А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2019. — 208 с. : іл.

ISBN 978-966-474-000-0.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-474-000-0

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу, і ми сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією. Маємо надію, що в цьому вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі з рубрики «Перевірте себе».

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

◀ закінчення доведення теореми, розв’язання задачі;

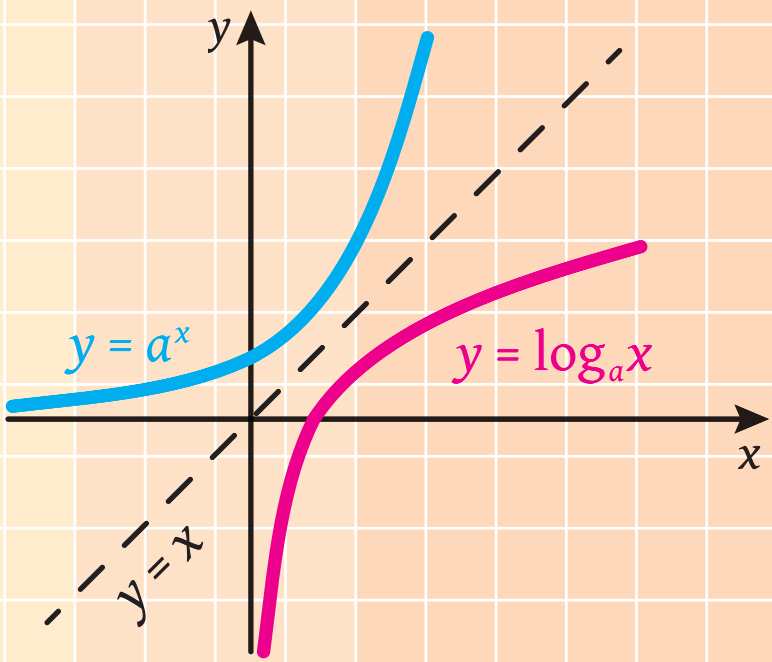
 ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв’язування інших задач;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

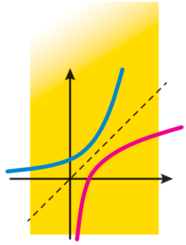
Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв’язування усно.

Розділ 1

Алгебра і початки аналізу



§ 1 ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником. Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

1. Показникова функція та її властивості

Розглянемо функцію $f(x) = 2^x$, де x — раціональне число, тобто областю визначення функції f є множина $\mathbb{Q}$.

На рисунку 1.1 позначено точки графіка функції f, які відповідають деяким цілим значенням x. Обчислимо значення функції $f(x) = 2^x$ при деяких дробових значеннях x. Наприклад, при $x = \frac{1}{2}$ маємо: $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = 1{,}41...$. Якщо до точок, зображених на рисунку 1.1, додати точки графіка функції f, які відповідають, наприклад, значенням $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$, то отримаємо множину точок, зображену на рисунку 1.2.

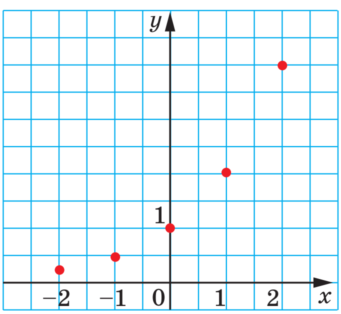


Рис. 1.1

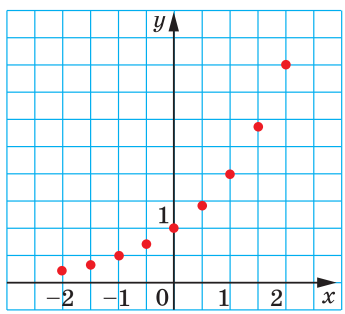


Рис. 1.2

Більш точне уявлення про графік функції f можна отримати, якщо позначити точки, які відповідають іншим раціональним значенням аргументу (рис. 1.3).

Виявляється, що існує тільки одна неперервна на $\mathbb{R}$ функція g, графік якої проходить через усі точки графіка функції f. Графік функції g зображено на рисунку 1.4. Множина точок графіка функції f є підмножиною множини точок графіка функції g.

Функцію g називають **показниковою функцією** з основою 2 і записують: $g(x) = 2^x$.

Аналогічно можна розглядати показникову функцію з будь-якою основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$. Записують: $g(x) = a^x$.

Значення функції g у точці x називають **степенем додатного числа** a **з дійсним показником** x і позначають a^x.

Багато властивостей степеня з раціональним показником зберігаються і для степеня з дійсним показником.

Зокрема, для $a > 0$, $b > 0$ та будь-яких дійсних x і y справедливі такі рівності:

1) $a^x a^y = a^{x+y}$;

2) $a^x : a^y = a^{x-y}$;

3) $(a^x)^y = a^{xy}$;

4) $(ab)^x = a^x b^x$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

Задача 1. Спростіть вираз $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{2\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1. \blacktriangleleft$$

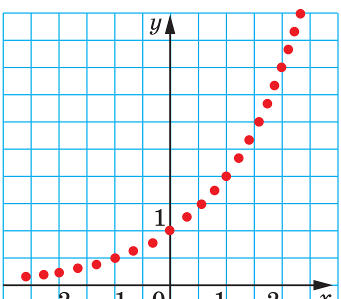


Рис. 1.3

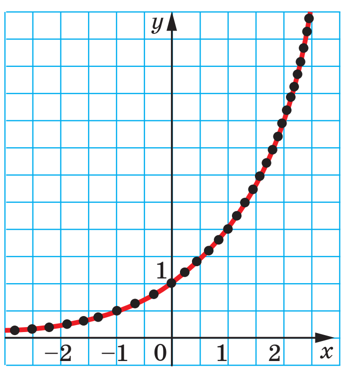


Рис. 1.4

Розглянемо властивості показникової функції $f(x) = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

- *Областю визначення показникової функції є множина дійсних чисел*, тобто $D(f) = \mathbb{R}$.
- *Областю значень показникової функції є множина* $(0; +\infty)$, тобто $E(f) = (0; +\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty; +\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- *При* $a > 1$ *показникова функція є зростаючою*; *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною.*
- *Показникова функція є диференційовною.* Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.5 і 1.6 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

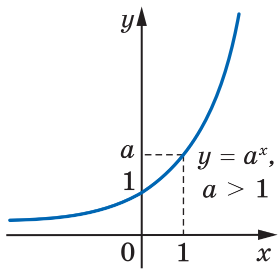


Рис. 1.5

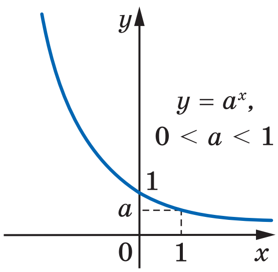


Рис. 1.6

Зазначимо важливу властивість графіка показникової функції $y = a^x$ зі збільшенням модуля x. Якщо $a > 1$ і $x < 0$, то відстані від точок графіка функції $y = a^x$ до осі абсцис стають усе меншими й меншими та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюватимуть нулю. Аналогічну властивість має графік функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і $x > 0$.

