яка проходить через дві його твірні, є прямокутник.

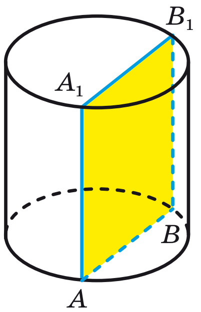


Рис. 5.5

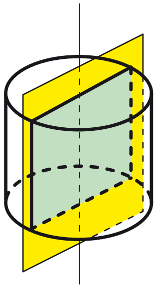


Рис. 5.6

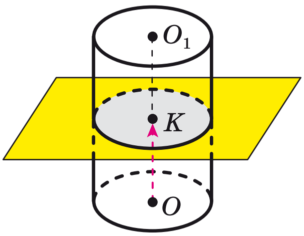


Рис. 5.7

Якщо перетнути циліндр площиною, що проходить через його вісь, то в перерізі утворюється прямокутник, дві сторони якого — діаметри основ циліндра, а дві інші — твірні циліндра (рис. 5.6). Такий переріз називають **осьовим перерізом циліндра**. Площина, яка містить осьовий переріз циліндра, є його площиною симетрії.

Перетнемо циліндр площиною, паралельною основам циліндра. Нехай ця площина перетинає вісь OO_1 циліндра в точці K (рис. 5.7). Утворена в перерізі фігура — це образ основи із центром O при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{OK}$. Отже, перерізом циліндра площиною, паралельною основам (або перпендикулярною до осі циліндра), є круг, що дорівнює основі.

Уявимо собі, що поверхню циліндра розрізали по колах основ і деякій твірній (рис. 5.8), а потім розгорнули на площині. Отриману фігуру називають **розгорткою циліндра на площину** або просто **розгорткою циліндра**. Вона складається з двох кругів, що дорівнюють основам циліндра, і прямокутника, який називають розгорткою бічної поверхні циліндра (рис. 5.9).

Якщо твірна циліндра дорівнює h, а радіус основи циліндра — r, то сторони розгортки бічної поверхні циліндра дорівнюють h і $2\pi r$.

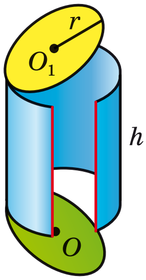


Рис. 5.8

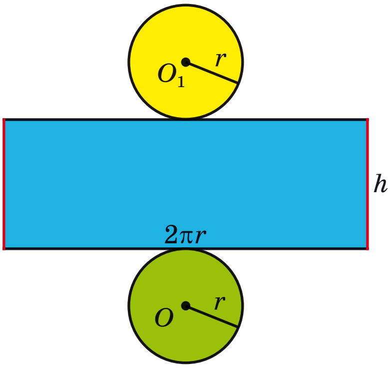


Рис. 5.9

За площу бічної поверхні циліндра приймають площу розгортки його бічної поверхні. Отже,

$$\boxed{S_б = 2\pi rh,}$$

де $S_б$ — площа бічної поверхні циліндра, r — радіус основи циліндра, h — довжина висоти циліндра.

Площею повної поверхні циліндра називають суму площ бічної поверхні циліндра та двох його основ. Маємо:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_п$ — площа повної поверхні циліндра, $S_{осн}$ — площа основи циліндра.

Площа основи циліндра дорівнює πr^2. Тоді отримуємо формулу

$$\boxed{S_п = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

Із курсу геометрії 10 класу ви знаєте, що паралельною проекцією кола є фігура, яку називають еліпсом. Тому, зображаючи циліндр, його основи рисують у вигляді еліпсів. На практиці для зображення еліпсів зручно користуватися лекалами (рис. 5.10).

Рис. 5.10

Задача. Точки A і B лежать на колах різних основ циліндра так, що пряма AB утворює з площиною основи кут, рівний $60°$. Через точку A провели осьовий переріз AA_1D_1D (рис. 5.11). Знайдіть відстань між прямими AB і DD_1, якщо радіус основи циліндра дорівнює 5 см і $AB = 16$ см.

Розв'язання. Проведемо твірну BK циліндра. Оскільки твірні циліндра перпендикулярні до площини основи, то вони паралельні. Отже, точки A, A_1, B і K належать одній площині.

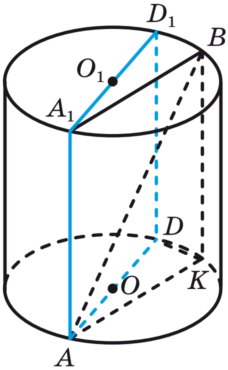


Рис. 5.11

Маємо: $DD_1 \parallel BK$, тому $DD_1 \parallel AA_1B$. Тоді відстань між мимобіжними прямими AB і DD_1 дорівнює відстані між прямою DD_1 і площиною AA_1B. Тому достатньо знайти довжину перпендикуляра, опущеного з будь-якої точки прямої DD_1 на площину AA_1B.

Сполучимо точки D і K. Вписаний кут DKA спирається на діаметр AD, тому $DK \perp AK$. Оскільки $BK \perp ADK$, то $BK \perp DK$. Отримали, що пряма DK перпендикулярна до двох прямих площини AA_1B, що перетинаються. Таким чином, $DK \perp AA_1B$, тому довжина відрізка DK — шукана відстань.

Пряма AK є проекцією прямої AB на площину основи циліндра. Отже, кут BAK — кут між прямою AB і площиною основи. За умовою $\angle BAK = 60°$.

Із трикутника ABK ($\angle BKA = 90°$): $AK = AB \cos 60° = 8$ (см).

Із трикутника ADK ($\angle AKD = 90°$):

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6 см. ◄

?

1. Яке тіло називають циліндром?
2. Опишіть, що називають бічною поверхнею циліндра.
3. Що називають основами циліндра? віссю циліндра? висотою циліндра?
4. Яке тіло називають тілом обертання?
5. Яку пряму називають віссю обертання?
6. Що називають осьовим перерізом циліндра?
7. З яких фігур складається розгортка циліндра?
8. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
9. За якою формулою обчислюють площу повної поверхні циліндра?

ВПРАВИ

5.1.° Висота циліндра дорівнює 6 см, а радіус основи — 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.2.° Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 128 см^2. Знайдіть висоту циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 4 см.

5.3.° Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює d і утворює з площиною основи циліндра кут α. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) площу основи циліндра.

5.4.° Площа основи циліндра дорівнює 49π см^2, а кут між діагоналлю осьового перерізу та твірною циліндра дорівнює $30°$. Знайдіть висоту циліндра.

5.5.° Чому дорівнює площа бічної поверхні циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота — 9 см?

5.6.° Прямокутник зі сторонами 1 см і 3 см обертають навколо більшої сторони. Знайдіть:
1) діагональ осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

5.7.° Квадрат зі стороною 8 см обертають навколо однієї з його сторін. Знайдіть:
1) площу осьового перерізу утвореного циліндра;
2) площу повної поверхні цього циліндра.

5.8.° Точки O і O_1 — центри нижньої та верхньої основ циліндра відповідно (рис. 5.12). Точка A — довільна точка кола, яке обмежує нижню основу циліндра. Відрізок O_1A дорівнює 6 см і утворює з площиною основи циліндра кут $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

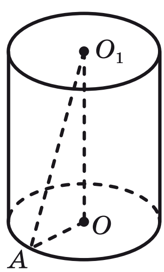


Рис. 5.12

5.9.° Висота циліндра дорівнює 5 см, а діаметр основи — 24 см. Знайдіть відстань від центра однієї основи циліндра до точки кола другої основи.

5.10.° Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d і утворює з однією зі сторін розгортки кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

5.11.° Квадрат, діагональ якого дорівнює 4π см, є розгорткою бічної поверхні циліндра. Знайдіть площу основи цього циліндра.

5.12.° Як зміниться — збільшиться або зменшиться — та в скільки разів площа бічної поверхні циліндра, якщо:
1) радіус його основи збільшити в k разів;
2) висоту циліндра зменшити в k разів;
3) висоту циліндра збільшити в k разів, а радіус основи зменшити в k разів?

Якою функцією є залежність площі бічної поверхні циліндра від:
а) радіуса його основи;
б) висоти циліндра?

5.13.• Діаметр основи циліндра більший за його висоту, а кут між діагоналями осьового перерізу дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

5.14.• Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо площа його бічної поверхні дорівнює S.

5.15.• У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $120°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина даної хорди дорівнює 6 см.

5.16.• У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом $90°$, а із центра верхньої основи — під кутом $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо радіус його основи дорівнює 8 см.

5.17.• У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи з одним із кінців проведеної хорди, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо відстань від центра нижньої основи до проведеної хорди дорівнює a.