Задача 2. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на проміжку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на проміжку $[-4; 3]$ (рис. 1.5), то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Які властивості має степінь з дійсним показником?
2. Сформулюйте властивості показникової функції.
3. Зобразіть схематично графік функції $y = a^x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$.

ВПРАВИ

1.1.° Яка з даних функцій є показниковою:

1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.2.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.3.° Укажіть, які з даних функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.4.° Побудуйте графік функції $y = 3^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -1 до 3 включно?

1.5.° Побудуйте графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. У яких межах змінюється значення функції, коли x зростає від -2 до 2 включно?

1.6.° Порівняйте:

1) $5^{3,4}$ і $5^{3,26}$; 3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ і $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ і 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.7.° Порівняйте із числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.8.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.9.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.• Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.11.• Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.12.• Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$.

1.13.• Спростіть вираз:

1) $\left(\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(a^{\pi}-b^{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$.

1.14.• Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1;\ 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5; +\infty)$;
4) найменше значення функції $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 2]$ дорівнює 16?

1.15.• Знайдіть найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

1.16.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше дорівнює $\frac{1}{4}$?

1.17.• На якому проміжку найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше дорівнює $\frac{1}{9}$?

1.18.$^{\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.19.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.21.$^{\bullet\bullet}$ Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.7, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?

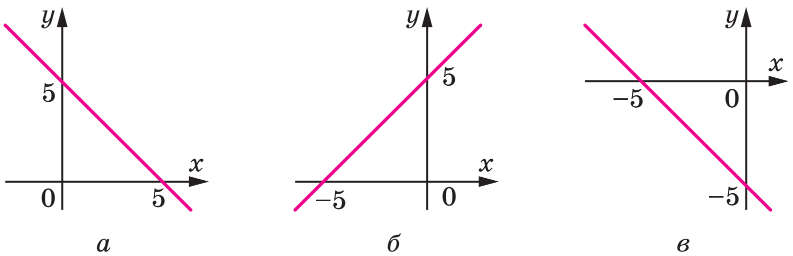


Рис. 1.7

1.22.$^{\bullet\bullet}$ Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = \sin x$; 3) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.23.$^{\bullet\bullet}$ Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.24.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.25.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.26.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.27. Подайте числа 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ у вигляді степеня з основою: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$.

1.28. Подайте числа 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ у вигляді степеня з основою: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$.

1.29. Спростіть вираз:

1) $7^{x+1}+7^{x}$;
2) $2^{x+1}+2^{x-4}$;
3) $3^{x+1}+3^{x}+3^{x-1}$;
4) $2^{x+3}+3\cdot 2^{x+2}-5\cdot 2^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x}+36^{\frac{x}{2}}-6^{x+1}$;
6) $9^{x+1}+3^{2x+1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.30. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-2x-8}$;
2) $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

1.31. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=12-4x-x^2$;
2) $f(x)=3+\sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x)=\cos x\ \mathrm{tg}\ x$.

ЧИ ПОТРІБНО ВИВЧАТИ ПОКАЗНИКОВУ ФУНКЦІЮ?

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Наприклад, біологам відомо, що маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів.

Це означає, що коли, наприклад, у момент часу $t=0$ маса дорівнювала 1, а в момент часу $t=1$ маса дорівнювала a, то в моменти часу $t=2$, $t=3$, ..., $t=n$, ... маса дорівнюватиме відповідно a^2, a^3, ..., a^n, ... Тому природно вважати, що в будь-який момент часу t маса дорівнюватиме a^t. Можна перевірити (зробіть це самостійно), що значення функції $f(t)=a^t$ збільшується в одну й ту саму кількість разів за рівні проміжки часу.

Таким чином, розглянутий процес описують за допомогою показникової функції $f(t)=a^t$.

Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші на рахунок у банку під певний процент, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Тому показникова функція описує і ці процеси.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь**.

Теорема 2.1. ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$.

Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно, розглядаючи випадок, коли $x_1 > x_2$, можна отримати суперечність. Отже, $x_1 = x_2$. ◀

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $2^x = 8$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо:

$$2^x = 2^3.$$

Звідси $x = 3$.

Відповідь: 3. ◀

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

Розв'язання. Маємо: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36$; $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36$.

Винесемо множник 3^{2x} за дужки: $3^{2x}(3^1+1)=36$.

Далі отримуємо: $3^{2x}\cdot 4=36$; $3^{2x}=9$; $3^{2x}=3^2$; $2x=2$; $x=1$.

Відповідь: 1. ◀

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $25^x+4\cdot 5^x-5=0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x=t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2+4t-5=0.$$

Звідси $t=1$ або $t=-5$.

Якщо $t=1$, то $5^x=1$. Звідси $5^x=5^0$; $x=0$.

Якщо $t=-5$, то $5^x=-5$. Оскільки $5^x>0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x=-5$ не має коренів.

Відповідь: 0. ◀

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $9\cdot 5^x=25\cdot 3^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^2\cdot 5^x=5^2\cdot 3^x$. Звідси $\frac{5^x}{3^x}=\frac{5^2}{3^2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^2$; $x=2$.

Відповідь: 2. ◀

1. Що можна сказати про числа x_1 і x_2, якщо виконується рівність $a^{x_1}=a^{x_2}$, де $a>0$ і $a\neq 1$?
2. Якому рівнянню рівносильне рівняння $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, якщо $a>0$ і $a\neq 1$?

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $4^x=64$;
2) $3^x=\frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3}=1$;
4) $10^{-x}=0{,}001$;
5) $2^{5-x}=2^{3x-7}$;
6) $8^x=16$;
7) $\sqrt{5^x}=25$;
8) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
9) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$;
10) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
11) $36^x=\left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
12) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$; 4) $9^{-x}=27$; 7) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$; 5) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;

3) $0{,}7^x=2\frac{2}{49}$; 6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$; 9) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2}+3^x=30$; 3) $2^{x+4}-2^x=120$; 5) $5^x+7\cdot5^{x-2}=160$;

2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$; 4) $7^{x+1}+4\cdot7^x=77$; 6) $6^{x+1}-4\cdot6^{x-1}=192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x=150$; 3) $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347$;

2) $2^x+2^{x-3}=18$; 4) $4^x-3\cdot4^{x-2}=52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x}-6\cdot2^x+8=0$; 3) $25^x-5^x-20=0$;

2) $9^x-6\cdot3^x-27=0$; 4) $100\cdot0{,}3^{2x}+91\cdot0{,}3^x-9=0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x}-3\cdot6^x-18=0$; 2) $2\cdot4^x-9\cdot2^x+4=0$.

2.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x\cdot5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$; 3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $3^{x-1}=6^x\cdot2^{-x}\cdot3^{x+1}$; 4) $4\cdot2^{\cos x}=\sqrt{8}$.

2.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$; 3) $9\cdot3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

2) $2^{x-1}\cdot3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot6^{2x+5}$; 4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$; 3) $2\cdot7^x+7^{x+2}-3\cdot7^{x-1}=354$;

2) $6\cdot5^x-5^{x+1}-3\cdot5^{x-1}=10$; 4) $4^{x-2}-3\cdot2^{2x-1}+5\cdot2^{2x}=228$.

2.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$; 3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;

2) $3^{x+1}-2\cdot3^{x-1}-4\cdot3^{x-2}=17$; 4) $2\cdot3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot3^{2x}=36$.

2.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$; 3) $9^x-6\cdot3^{x-1}=3$;

2) $5^{2x-3}-2\cdot5^{x-2}=3$; 4) $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$.

2.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4$;
3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$;
4) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2$.

2.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
2) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$;
3) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$;
4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$.

2.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
2) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.
3) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$.

2.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;
2) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$.

2.16.•• Розв'яжіть рівняння $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$.

2.17.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

2.18.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

2.19.* Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;
2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;
3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;
4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

2.20.* Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;
2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.21. Розв'яжіть нерівність $f'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$.

2.22. Якого найменшого значення може набувати вираз $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$?

3. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

В основі розв'язування багатьох показникових нерівностей лежить така теорема.

Теорема 3.1. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

Задача 1. Розв'яжіть нерівність $8 \cdot 2^{3x-1} < 0{,}5^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2} і 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

Задача 2. Розв'яжіть нерівність $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$.

Розв'язання. Маємо: $4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$;

$$\left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.$$

Оскільки $0 < \frac{3}{5} < 1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x \leqslant 2x$; $x \geqslant 0$.

Відповідь: $[0; +\infty)$. ◄

Задача 3. Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Нехай $2^x = t$. Тоді $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

Звідси $-\frac{1}{2} < 2^x < 4$.

Оскільки $2^x > 0$, то $2^x > -\frac{1}{2}$ при всіх x. Тому достатньо розв'язати нерівність $2^x < 4$.

Маємо: $2^x < 2^2$; $x < 2$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◀

1. Наведіть приклади показникових нерівностей.
2. Якій нерівності рівносильна нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

3.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

3.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
6) $9^{1-3x} \leqslant 0$.

3.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$; 2) $10^x < 0{,}001$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2-1} < 8$;
2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
3) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
6) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
7) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;
8) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;

2) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;

3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;

4) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

5) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$.

3.6.• Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0,2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0,5^{x-1} \leqslant 32$?

3.7.• Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$; 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.8.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

3.9.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

3.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

3.13.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2\cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;
2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;
4) $25^x - 26\cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;
2) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$.

3.15.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9\cdot 3^{-x} - 8 > 0$;
2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;
3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.16.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1} - 2\cdot 3^{1-x} > 7$;
2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.17.* Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.18.* Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

3.19.* Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot 4^x + 2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x < 0$;
2) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3\cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.20.* Розв'яжіть нерівність:

1) $3\cdot 16^x + 2\cdot 81^x - 5\cdot 36^x < 0$;
2) $2\cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9\cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7\cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.21. Чому дорівнює значення виразу $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{5}$?

3.22. Знайдіть значення виразу $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, якщо $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

4. Логарифм і його властивості

Легко розв'язати рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці A (x_0; 5). Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

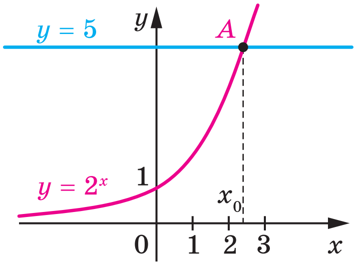


Рис. 4.1

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа** 5 **з основою** 2 та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Логарифм числа b з основою a позначають $\log_a b$.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ оскільки } 17^1 = 17;$$
$$\log_{100} 1 = 0, \text{ оскільки } 100^0 = 1;$$
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ оскільки } 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.*

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність і властивості степеня, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо, що $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

Теорема 4.2 (логарифм частки). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.*

Теорема 4.3 (логарифм степеня). ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^{\beta} = \beta \log_a x}$$

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Наслідок 2. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Задача 1. Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_4 9$; $2x = \log_4 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$. ◄

Задача 2. Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \;◄$$

Задача 3. Обчисліть значення виразу $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$.

Розв'язання. Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \;◄$$

1. Що називають логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$, $a \neq 1$?
2. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
3. Сформулюйте теорему про логарифм добутку.
4. Сформулюйте теорему про логарифм частки.
5. Сформулюйте теорему про логарифм степеня.
6. Сформулюйте теорему про перехід від однієї основи логарифма до іншої та наслідки з неї.

ВПРАВИ

4.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$;

2) $\log_{25} 5 = 2$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 6) $\lg 0{,}0001 = -4$?

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;

2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001.

4.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x = -1$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 5) $\log_x 9 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 x = 0$; 6) $\log_x 2 = 2$.

4.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x = 2$; 3) $0{,}4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.11.° Обчисліть:

1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0{,}45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$.

4.12.° Обчисліть:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$.

4.13.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$;
2) $\log_5 100 - \log_5 4$;
3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;
4) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 4}$.

4.14.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 3) $\dfrac{\log_7 125}{\log_7 5}$.

4.15.• Обчисліть:

1) $64^{0{,}5\log_2 12}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 3) $6^{1+\log_6 5}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8 - 2}$; 5) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$; 6) $2^{3\log_2 5 + 4}$; 7) $8^{1-\log_2 3}$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$.

4.16.• Обчисліть:

1) $4^{\log_2 9}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 3) $10^{2+\lg 8}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6 - 3}$; 5) $2^{4\log_2 3 - 1}$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}$; 7) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$.