5.18.• У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом β. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи й середину даної хорди, дорівнює m та утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

5.19.• Навколо якої зі сторін прямокутника, більшої чи меншої, треба його обертати, щоб отримати циліндр з більшою площею: 1) бічної поверхні; 2) повної поверхні?

5.20.• Паралельно осі циліндра, радіус основи якого дорівнює 10 см, а висота — 12 см, проведено переріз, що є квадратом. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

5.21.$^{\bullet}$ Паралельно осі циліндра проведено переріз, що відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює α $(0° < \alpha < 180°)$. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут β, а радіус основи дорівнює R. Знайдіть площу цього перерізу.

5.22.$^{\bullet}$ Паралельно осі циліндра проведено переріз, що віддалений від неї на $\sqrt{3}$ см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $120°$. Знайдіть площу цього перерізу, якщо його діагональ дорівнює 10 см.

5.23.$^{\bullet}$ Точки O і O_1 — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, точка A належить нижній основі циліндра (рис. 5.13). На відрізку OO_1 позначено точку B так, що пряма AB перетинає бічну поверхню циліндра. Побудуйте точку перетину прямої AB з бічною поверхнею циліндра.

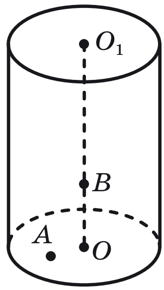


Рис. 5.13

5.24.$^{\bullet}$ Радіус основи циліндра дорівнює 9 см. Із середини відрізка OO_1, де точки O і O_1 — центри відповідно нижньої та верхньої основ циліндра, проведено промінь, який перетинає площину нижньої основи в точці, віддаленій від центра цієї основи на 12 см. Цей промінь перетинає твірну циліндра в точці, віддаленій від площини нижньої основи на 2 см. Знайдіть висоту циліндра.

5.25.$^{\bullet}$ Висота циліндра дорівнює 20 см. Через середину твірної циліндра проведено пряму, яка перетинає відрізок, що сполучає центри основ, у точці, віддаленій на 6 см від площини нижньої основи, а саму цю площину — у точці, віддаленій на 15 см від центра нижньої основи. Знайдіть радіус основи циліндра.

5.26.$^{\bullet}$ Розгортка бічної поверхні циліндра є квадратом. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра.

5.27.$^{\bullet}$ Кут між діагоналлю розгортки бічної поверхні циліндра та стороною розгортки, що дорівнює довжині кола основи циліндра, дорівнює α. Знайдіть кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра та площиною основи.

5.28.$^{\bullet\bullet}$ Кінці відрізка AB, що дорівнює 15 см, належать колам різних основ циліндра. Знайдіть відстань між прямою AB і віссю циліндра, якщо висота циліндра дорівнює 9 см, а радіус його основи — 8 см.

5.29.•• Точки O і O_1 — відповідно центри нижньої та верхньої основ циліндра, точка A належить колу нижньої основи циліндра, а точка B — колу верхньої основи. Кут між прямими OA і O_1B дорівнює $60°$. Знайдіть кут між прямими AB і OO_1, якщо діаметр основи циліндра дорівнює його висоті.

5.30.•• Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі (рис. 5.14). Точки A і B лежать на основах циліндра по різні боки від даного перерізу. Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною MM_1N_1.

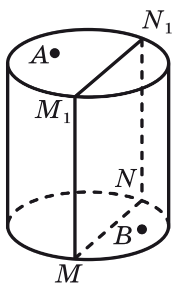


Рис. 5.14

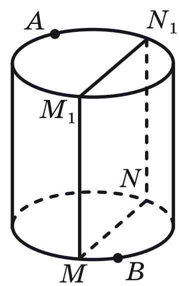


Рис. 5.15

5.31.•• Прямокутник MM_1N_1N — переріз циліндра, паралельний його осі. На колах основ циліндра по різні боки від даного перерізу позначено точки A і B (рис. 5.15). Побудуйте точку перетину прямої AB із площиною MM_1N_1.

5.32.•• Площина, паралельна осі циліндра, відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює α ($0° < \alpha < 180°$). Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

5.33.•• Площина, паралельна осі циліндра, перетинає основу циліндра по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа утвореного перерізу дорівнює S.