4.17.• Обчисліть:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$;
3) $\log_9 \log_2 8$;
4) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
5) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;
6) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

4.18.• Обчисліть:

1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$;
3) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;
4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

4.19.• Знайдіть x, якщо:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$;
2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;
3) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;
4) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$.

4.20.• Знайдіть x, якщо:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$;
2) $\lg x = \frac{2}{5}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 64 + 1$.

4.21.•• Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$;
2) $\frac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$;
3) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;
4) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.22.•• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$;
2) $\frac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$;
3) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;
4) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.23.•• Обчисліть:

1) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$;
2) $7^{2\log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$;
3) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$;
4) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$;
5) $\lg(25^{\log_5 0{,}8} + 9^{\log_3 0{,}6})$;
6) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.24.•• Обчисліть:

1) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_{\frac{1}{6}} 3}$;
2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$;
3) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$;
4) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3}\right)$.

4.25.•• Знайдіть значення виразу

$$\lg\sin 1° \cdot \lg\sin 2° \cdot \lg\sin 3° \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89° \cdot \lg\sin 90°.$$

4.26.•• Спростіть вираз $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9$.

4.27.•• Обчисліть значення виразу $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.28.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_x 1$; 3) $y = 5^{-\log_5 x}$; 5) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

2) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$; 4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$; 6) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$.

4.29.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$; 3) $y = \log_x x$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$; 4) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.30. Спростіть вираз $\left(\dfrac{a^{0,5} + 3b^{0,5}}{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b} + \dfrac{a^{0,5} - 3b^{0,5}}{a - b}\right) \cdot \dfrac{a^{0,5} - b^{0,5}}{2}$.

4.31. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; 2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$.

5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке, що $y = \log_a x$. Тим самим задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Розглянемо основні властивості логарифмічної функції.

- *Функція $y = \log_a x$ має єдиний нуль $x = 1$.*
- *Функція $y = \log_a x$ має два проміжки знакосталості.*

  Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$; $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$;

  якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$.
- *Функція $y = \log_a x$ є зростаючою при $a > 1$ та є спадною при $0 < a < 1$.*
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 5.1 і 5.2 схематично зображено графік логарифмічної функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

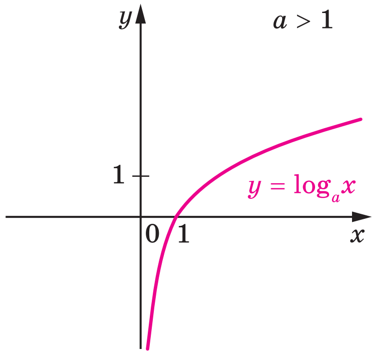


Рис. 5.1

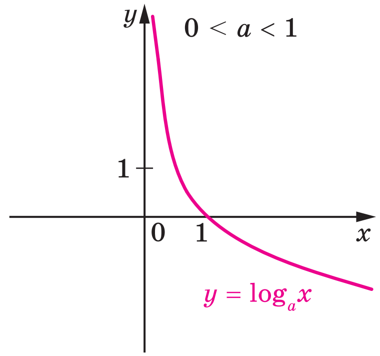


Рис. 5.2

Зазначимо важливу властивість графіка логарифмічної функції $y = \log_a x$. З наближенням значень x до нуля відстані від точок графіка функції $y = \log_a x$ до осі ординат стають усе меншими й меншими та можуть стати як завгодно малими, але ніколи не дорівнюють нулю.

Задача 1. Порівняйте числа:

1) $\log_2 6$ і $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0.

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_2 x$ є зростаючою, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$. ◄

Задача 2. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \log_{x-4} (16 - x)$.

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ або $x > 0$.

Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши системи нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array} \right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

1. Яку функцію називають логарифмічною?
2. Сформулюйте властивості логарифмічної функції.
3. Зобразіть схематично графік логарифмічної функції $y = \log_a x$ при $a > 1$; при $0 < a < 1$.

ВПРАВИ

5.1.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
3) $y = \log_{0,1} x$;
5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
2) $y = \log_3 x$;
4) $y = \lg x$;
6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$?

5.2.° Спираючись на яку властивість логарифмічної функції можна стверджувати, що:

1) $\lg 7 > \lg 5$;
2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Порівняйте:

1) $\log_{12} 5$ і $\log_{12} 6$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ і $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ і $\log_5 \frac{1}{3}$;
4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ і $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$.

5.4.° Порівняйте:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ і $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ і $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ і $\log_7 \frac{1}{2}$;
4) $\lg \frac{\pi}{3}$ і $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$;
4) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;
2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$;
5) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;
3) $f(x) = \log_4 (-x)$;
6) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$.

5.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\log_7(6-x)$;
2) $f(x)=\log_{0,4}(7x-x^2)$;
3) $f(x)=\lg(x+2)-2\lg(x+5)$.

5.7.• Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5>\log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3}>\log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5}<\log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4}<\log_a \frac{\pi}{3}$.

5.8.• Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a \frac{2}{3}>\log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2<\log_a \sqrt{3}$.

5.9.• Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

5.10.• Порівняйте з нулем:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.11.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $y=\log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y=\log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.12.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку:

1) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y=\lg x$, $[1; 1000]$.

5.13.• На якому проміжку найбільше значення функції $y=\log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює -1?

5.14.• На якому проміжку найбільше значення функції $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює -1, а найменше дорівнює -2?

5.15.• Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3; 2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і -2; 3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6.

5.16.• Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1;
2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$.

5.17.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\lg x^2$;
2) $f(x)=\log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{\lg x}$; 4) $f(x)=\dfrac{4}{\log_5(10-x)}$.

5.18.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\log_{12}|x|$; 2) $y=\dfrac{5}{\lg(x+3)}$; 3) $y=\lg\sin x$.

5.19.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x=3-x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=x-1$; 3) $\log_2 x=-x-0{,}5$.

5.20.• Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x=x+\dfrac{1}{2}$; 2) $\log_3 x=4-x$.

5.21.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x=-x$; 2) $\log_3 x=-x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x=\sqrt{x}$.

5.22.• Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\log_2 x$; 2) $\log_2 x=\dfrac{1}{x}$?

5.23.•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.24.•• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.25.•• Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3$ і $\log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8$ і $\log_{0,8} 0{,}7$.

5.26.•• Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ і $\log_{1,8} 1{,}7$; 2) $\log_{0,2} 0{,}3$ і $\log_{0,3} 0{,}2$.

5.27.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\lg(1-\sin x)$;

2) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;

3) $y=\dfrac{x}{\lg(4-x^2)}$;

4) $y=\dfrac{1}{\log_6(x-3)}+\sqrt{6-x}$;

5) $y=\dfrac{4}{\lg(x+2)}+\lg(3-x)$;

6) $y=\log_5(x^2-4x+3)+\dfrac{1}{\log_5(7-x)}$;

7) $y=\lg(6x-x^2)+\dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

8) $y=\log_{x+3}(x^2+x)$.

5.28.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

4) $y = \lg(x+8) - \dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

5) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

6) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$.

5.29.* Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

2) $y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.30. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+15} = x+1$;

2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0$;

5) $3\cos^2 x + 7\sin x - 5 = 0$;

6) $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$.

6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \ne 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням**. Це рівняння можна розв'язати, використовуючи означення логарифма.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $\log_3(3x - 1) = 2$.

Розв'язання. За означенням логарифма можна записати: $3x - 1 = 3^2$. Звідси $3x - 1 = 9$; $x = \dfrac{10}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{10}{3}$. ◄

Розв'язання рівняння прикладу 1 можна подати таким чином:

$$\log_3(3x-1) = 2\log_3 3,$$
$$\log_3(3x-1) = \log_3 3^2,$$
$$3x - 1 = 3^2,\ \ x = \frac{10}{3}.$$

Під час розв'язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 6.1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння виду***

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

рівносильне будь-якій із систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\lg(2x - 3) = \lg(x^2 - 4x + 2)$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2x - 3 = x^2 - 4x + 2, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x = 5$.

Відповідь: 5. ◄

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Розв'язання. Дане рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$ Отримуємо: $x = 5$.

Відповідь: 5. ◄

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Нехай $\log_2 x = t$. Тоді отримуємо: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Звідси $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Отже, $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array} \right.$

Тоді початкове рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array} \right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array} \right.$

Відповідь: $\sqrt{2}$; 4. ◄

1. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним рівнянням?
2. Якій системі рівносильне рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, якщо $a > 0$, $a \neq 1$?

ВПРАВИ

6.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 (x - 1) = 1$;
2) $\log_3 (2x + 1) = 3$;
3) $\lg (3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x - 8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x + 7) = -3$;
2) $\log_4 (2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;
2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$.

6.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 7) = \log_{\frac{1}{4}} (2x + 5)$.

6.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $2 \log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = 6{,}5$;
4) $\log_6 x + 2 \log_{36} x + 3 \log_{216} x = 3$;

5) $\log_7 \log_4 (x-2)=0$; 6) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

6.6.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$.

6.7.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg (x^2 - 2x) = \lg (2x + 12)$;

2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x-2)$;

4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$.

6.8.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;

2) $\lg (x^2 + 2x - 3) = \lg (2x^2 - 2)$.

6.9.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 (x-3) + \log_4 x = 1$;

2) $\log_{0,5} (4 - x) + \log_{0,5} (x-1) = -1$;

3) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x-4) = 2$;

4) $\lg (x-1) + \lg (x-3) = \lg (1,5x - 3)$.

6.10.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7 x + \log_7 (x+6) = 1$;

2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3,5$;

4) $\log_{0,6} (x+2) + \log_{0,6} (6-x) = \log_{0,6} (x+8)$.

6.11.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$;

4) $\frac{2}{\lg (x+2) - 3} + \frac{4}{\lg (x+2) + 1} = 1$.

6.12.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3\log_8^2 (-x) - 2\log_8 (-x) - 1 = 0$;

2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;

3) $3 \log_3 x + 3 \log_x 3 = 10$;

4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$.

6.13.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;

2) $2 \log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$;

3) $2 \log_8 (1-x) = \log_8 (2,5x + 1)$;

4) $2 \log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$.

6.14.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2\log_{0,7}(x + 2)$;
2) $2\log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1$.

6.15.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2)$;
2) $2\log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17)$.

6.16.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1)$;
2) $2\lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5)$.

6.17.* Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$;
2) $\log_{x+1}(x + 3) = 2$;
3) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$;
4) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$.

6.18.* Розв’яжіть рівняння:

1) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;
2) $\log_x(x + 6) = 2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.19. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x + 4}$;
2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}$.

6.20. Знайдіть проміжки зростання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$;
2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$;
3) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5}$.

6.21. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

7. Логарифмічні нерівності

Розв’язування багатьох логарифмічних нерівностей ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 7.1. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Задача 1. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x > 3$.

Розв'язання. Оскільки $3 = \log_2 2^3$, то можна записати:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Ця нерівність рівносильна такій: $x > 2^3$. Звідси $x > 8$.

Відповідь: $(8; +\infty)$. ◀

Задача 2. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Розв'язання. Маємо: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$

Відповідь: $(0;\ 0,3]$. ◀

Задача 3. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$. ◀

Якій системі нерівностей рівносильна нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, якщо $a > 1$? якщо $0 < a < 1$?

ВПРАВИ

7.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}}(x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8(2x-3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}}(x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg(1+3x) < \lg 16$.

7.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12}(x-8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16}(4x-6) < \log_{16} 10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x)<\log_{\frac{8}{11}}2$; 6) $\log_{0,9}(2x+1)>\log_{0,9}5$.

7.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x>2$;
2) $\log_5 x\leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x\leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x>1$;
5) $\log_2(5x+1)>4$;
6) $\log_{0,6}(x-2)<2$;
7) $\log_3(2x-1)\leqslant 3$;
8) $\log_{0,5}(2x+1)\geqslant -2$.

7.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x<-1$;
2) $\log_4 x>2$;
3) $\lg x<5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x>-3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)\geqslant -2$;
6) $\log_9(5x+6)\leqslant 2$.

7.5.• Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $\log_{0,25}(3x-5)>-3$; 2) $\log_3(7-x)<3$?

7.6.• Знайдіть цілі розв'язки нерівності:

1) $\log_{0,5}(1-x)>-1$; 2) $\log_{36}(x+1)\leqslant 0,5$.

7.7.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg(2x+3)>\lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x<\log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1)>\log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3)<\log_{0,4}(x+3)$;
5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

7.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;
2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;
3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;
4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$.

7.9.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;
3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;
4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;
5) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;
6) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$.

7.10.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;
2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0{,}5$;
3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;
4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
5) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
6) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant \log_{0,1}(x+1)$.

7.11.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$.

7.12.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

7.13.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}}x-8\leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}}x+2\geqslant 0$.

7.14.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2}x-2\leqslant 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.15. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^3-3x^2+1$ на проміжку $[-2;\ 1]$.

7.16. У якій точці графіка функції $f(x)=x^3-x^2-2x$ дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $\alpha=\frac{3\pi}{4}$?

7.17. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y=x^2-x+2$, яка паралельна прямій $x+y+2=0$.