5.34.•• Радіус основи циліндра дорівнює 13 см, а висота — 32 см. Прямокутник $ABCD$ розміщений так, що його вершини A і D лежать на колі нижньої основи циліндра, а вершини B і C — на колі верхньої основи. Сторона AD у 4 рази менша від сторони AB. Знайдіть площу прямокутника $ABCD$.

5.35.•• Радіус основи циліндра дорівнює 8 см. Дві вершини квадрата зі стороною 12 см належать колу однієї основи циліндра, а дві — колу другої основи. Знайдіть висоту циліндра, якщо площина даного квадрата перетинає відрізок, який сполучає центри основ циліндра.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.36. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, дорівнює h, а кут між його рівними сторонами дорівнює α. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

5.37. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 27 см, а одна з бічних сторін — 13 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в дану трапецію.

5.38. Сторона основи правильної шестикутної призми дорівнює 6 см, а площа бічної поверхні — 288 см^2. Знайдіть більшу діагональ призми.

6. Комбінації циліндра та призми

Означення. Призму називають *вписаною в циліндр*, якщо її основи вписано в основи циліндра. При цьому циліндр називають *описаним навколо призми*.

Доведемо, що коли призму вписано в циліндр, то вона є прямою. Іншими словами, похилу призму вписати в циліндр неможливо. Для цього покажемо, що бічні ребра призми, вписаної в циліндр, є твірними циліндра.

Нехай відрізок AA_1 — бічне ребро призми, а точки O і O_1 — центри описаних кіл основ призми (рис. 6.1). При паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ образом нижньої основи призми є верхня основа, а отже, образом точки O є точка O_1, тобто $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OO_1}$. Пряма OO_1 — вісь циліндра. Отже, відрізок AA_1 перпендикулярний до основ циліндра. Оскільки точки A і A_1 належать основам циліндра, то відрізок AA_1 — твірна циліндра.

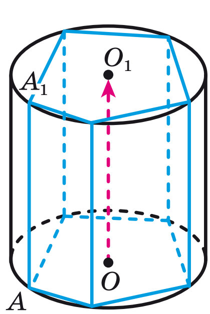


Рис. 6.1

Таким чином, *вписати в циліндр можна таку пряму призму, основи якої є вписаними многокутниками*.

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна вписати в циліндр.

Означення. **Призму називають** **описаною навколо циліндра, якщо її основи описано навколо основ циліндра. При цьому циліндр називають** **вписаним у призму.**

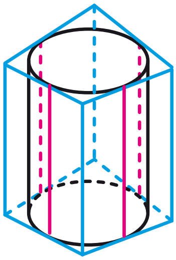


Рис. 6.2

Бічна грань призми, описаної навколо циліндра, проходить через твірну циліндра та інших спільних точок із циліндром не має (на рис. 6.2 ці твірні виділено блакитним кольором). У цьому разі говорять, що бічна грань призми **дотикається до циліндра**.

Доведіть самостійно, що коли призма описана навколо циліндра, то вона є прямою.

Описати навколо циліндра можна таку пряму призму, основи якої є описаними многокутниками.

Наприклад, правильну призму та пряму трикутну призму можна описати навколо циліндра.

Задача. У циліндр, радіус основи якого дорівнює 13 см, а висота — 17 см, вписано призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основа призми, чотирикутник $ABCD$, є трапецією, у якій $BC \parallel AD$ і $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Знайдіть площу чотирикутника AB_1C_1D.

Розв'язання. Чотирикутник, площу якого треба знайти, зображено на рисунку 6.3. Нехай точки O і O_1 — центри основ циліндра. Проведемо через точку O висоту MN трапеції $ABCD$ (рис. 6.4). Оскільки трапеція вписана в коло, то вона є рівнобічною. Тому пряма MN — вісь симетрії трапеції, а точки M і N — середини основ трапеції.

Проведемо радіуси OA і OB основи циліндра (рис. 6.4).

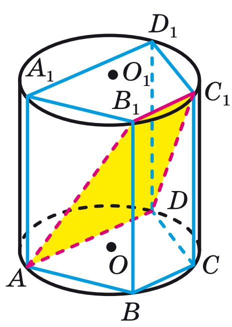


Рис. 6.3

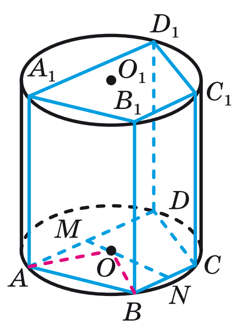


Рис. 6.4