8. Похідні показникової та логарифмічної функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати функцію f, визначену на $\mathbb{R}$, відмінну від нульової константи, таку, що $f'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

Виявляється, що серед показникових функцій $f(x) = a^x$ існує єдина функція така, що $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Число, яке є основою степеня для цієї функції, позначають буквою e, а сама функція має вигляд $f(x) = e^x$. Отже,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, що число e ірраціональне. Його можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$e = 2{,}71828182845\ldots\ .$$

Функцію $f(x) = e^x$ називають **експонентою**.

Логарифм з основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Можна довести, що похідна показникової функції $f(x) = a^x$ дорівнює $a^x \ln a$.

Отже, при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

У п. 5 ми зазначили, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною.

Можна довести, що

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Зокрема,

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Задача 1. Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^x (x^2 - 4x)$; 2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 3) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Маємо:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

3) Маємо: $y' = \dfrac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \dfrac{4x^3 \cdot \ln x - \dfrac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4 \ln x - 1)}{\ln^2 x}. ◄$$

Задача 2. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^x + x$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = 1$. Знайдемо похідну функції f у точці $x_0 = 0$: $f'(x) = e^x + 1$. Звідси $f'(x_0) = 2$. Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 2x + 1$.

Відповідь: $y = 2x + 1$. ◄

Задача 3. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції $f(x) = x \ln x$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак $f'(x)$ на $D(f) = (0; +\infty)$.

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \dfrac{1}{e}$.

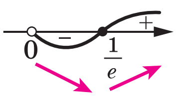


Рис. 8.1

Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція f зростає на проміжку $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$, $x_{min} = \dfrac{1}{e}$ (рис. 8.1). ◄

1. Яку функцію називають експонентою?
2. Що називають натуральним логарифмом?
3. Чому дорівнює похідна функції $y = e^x$? $y = a^x$?
4. Чому дорівнює похідна функції $y = \ln x$? $y = \log_a x$?

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 4e^x$;
2) $y = x^2e^x$;
3) $y = e^x \sin x$;
4) $y = \dfrac{e^x}{x-2}$;
5) $y = 5^x$;
6) $y = x \cdot 3^x$.

8.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^6e^x$;
2) $y = e^x \cos x$;
3) $y = \dfrac{x+1}{e^x}$;
4) $y = 6^x$.

8.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_9 x$;
2) $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$;
3) $y = x^5 \ln x$.

8.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \lg x$;
2) $y = \dfrac{x^5}{\ln x}$.

8.5.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = e^x + e^{-x}$;
2) $y = \dfrac{2^x - 3}{2^x + 1}$.

8.6.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = 10^{-x}$;
2) $y = \dfrac{5^x + 2}{5^x - 1}$.

8.7.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = e^x - 3x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln x$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{e^x}$, $x_0 = 0$.

8.8.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln x$, $x_0 = \dfrac{1}{6}$;
3) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

8.9.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;
3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$.

8.10.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$.

8.11.• Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$; 2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

8.12.• Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.13.•• Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = e^x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = ex - 6$;

2) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$.

8.14.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^x - x$; 4) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$; 7) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$; 5) $f(x) = x^3 \ln x$; 8) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

3) $f(x) = \frac{e^x}{x - 2}$; 6) $f(x) = \ln x - x$;

8.15.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x^3}{3^x}$; 3) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$; 5) $f(x) = 2\ln x + \frac{2}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x + 3}{e^x}$; 4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; 6) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

8.16.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = e^x + x$ на проміжку $[-1;\ 1]$.

8.17.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = (x - 1)\, e^{-x}$ на проміжку $[1;\ 3]$.

8.18.•• Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

8.19.•• Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x}{e^x}$ та побудуйте її графік.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.20. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \cos x - 1$; 2) $\cos 2x = \sin x$.

8.21. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

1) $y = 1 + \sqrt{x + 5}$ і $y = x$; 2) $y = 2 - 2\sqrt{x + 5}$ і $y = -x$.

МОЯ ЛЮБОВ — УКРАЇНА І МАТЕМАТИКА

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві (див. форзац 1).

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію, а потім математичне відділення Київського університету, він залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій та математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був значною мірою використаний американськими вченими під час створення першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним із перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук навчальній роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативи в 1935 р. було проведено першу Київську математичну олімпіаду для школярів. Спробуйте свої сили в розв'язанні задач цієї олімпіади.

Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\dfrac{b^3-a^3b-b^2c+ca^3}{(b-c)^2}+\sqrt{d}$ при $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=0{,}19$, $c=0{,}18$, $d=0{,}04$.

2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20{,}75}=\sqrt{2}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=4, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=280. \end{cases}$

4. Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}.$$

5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Доведіть, що

$$\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c+b} a\cdot\log_{c-b} a.$$

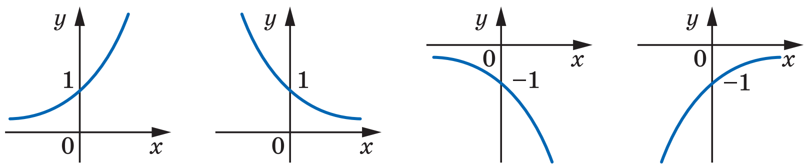
ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яка область визначення функції $y = \dfrac{7}{7^x - 1}$?

А) $(-\infty; +\infty)$;
В) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;
Б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
Г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. На одному з рисунків зображено графік функції $y = 3^{-x}$. Укажіть цей рисунок.

А) Б) В) Г)



3. Чому дорівнює корінь рівняння $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{15}{4}\right)^x = \dfrac{4}{9}$?

А) 2; Б) –2; В) 1; Г) –1.

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $0{,}6^{x^2} > 0{,}6$.

А) $(-\infty; 1)$;
В) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
Б) $(1; +\infty)$;
Г) $(-1;\ 1)$.

5. Розв'яжіть рівняння $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 3.

6. Обчисліть значення виразу $\log_{0,2} 25 - \log_3 \dfrac{1}{27}$.

А) 1; Б) –1; В) 5; Г) –5.

7. Подайте число 3 у вигляді степеня числа 10.

А) $3 = 10^{\log_3 10}$;
В) $3 = 10^{\lg 3}$;
Б) $3 = 10^{\log_3 3}$;
Г) подати неможливо.

8. Чому дорівнює значення виразу $\log_6 108 - \log_6 3$?

А) –1; Б) 2; В) –3; Г) 4.

9. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$.

А) $(-\infty; 5)$;
В) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$;
Б) $(5; +\infty)$;
Г) $(0; 5)$.

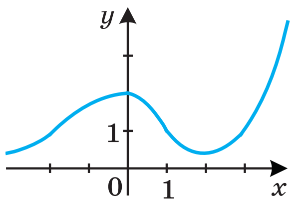
10. Через яку з даних точок проходить графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?

А) $(2;\ 1)$; Б) $(2;\ -1)$; В) $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$; Г) $(2;\ 0)$.

11. При яких значеннях a і b виконується рівність $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$?

А) $a > 0,\ b < 0$; В) $a < 0,\ b < 0$;
Б) $a < 0,\ b > 0$; Г) таких значень не існує.

12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Скільки коренів має рівняння $\ln f(x) = 0$?



А) Жодного кореня;
Б) два корені;
В) три корені;
Г) визначити неможливо.

13. Укажіть найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{0,2}(3 - 2x) < -1$.

А) -2; Б) -1; В) 1; Г) такого розв'язку не існує.

14. Яка множина розв'язків нерівності $\log_x \sqrt{x} < 1$?

А) $(-\infty; +\infty)$; Б) $(0; +\infty)$; В) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; Г) $\varnothing$.

15. Розв'яжіть рівняння $\log_4(x - 4) + \log_4(x - 1) = 1$.

А) $0;\ 5$; Б) 0; В) 5; Г) $1;\ 4$.

16. Порівняйте значення виразів $\log_4 5,\ \log_6 4,\ \log_{0,2} 3$.

А) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; В) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
Б) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; Г) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Знайдіть похідну функції $y = x^3 e^x$.

А) $y' = 3x^2 e^x$; В) $y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$;
Б) $y' = 3x^2 e^x - x^3 e^x$; Г) $y' = x^3 e^x \ln 3$.

18. Знайдіть проміжки спадання функції $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

А) $(-\infty; 0),\ (1;\ \sqrt{e}]$; В) $(0;\ \sqrt{e}]$;
Б) $(0;\ 1),\ (1;\ \sqrt{e}]$; Г) $(0;\ 1)$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$
Зростання/спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Диференційовність	Диференційовна

Показникові рівняння

При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Показникові нерівності

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Логарифм і його властивості

Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Основна логарифмічна тотожність:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконуються рівності:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b$.

Властивості функції $y = \log_a x$

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$, $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$, $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Диференційовність	Диференційовна

Логарифмічні рівняння

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Логарифмічні нерівності

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Похідні показникової та логарифмічної функцій

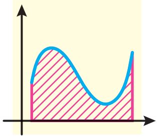
$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

§2 ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з операцією, оберненою до диференціювання, і вивчите властивості цієї операції.

Ви розширите клас фігур, площі яких зможете знаходити. Ознайомитеся з поняттям «визначений інтеграл» і з'ясуєте його геометричний зміст.

9. Первісна

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

Означення. Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних з первісною функції, проміжок I опускають. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Наведемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - 2$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 9.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

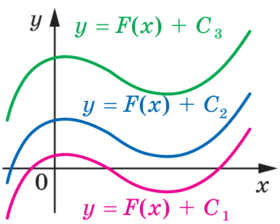


Рис. 9.1

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її **невизначеним інтегралом** і позначають

$$\int f(x)dx$$

(читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Під час розв'язування задач на первісну зручно користуватися таблицею, наведеною на форзаці 3.

Задача 1. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Користуючись таблицею первісних, отримуємо, що однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді згідно з теоремою 9.1 запис $\frac{x^6}{6} + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних. ◄

З розв'язання задачі 1 випливає, що

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

Задача 2. Для функції $f(x) = \cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$.

Розв'язання. Користуючись таблицею первісних, отримуємо, що шукана первісна має вигляд $F(x) = \sin x + C$, де C — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $\sin\frac{\pi}{6} + C = 3$. Ураховуючи, що $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, знаходимо: $C = 2{,}5$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = \sin x + 2{,}5$. ◄

1. Яку функцію називають первісною функції f на проміжку I?
2. Сформулюйте основну властивість первісної.
3. Який запис називають загальним виглядом первісних?
4. Що називають невизначеним інтегралом? Як його позначають?

ВПРАВИ

9.1.° Установіть, чи є функція F первісною функції f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2.° Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$.

9.3.° Чи є функція $F(x) = \frac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-6; 0)$?

9.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[1; +\infty)$;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty; -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

9.5.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=0$;
2) $f(x)=x^8$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0;+\infty)$;
5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4;+\infty)$;
6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0,5;+\infty)$.

9.6.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x)=x^2$, $A\ (-1;\ 3)$;
2) $f(x)=\sin\ x$, $B\ (\pi;\ -1)$;
3) $f(x)=e^x$, $C\ (0;\ -6)$.

9.7.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x)=x^3$, $M\left(1;\dfrac{5}{4}\right)$;

2) $f(x)=\cos\ x$, $N\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5}{2}\right)$;

3) $f(x)=3^x$, $K\left(2;\dfrac{9}{\ln 3}\right)$.

9.8.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{3}\right)=-9$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $I=\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I=(-\infty;0)$, $F(-e^3)=7$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $I=(-\infty;0)$, $F\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3$.

9.9.• Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення у вказаній точці:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$, $F(16)=10$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{e}\right)=-2$;

3) $f(x)=2^x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(5)=1$.

9.10.•• Укажіть на рисунку 9.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\cos 3$.

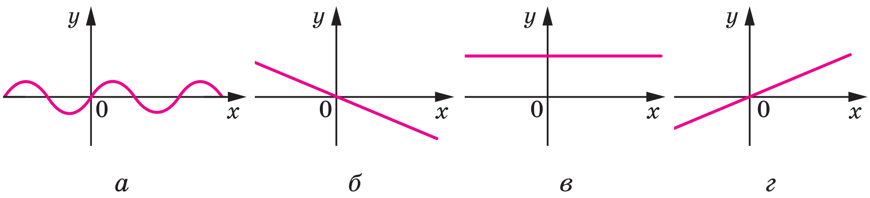


Рис. 9.2

9.11.•• Укажіть на рисунку 9.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\ln 2$.

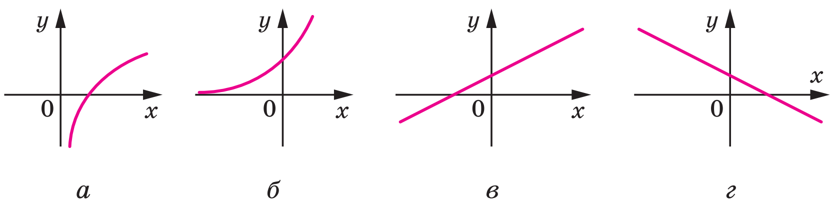


Рис. 9.3

9.12.•• Для функції $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками графіків яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.13. Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(1{,}5x-3)\leqslant 1+2\log_2 0{,}3$;
2) $\log_{0{,}4}(3{,}5-5x)\geqslant 2\log_{0{,}4}0{,}2-1$.

9.14. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha\sin(\pi+\alpha)}$;
2) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1+\sin(\pi+\alpha)}+2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

10. Правила знаходження первісної

Під час знаходження похідних функцій ви користувалися правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо правила знаходження первісних.

Теорема 10.1. ***Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.***

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$ на проміжку I. ◄

З теореми 10.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільне число.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 10.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Тепер можна записати:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де C — довільне число.

Задача 1. Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^2 + \cos x$.

Розв'язання. Первісною функції $y = x^2$ є функція $y = \frac{x^3}{3}$. Первісною функції $y = \cos x$ є функція $y = \sin x$.

Скориставшись теоремою 10.1, отримуємо, що функція $y = \frac{x^3}{3} + \sin x$ є первісною заданої в умові функції f. Тоді запис $\frac{x^3}{3} + \sin x + C$ є загальним виглядом первісних функції f. ◄

Задача 2. Для функції $f(x) = 5\sin x$ знайдіть первісну F, яка задовольняє умову $F(0) = 0$.

Розв'язання. Первісною функції $y = \sin x$ є функція $y = -\cos x$. Скориставшись теоремою 10.2, отримуємо, що функція $y = -5\cos x$ є первісною заданої в умові функції $y = 5\sin x$. Тоді існує таке число C, що $F(x) = -5\cos x + C$. Знайдемо число C з умови $F(0) = 0$. Маємо: $-5\cos 0 + C = 0$. Звідси $C = 5$.

Відповідь: $F(x) = -5\cos x + 5$. ◄

Задача 3. Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t) = 3t^2 + 4t$. Знайдіть закон руху $y = s(t)$, якщо $s(0) = 3$ м (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах).

Розв'язання. Функція $y = s(t)$ є первісною функції $y = v(t)$ на проміжку $[0; +\infty)$. Тоді можна записати:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + C,$$

де C — деяке число. Знайдемо число C з умови $s(0) = 3$. Маємо:

$$t^3 + 2t^2 + C = 3, \text{ звідси } C = 3.$$

Отже, шуканий закон руху задається формулою

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 3. \blacktriangleleft$$

1. Як знайти первісну функції $y = f(x) + g(x)$?
2. Як знайти первісну функції $y = kf(x)$, де k — деяке число?

ВПРАВИ

10.1.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
5) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на проміжку $(0; +\infty)$;
7) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty; 0)$;
8) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

10.2.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

4) $f(x)=\dfrac{9}{\cos^2 x}-3\sin x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

5) $f(x)=5\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0;+\infty)$;

6) $f(x)=\dfrac{9}{x^{10}}+\dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty;0)$.

10.3.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x)=1-2x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(3)=2$;

2) $f(x)=3x^2-4x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(1)=4$;

3) $f(x)=4-\dfrac{1}{x^2}$, $I=(0;+\infty)$, $F\left(\dfrac{1}{4}\right)=1$;

4) $f(x)=(2-3x)^2$, $I=(-\infty;+\infty)$, $F(1)=0$.

10.4.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x)=3-6x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $A(-1;\ 0)$;

2) $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $I=(-\infty;+\infty)$, $B(1;\ 5)$;

3) $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;+\infty)$, $C(4;\ 10)$;

4) $f(x)=2\sin x$, $I=(-\infty;+\infty)$, $D\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

10.5.• Для функції $f(x)=4x^3+4x$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює -1. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

10.6.• Для функції $f(x)=x^2-12$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює 3.

10.7.•• Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x)=5x^4-3x^2-2$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку $A(1;\ 2)$, а функції F_2 — через точку $B(0;\ 5)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

10.8.•• Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x)=(2x-1)^2$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку $A(2;\ 6)$, а функції F_2 — через точку $B(-1;\ 1)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

10.9.•• Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t)=t^2+2t-3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t=0$ точка знаходилася в початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

10.10.•• Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка в будь-який момент часу t визначається за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

10.11.•• Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

10.12.•• Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.13. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;

2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$.

10.14. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2{,}5x)$;

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$.

11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію f, яка є неперервною на проміжку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 11.1 наведено приклади криволінійних трапецій.

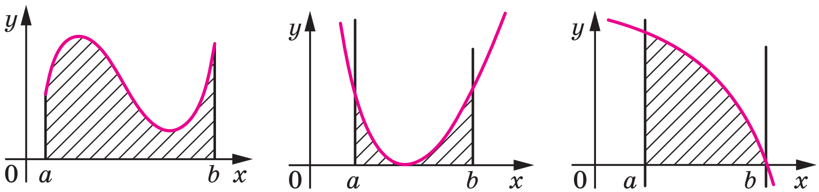


Рис. 11.1

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 11.1. ***Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.

Задача 1. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 11.2 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$. Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◄

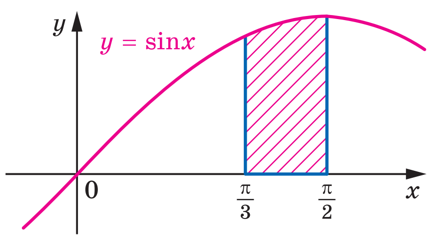


Рис. 11.2

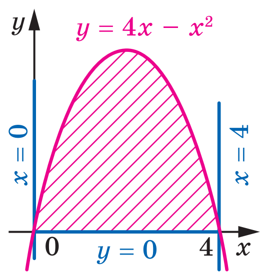


Рис. 11.3

Задача 2. Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 11.3). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції f на проміжку $[0; 4]$ є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.

Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$. ◄

Означення. Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на проміжку $[a; b]$.

Визначений інтеграл функції f на проміжку $[a; b]$ позначають $\int_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

де F — довільна первісна функції f на проміжку I.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b, де $a < b$, можна записати:

$$\int_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f вибрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяке число. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(b).$$

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну F функції f на проміжку $[a; b]$;

2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$;

3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Маємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. Обчисліть $\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

Відповідь: $6\frac{8}{15}$. ◄

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)\,dx}$$

Ця формула виражає **геометричний зміст визначеного інтеграла.**

?

1. Яку фігуру називають криволінійною трапецією?
2. За якою формулою обчислюють площу криволінійної трапеції?
3. Що називають визначеним інтегралом?
4. Запишіть формулу Ньютона—Лейбніца.
5. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?